Roman Leitner
Wojciech Matuszewski
Zdzisław Rojek

zadania z matematyki wyższej

Rachunek całkowy
Równania różniczkowe
Całki w polu wektorowym
Ciągi i szeregi funkcyjne

część II

Wydawnictwa Naukowo-Techniczne

Recenzenci
prof. dr hab. *Józef Banaś*
prof. dr hab. *Jerzy Popenda*

Redaktor *Małgorzata Rajwacka-Jachymek*
Okładkę i strony tytułowe projektował *Wojciech J. Steifer*
Redaktor techniczny *Barbara Chojnacka-Flisiuk*
Korekta *Zespół*
Skład i łamanie *Drukarnia Naukowo-Techniczna*

Książka zawiera zadania, informacje, instrukcje, rysunki oraz rozwiązania zadań. Zakres jej obejmuje: rachunek całkowy, równania różniczkowe zwyczajne, pole wektorowe, ciągi i szeregi funkcyjne. Treść niniejszego zbioru zadań odpowiada rozdziałom 14–23 książki R. Leitnera *Zarys matematyki wyższej, część II*. Zbiór jest przeznaczony dla studentów wyższych szkół technicznych, niektórych wydziałów uniwersytetów i uczelni pedagogicznych.

Wydanie I 1999

Adres poczty elektronicznej: wnt@pol.pl
Strona WWW: www.wnt.com.pl

ISBN 83-204-2851-3 całość
ISBN 83-204-2853-X cz. II

WNT Warszawa 2003. Wyd. II
Ark. wyd. 15,5. Ark. druk. 20,5
Symbol MF/83859/WNT
Drukarnia Naukowo-Techniczna

Spis treści

Przedmowa-9

Rozdział 14

Całka nieoznaczona-11

Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona **11**/ Wzory podstawowe na całkę nieoznaczoną **12**/ Przekształcanie całek nieoznaczonych **13**/ Całkowanie sumy. Wyłączanie czynnika stałego przed znak całki **14**/ Podstawienie liniowe **15**/ Całkowanie przez części **18**/ Włączenie pod różniczkę **19**/ Całki stowarzyszone **20**/ Uogólnione całkowanie przez części **21**/ Całkowanie przez podstawienie **22**/ Różne sposoby całkowania **22**/ Rozkład wielomianu rzeczywistego na czynniki rzeczywiste, liniowe lub kwadratowe nierozkładalne **23**/ Rozkład funkcji wymiernej **24**/ Całkowanie funkcji wymiernych **25**/ Całkowanie funkcji niewymiernych **27**/ Całkowanie funkcji trygonometrycznych **29**/ Całkowanie funkcji niewymiernej za pomocą podstawień trygonometrycznych **31**/ Całkowanie funkcji niewymiernej za pomocą podstawień hiperbolicznych **32**/ Całkowanie funkcji różnych typów **33**/ Całka dwumienna **34**/ Całkowanie funkcji sklejonej **35**

Rozdział 15

Równania różniczkowe zwyczajne (metody elementarne)-37

Pojęcie równania różniczkowego. Równanie rzędu 1 **37**/ Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania $y' = f(x, y)$ **39**/ Równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ **41**/ Obraz geometryczny równania różniczkowego **46**/ Równanie różniczkowe rodziny krzywych **47**/ Równanie różniczkowe $dy/dx = f(ax+by+c)$ **48**/ Równanie różniczkowe $dy/dx = f(y/x)$ **48**/ Równanie różniczkowe $dy/dx = f[(ax+by+c):(mx+ny+p)]$ **50**/ Równanie różniczkowe liniowe rzędu 1 **50**/ Równania Bernoulliego, Riccatiego, Clairauta i Lagrange'a **54**/ Równanie różniczkowe rzędu 2 **57**/ Równania rzędu 2 sprowadzalne do równań rzędu 1 **58**/ Zastosowanie wzorów na różniczkowanie **59**/ Równanie różniczkowe liniowe rzędu 2 **60**/ Równanie Eulera **64**/ Równanie różniczkowe liniowe rzędu n **65**/ Zadania o treści fizycznej **69**/ Ruch punktu materialnego po prostej **71**

Rozdział 16

Całka oznaczona-74

Całka oznaczona w przedziale **74**/ Obliczenie całki za pomocą sumy całkowej **75**/ Całka oznaczona skierowana (całka od a do b) **76**/ Własności całki oznaczonej **76**/ Obliczenie całki oznaczonej za pomocą całki nieoznaczonej **77**/ Zmiana zmiennej. Całkowanie przez części **78**/ Średnia całkowa funkcji jednej zmiennej **81**/ Przybliżone obliczanie całki oznaczonej **82**

Rozdział 17

Geometryczne zastosowania całki oznaczonej-83

Pole figury płaskiej **83**/ Objętości i pola figur obrotowych **86**/ Długość krzywej **89**

Rozdział 18

Całka niewłaściwa-92

Obliczanie całek niewłaściwych **92**/ Kryterium całkowe zbieżności szeregu **96**

Rozdział 19

Całka podwójna-97

Obszary regularne i normalne w $\mathscr{R}^2$ **97**/ Całki iterowane **98**/ Całka podwójna w prostokącie **100**/ Całka podwójna w obszarze normalnym **103**/ Całka podwójna w obszarze ograniczonym przez krzywe **103**/ Całka podwójna w obszarze regularnym domkniętym **104**/ Pole obszaru płaskiego we współrzędnych prostokątnych **105**/ Zmiana kolejności całkowania w całce iterowanej **106**/ Oszacowanie całki podwójnej **107**/ Średnia całkowa funkcji dwóch zmiennych **108**/ Całka podwójna we współrzędnych biegunowych **108**/ Objętość figury przestrzennej **112**/ Pole płata **114**/ Całka podwójna niewłaściwa **118**/ Zmiana zmiennych w całce podwójnej **122**/ Współrzędne strefowe na płaszczyźnie **124**

Rozdział 20

Całka potrójna-127

Obszary regularne i normalne w $\mathscr{R}^3$ **127**/ Definicja całki potrójnej **128**/ Objętość obszaru przestrzennego we współrzędnych prostokątnych **134**/ Oszacowanie całki potrójnej **134**/ Całka potrójna we współrzędnych cylindrycznych **135**/ Całka potrójna we współrzędnych sferycznych **137**/ Obliczanie całek we współrzędnych cylindrycznych i sferycznych **138**/ Zmiana zmiennych w całce potrójnej **140**/ Współrzędne strefowe w przestrzeni **142**

Rozdział 21

Całki krzywoliniowe i powierzchniowe-145

Całka krzywoliniowa funkcji skalarnej (całka krzywoliniowa nieskierowana) **145**/ Obliczanie całki krzywoliniowej nieskierowanej **146**/ Całkowanie po odcinku **150**/ Całka powierzchniowa funkcji skalarnej (całka powierzchniowa niezorientowana) **151**/ Obliczanie całki powierzchniowej niezorientowanej **151**/ Całkowanie po sferze i po powierzchni walcowej **155**/ Całkowanie po powierzchni częściami gładkiej **156**/ Środki mas i momenty bezwładności **156**/ Całka krzywoliniowa składowej stycznej wektora (całka krzywoliniowa skierowana, praca) **160**/ Obliczanie całki krzywoliniowej skierowanej **161**/ Całkowanie po krzywej częściami gładkiej. Moduł pod całką **164**/ Całkowanie po odcinku równoległym do osi układu **165**/ Obieg i cyrkulacja na płaszczyźnie **166**/ Całka powierzchniowa składowej normalnej wektora (całka powierzchniowa zorientowana, strumień) **167**/ Obliczanie całki powierzchniowej zorientowanej (strumienia) **168**/ Obliczenie całki $\iint\limits_{(S)} X\,dydz + Y dzdx + Z\,dxdy$ **170**

Rozdział 22

Pole wektorowe-174

Pole wektorowe i potencjał na płaszczyźnie Oxy **174**/ Twierdzenie Greena **177**/ Pole wektorowe i potencjał w przestrzeni $Oxyz$ **179**/ Pole centralne, pole płaskie, pole skalarne **181**/ Operacje różniczkowe na polach wektorowych i skalarnych **182**/ Twierdzenie Gaussa **185**/ Twierdzenie Stokesa **186**

Rozdział 23

Ciągi i szeregi funkcyjne-188

Zbieżność zwyczajna i zbieżność jednostajna **188**/ Badanie zbieżności ciągu funkcyjnego **189**/ Własności ciągu funkcyjnego **191**/ Ciąg funkcyjny dwuwskaźnikowy. Funkcja Dirichleta **192**/ Szereg funkcyjny **193**/ Szereg geometryczny **194**/ Badanie zbieżności szeregu funkcyjnego **195**/ Zbieżność zwyczajna i zbieżność jednostajna szeregu funkcyjnego **195**/ Kryterium majoranty **196**/ Własności szeregu funkcyjnego **197**/ Kryterium Dirichleta **200**/ Szeregi potęgowe. Promień zbieżności **201**/ Całki nieelementarne **204**/ Szeregi trygonometryczne **205**

Odpowiedzi

Odpowiedzi do rozdziału 14 **210**
Odpowiedzi do rozdziału 15 **242**
Odpowiedzi do rozdziału 16 **274**
Odpowiedzi do rozdziału 17 **276**
Odpowiedzi do rozdziału 18 **278**
Odpowiedzi do rozdziału 19 **281**
Odpowiedzi do rozdziału 20 **287**
Odpowiedzi do rozdziału 21 **297**
Odpowiedzi do rozdziału 22 **303**
Odpowiedzi do rozdziału 23 **306**

Przedmowa

Niniejsza książka jest drugą częścią zbioru zadań z matematyki wyższej. Pierwszą częścią tego zbioru są *Zadania z matematyki wyższej, cz. I*, wydane przez WNT w latach 1992–1998 (cztery wydania).

Niniejsza książka zawiera:

- rachunek całkowy (całki nieoznaczone, oznaczone, niewłaściwe, podwójne, potrójne, krzywoliniowe i powierzchniowe oraz całki w polu wektorowym),
- równania różniczkowe zwyczajne (metody elementarne),
- ciągi i szeregi funkcyjne, szeregi trygonometryczne Fouriera.

Układ i podział na rozdziały tej książki jest taki jak w podręczniku R. Leitnera: *Zarys matematyki wyższej, część II* (wydawanym wielokrotnie przez WNT w latach 1967–1998), cytowanym tu krótko: *Zarys II*. W podręczniku tym Czytelnik znajdzie wykład teorii.

Każdy rozdział niniejszej książki zawiera oprócz zadań definicje, wzory, informacje i instrukcje, które ułatwiają rozwiązywanie zadań. Zadania ułożono w kolejności od łatwych do trudniejszych. Na końcu książki podano do wszystkich zadań odpowiedzi, a do niektórych – rozwiązania szczegółowe.

W zbiorze tym nie zamieszczono zadań z funkcji zespolonych, równań algebraicznych i przekształcenia Laplace'a, tj. zadań dotyczących trzech ostatnich rozdziałów *Zarysu II*. Zadania te znajdą się w trzeciej części *Zadań z matematyki wyższej*, wraz z zadaniami odpowiadającymi trzeciej części *Zarysu*.

Warszawa, styczeń 1999

ROMAN LEITNER
WOJCIECH MATUSZEWSKI
ZDZISŁAW ROJEK

Rozdział **14**

Całka nieoznaczona

Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona

Funkcją pierwotną funkcji f w przedziale E nazywamy każdą funkcję, która w przedziale E ma pochodną równą funkcji f.

Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f w przedziale E wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość

$$F'(x) = f(x), \quad x \in E \tag{1}$$

Dowolne dwie funkcje pierwotne funkcji f w przedziale E różnią się o stałą, zatem jeśli zachodzi równość (1), to wyrażenie

$$F(x) + C, \quad C \text{ — stała dowolna, } x \in E$$

przedstawia *dowolną funkcję pierwotną* funkcji f w przedziale E. Wyrażenie to oznaczamy symbolem

$$\int f(x)dx$$

i nazywamy *całką nieoznaczoną* funkcji f w przedziale E. Równość

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in E \tag{2}$$

jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy równość (1) jest prawdziwa.

Uznanie równości (2) za prawdziwą dlatego, że równość (1) jest prawdziwa, nazywamy *sprawdzeniem całkowania przez różniczkowanie.*

Z każdej równości postaci (1) wynika pewna równość postaci (2).

Ze wzorów podstawowych na pochodne (*Zadania I*, s. 105) wynikają poniższe wzory.

Wzory podstawowe na całkę nieoznaczoną

Każdy z poniższych wzorów jest prawdziwy w tym przedziale, w którym funkcja podcałkowa jest ciągła.

$$\int 0\,dx = C \qquad \int 1\,dx = \int dx = x + C$$

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C \qquad \int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C_1$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C \qquad \int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C \qquad \int \operatorname{th} x\,dx = \ln \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$$

Informacja o funkcjach sh, ch, th, cth znajduje się na s. 32.

Uwagi o całkowaniu

1. Aby daną całkę obliczyć za pomocą wzorów podstawowych, trzeba zwykle uprzednio tę całkę przekształcić.

2. Niekiedy wynik całkowania ma kilka postaci, np. całka

$$\int 2\sin x \cos x\,dx$$

jest równa każdemu z poniższych wyrażeń

$$\sin^2 x + C = -\cos^2 x + C_1 = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_2$$

co łatwo sprawdzić przez różniczkowanie.

3. Niewielka modyfikacja funkcji podcałkowej może spowodować znaczny wzrost trudności rachunkowych lub wręcz niemożność obliczenia całki w sposób elementarny. Dla przykładu przedstawiamy trzy całki

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

z których pierwsza — to całka podstawowa, druga — znacznie trudniejsza, a trzeciej nie można obliczyć w sposób elementarny.

Całki nieelementarne. Dla pewnych funkcji elementarnych, np. dla

$$e^{x^2}, \quad e^{-x^2}, \quad \frac{e^x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\cos x}{x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$$

całka nieoznaczona istnieje, ale nie daje się wyrazić za pomocą skończenie wielu funkcji elementarnych. Taką całkę nazywamy *całką nieelementarną*. Można ją przedstawić za pomocą szeregu, np.

$$\int e^{-x^2} dx = \int \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \ldots$$

Przekształcanie całek nieoznaczonych

Całkowanie sumy:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx \tag{3}$$

Wyłączanie czynnika stałego k, $k \neq 0$, przed znak całki:

$$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx \tag{4}$$

Całkowanie przez części:

$$\int u(x) v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x) v(x)\,dx \tag{5}$$

Całkowanie przez włączenie pod różniczkę:

$$\int f[g(x)]\,g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\Big|_{y=g(x)} \tag{6}$$

Podstawienie liniowe:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(y)\,dy\Big|_{y=ax+b} \qquad a \neq 0 \tag{7}$$

Całkowanie przez podstawienie:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt\big|_{t=\gamma(x)} \tag{8}$$

gdzie funkcja $t = \gamma(x)$ jest funkcją odwrotną do funkcji $x = g(t)$.

Całkowanie sumy. Wyłączanie czynnika stałego przed znak całki

14.1. Stosując wzory podstawowe oraz wzór (3) na całkowanie sumy i wzór (4) na wyłączenie czynnika stałego, wyznaczyć całki

a) $\int b\,dx,\quad \int x\,dx,\quad \int ax\,dx,\quad \int (ax+b)dx$

b) $\int x^2 dx,\quad \int ax^2 dx,\quad \int (ax^2+bx+c)dx$

c) $\int x^3 dx,\quad \int ax^3 dx,\quad \int (12x^3+9x^2-10x-1)dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx,\quad \int \frac{1}{x^3}dx,\quad \int \frac{x-1}{x^3}dx,\quad \int \frac{x^4-1}{x^2}dx$

e) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx,\quad \int x\sqrt{x}\,dx,\quad \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx,\quad \int \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$

f) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx,\quad \int \sqrt[3]{\frac{1}{x}}dx,\quad \int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx,\quad \int \frac{dx}{x\sqrt[4]{x^3}}$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx,\quad \int \frac{2}{x}dx,\quad \int \frac{1}{2x}dx,\quad \int \frac{x-1}{x^2}dx$

h) $\int e^x dx,\quad \int 5e^x dx,\quad \int e^{x+5}dx,\quad \int 5^x dx$

i) $\int \cos x\,dx,\quad \int \sin x\,dx,\quad \int (a\cos x+b\sin x)dx,\quad \int \sin(x+a)dx$

j) $\int \operatorname{ctg} x\,dx,\quad \int \operatorname{tg} x\,dx,\quad \int (\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x)dx,\quad \int (\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x)dx$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx,\quad \int \operatorname{tg}^2 x\,dx,\quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx,\quad \int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,\quad \int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}dx,\quad \int \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}dx,\quad \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{4-4x^2}dx$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx,\quad \int \frac{3}{4+4x^2}dx,\quad \int \frac{2+x^2}{1+x^2}dx,\quad \int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

Podstawienie liniowe

Reguła. Jeśli a, b oznaczają stałe, $a \neq 0$ i zachodzi równość

$$\int f(x)dx = F(x)+C,\quad x\in E$$

to

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C,\quad x\in E_1 \tag{9}$$

14.2. Stosując regułę (9), wyznaczyć całki

a) $\int x^2 dx,\quad \int (2x+5)^2 dx,\quad \int (x+5)^2 dx,\quad \int (1-x)^2 dx$

b) $\int x^3 dx,\quad \int (x-8)^3 dx,\quad \int (1+8x)^3 dx,\quad \int (1-8x)^3 dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2},\quad \int \frac{dx}{(x-a)^2},\quad \int \frac{dx}{x^2+2x+1},\quad \int \frac{dx}{(5x-8)^2}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3},\quad \int \frac{dx}{(x-a)^3},\quad \int \frac{dx}{(7x+1)^3},\quad \int \frac{dx}{(1-5x)^3}$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{-x}},$

f) $\int \sqrt{x}\,dx,\quad \int \sqrt{x+k}\,dx,\quad \int \sqrt{3x+7}\,dx,\quad \int \sqrt{1-2x}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx,\quad \int \frac{1}{x+k}dx,\quad \int \frac{1}{3x+4}dx,\quad \int \frac{1}{2-5x}dx$

h) $\int e^x dx,\quad \int e^{3x}dx,\quad \int e^{-3x}dx,\quad \int e^{3-x}dx$

i) $\displaystyle\int 10^x dx,\quad \int 10^{5x+1}dx,\quad \int \frac{1}{10^x}dx,\quad \int \sqrt{10^x}\,dx$

j) $\displaystyle\int \cos x\,dx,\quad \int \cos 2x\,dx,\quad \int \cos\frac{x}{2}dx,\quad \int \cos\frac{\pi-x}{6}dx$

k) $\displaystyle\int \sin x\,dx,\quad \int \sin(2x+1)\,dx,\quad \int \sin\frac{x}{2}dx,\quad \int \sin x\cos x\,dx$

l) $\int \operatorname{ch} x\,dx$, $\int \operatorname{ch}(ax+b)\,dx$, $\int \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx$, $\int \operatorname{ch}(1-x)\,dx$

m) $\int \operatorname{sh} x\,dx$, $\int \operatorname{sh}\frac{x-c}{2}\,dx$, $\int \operatorname{sh}(1+x)\,dx$, $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x\,dx$

14.3. Korzystając z reguły (9), wyznaczyć całki

a) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$, $\int \sqrt[3]{(x-c)^2}\,dx$, $\int x\sqrt{x}\,dx$, $\int (1-x)\sqrt{1-x}\,dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$, $\int \sqrt[3]{\frac{1}{1-2x}}\,dx$, $\int \sqrt[3]{\frac{1}{ax+b}}\,dx$

c) $\int \frac{a}{x}\,dx$, $\int \frac{a}{x+k}\,dx$, $\int \frac{a}{x^2}\,dx$, $\int \frac{a}{(x+k)^2}\,dx$

d) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$, $\int \operatorname{ctg}(x+k)\,dx$, $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx$, $\int \operatorname{ctg}\frac{k-x}{2}\,dx$

e) $\int \operatorname{tg} x\,dx$, $\int \operatorname{tg} 2x\,dx$, $\int \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx$, $\int \operatorname{tg}\frac{x+k}{3}\,dx$

f) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{\cos^2(x/2)}$, $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$

h) $\int \frac{dx}{1+x^2}$, $\int \frac{dx}{1+4x^2}$, $\int \frac{dx}{4+x^2}$, $\int \frac{dx}{4+9x^2}$

14.4. Wyznaczyć całkę przy założeniu, że $a>0$, $b\neq 0$

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$ b) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ c) $\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2}$

14.5. Sprawdzić dany wzór przez różniczkowanie

a) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ b) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a\neq 0$

Zmienną całkowania nazywamy tę zmienną, względem której ma być wykonane całkowanie danej funkcji. Symbol różniczki zamykający symbol całki wskazuje, która litera jest zmienną całkowania. Może to być dowolna litera, z wyjątkiem litery *d*. Wielkości oznaczone innymi literami niż zmienna całkowania są podczas całkowania stałe i nazywamy je *parametrami*.

14.6. Zwrócić uwagę na symbol różniczki i obliczyć całki

a) $\int x^2y^3\,dx$, $\int x^2y^3\,dy$, $\int x^2y^3\,dz$

b) $\int e^{rx}\,dx$, $\int e^{rx}\,dr$, $\int e^{rx}\,ds$

c) $\int x^r\,dx$, $\int x^r\,dr$, $\int x^r\,dt$

d) $\int \cos(px+s)\,dx$, $\int \cos(px+s)\,dp$, $\int \cos(px+s)\,ds$, $\int \cos(px+s)\,dt$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\int \frac{dy}{\sqrt{x^2-y^2}}$

14.7. Korzystając z liniowości całki i z podstawienia liniowego, wyznaczyć całki

a) $\int x^p\,dx$, $\int x^p(x^p+a)\,dx$, $\int (ax+b)^p\,dx$, $\int (ax+b)^p(ax+c)\,dx$
gdzie $a\neq 0$, $p\neq -1$, $p\neq -2$, $p\neq -1/2$.

b) $\int \frac{1}{x}\,dx$, $\int \frac{x+1}{x}\,dx$, $\int \frac{x+2}{x+1}\,dx$, $\int \frac{3x+2}{2x+1}\,dx$

c) $\int \frac{x+1}{x^2}\,dx$, $\int \frac{x+2}{(x+1)^2}\,dx$, $\int \frac{x+3}{(x+1)^2}\,dx$, $\int \frac{2x+3}{(x+1)^2}\,dx$,

d) $\int (\sqrt{x}+\sqrt{x+1})\,dx$, $\int (x+1)\sqrt{x}\,dx$, $\int (x+2)\sqrt{x+1}\,dx$, $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

e) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$, $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$, $\int \frac{ax^2+b}{1+x^2}\,dx$, $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{-x+1}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+1}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}}$

g) $\int (\sin x - \cos x)^2\, dx$, $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 2x}\, dx$, $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx$, $\int \mathrm{ctg}^2 x\, dx$

h) $\int e^{-x} dx$, $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x}\, dx$, $\int (\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x)\, dx$, $\int \frac{1+\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}\, x}\, dx$

i) $\int (1+e^x)^2 dx$, $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$, $\int \mathrm{ch}^2 x\, dx$, $\int \mathrm{sh}^2 x\, dx$

j) $\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\, dx$, $\int \mathrm{th}^2 x\, dx$, $\int \mathrm{cth}^2 x\, dx$, $\int 2\,\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x\, dx$

Całkowanie przez części

14.8. Całkując przez części, wyznaczyć całki

a) $\int x \sin x\, dx$, $\int (1-x)\sin x\, dx$, $\int x \cos 3x\, dx$

b) $\int x e^x dx$, $\int x e^{2x} dx$, $\int x e^{-x} dx$

c) $\int x \ln x\, dx$, $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$, $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

d) $\int \ln x\, dx$, $\int \ln(1+x^2)\, dx$, $\int \ln \sqrt{x}\, dx$

e) $\int x\sqrt{x+1}\, dx$, $\int x\, \mathrm{sh}\, x\, dx$, $\int x\, \mathrm{ch}\, x\, dx$

14.9. Całkując dwukrotnie przez części, wyznaczyć całkę

a) $\int x^2 e^x dx$ b) $\int x^2 \sin x\, dx$ c) $\int x^2\, \mathrm{ch}\, x\, dx$

14.10. Całkując dwukrotnie przez części i rozwiązując otrzymane równanie względem szukanej całki, wyznaczyć całkę

a) $\int e^x \cos x\, dx$ b) $\int e^x \sin x\, dx$

c) $\int e^{2x} \sin x\, dx$ d) $\int e^{2x} \sin 3x\, dx$

Włączenie pod różniczkę

14.11. Stosując włączenie pod różniczkę, wyznaczyć całkę

a) $\int g^2(x) g'(x) dx$ b) $\int g(x) g'(x) dx$ c) $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx$

d) $\int \frac{g'(x)}{g^2(x)}\, dx$ e) $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\, dx$ f) $\int g'(x)\sqrt{g(x)}\, dx$

g) $\int g'(x) e^{g(x)} dx$ h) $\int g'(x) \cos g(x) dx$ i) $\int \frac{g'(x)dx}{\sqrt{1-g^2(x)}}$

j) $\int \frac{g'(x)dx}{1+g^2(x)}$

14.12. Stosując włączenie pod różniczkę, wyznaczyć całki

a) $\int (a+x^2)^2 2x\, dx$, $\int \sin^2 x \cos x\, dx$, $\int \frac{1}{x} \ln^2 x\, dx$

b) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$, $\int \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2}\, dx$, $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

c) $\int \frac{2x}{a+x^2}\, dx$, $\int \frac{\cos x}{3+4\sin x}\, dx$, $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$

d) $\int \frac{\cos x\, dx}{(a+\sin x)^2}$, $\int \frac{e^x dx}{(1+e^x)^2}$, $\int \frac{2x\, dx}{(a+x^2)^2}$

e) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{a+\sin x}}$, $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-1}}$, $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2-3x^2}}$

f) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\, dx$, $\int x\sqrt{a^2-x^2}\, dx$, $\int e^x \sqrt{1+e^x}\, dx$

g) $\int 2x e^{x^2} dx$, $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$, $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$

h) $\int 2x \cos(x^2)\, dx$, $\int \frac{1}{x} \cos \ln x\, dx$, $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}\, dx$

i) $\int \frac{x\, dx}{x^2+k}$, $\int \frac{x\, dx}{k-x^2}$, $\int \frac{e^x dx}{1+e^x}$

j) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+k}}$, $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \frac{2x\,dx}{1+x^4}$

k) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$, $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$

l) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{x-1}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x)}$

m) $\int \sin x \cos x\,dx$, $\int \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x}$, $\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx$

14.13. Stosując włączenie pod różniczkę lub całkowanie przez części, obliczyć całkę

a) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Całki stowarzyszone

Całkami stowarzyszonymi nazywamy parę całek, których funkcje podcałkowe są wzajemnie zależne w taki sposób, że obliczanie obu tych całek razem jest łatwiejsze niż obliczanie każdej z osobna. Przy obliczaniu całek stowarzyszonych użyteczną jest następująca równoważność dwóch układów równań:

$$\begin{cases} X+Y=a \\ X-Y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\frac{1}{2}(a+b) \\ Y=\frac{1}{2}(a-b) \end{cases} \qquad (*)$$

Obliczymy parę całek stowarzyszonych

$$\int \cos^2 x\,dx, \quad \int \sin^2 x\,dx$$

Z trygonometrii wiadomo, że

$$\cos^2 x+\sin^2 x = 1$$
$$\cos^2 x-\sin^2 x = \cos 2x$$

Po scałkowaniu tych równości otrzymujemy

$$\int \cos^2 x\,dx+\int \sin^2 x\,dx = x+C_1$$
$$\int \cos^2 x\,dx-\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x+C_2$$

Stąd, na podstawie równoważności (*), otrzymujemy odpowiedź

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$
$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C'$$

14.14. Wyznaczyć parę całek stowarzyszonych

a) $G=\int \operatorname{ch}^2 x\,dx$, $H=\int \operatorname{sh}^2 x\,dx$

b) $L=\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $M=\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

c) $P=\int \sqrt{x^2+k}\,dx$, $Q=\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}\,dx$

14.15. Stosując całkowanie przez części, wyznaczyć całkę

a) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ b) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$
c) $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$ d) $\int \arcsin x\,dx$
e) $\int x \arcsin x\,dx$ f) $\int x^2 \arcsin x\,dx$

Uogólnione całkowanie przez części

14.16. Stosując dwukrotne względnie trzykrotne całkowanie przez części, wyprowadzić następujące wzory

$$\int uv''\,dx = uv'-u'v+\int u''v\,dx \qquad (10)$$
$$\int uv'''\,dx = uv''-u'v'+u''v-\int u'''v\,dx \qquad (11)$$

zwane wzorami na *uogólnione całkowanie przez części.*

14.17. Korzystając ze wzoru (11), obliczyć całkę

a) $\int x^2 e^x\,dx$ b) $\int x^2 \sin x\,dx$
c) $\int x^2 \cos x\,dx$

14.18. Korzystając ze wzoru (11), obliczyć całkę

a) $\int P(x)e^{rx}dx$ b) $\int P(x)\sin rx\,dx$ c) $\int P(x)\cos rx\,dx$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem stopnia 2, $r \neq 0$.

Całkowanie przez podstawienie

14.19. Korzystając z podanego podstawienia, obliczyć całkę

a) $\int \frac{3x\,dx}{2\sqrt{1+x}}$, $\sqrt{1+x} = t$ b) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x}}$, $\sqrt{1-x} = t$

c) $\int \sin\ln x\,dx$, $\ln x = t$ d) $\int \ln\sqrt{x}\,dx$, $\sqrt{x} = t$

e) $\int e^{\sqrt{x}}dx$, $\sqrt{x} = t$ f) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$, $\sqrt{x+1} = t$

g) $\int 2x\sqrt{2x+3}\,dx$, $\sqrt{2x+3} = t$

h) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx$, $\sqrt{1+\frac{1}{x}} = t$

i) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$, $1+\ln x = t$ j) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$, $\sqrt{x} = t$

Różne sposoby całkowania

14.20. Wyznaczyć całkę

a) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

c) $\int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$ d) $\int \sin^3x\cos x\,dx$

e) $\int \sin^2x\cos^3x\,dx$ f) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$

g) $\int xe^x\sin x\,dx$ h) $\int \arcsin^2x\,dx$

i) $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$ j) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

k) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (podstawić $x = a\sin t$)

Rozkład wielomianu rzeczywistego na czynniki rzeczywiste, liniowe lub kwadratowe nierozkładalne

Wielomian rzeczywisty zmiennej x stopnia n, $n > 2$

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0 \tag{12}$$

ma rozkład

$$f(x) = a_0(x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\gamma}\ldots(x^2+rx+s)^{\delta} \tag{13}$$

w którym liczby $a,\ldots,b$ oraz pary liczb $(p,q),\ldots,(r,s)$ są różne między sobą, wyróżniki $p^2-4q,\ldots,r^2-4s$ są ujemne, a liczby $\alpha,\ldots,\beta,\gamma,\ldots,\delta$ są całkowite nieujemne. Rozkład taki zawsze istnieje, ale nie zawsze daje się wyznaczyć. Jeśli liczba c jest pierwiastkiem wielomianu f, to dzieląc f przez $x-c$, otrzymamy wielomian, którego rozłożenie może być łatwiejsze. Przy rozkładaniu wielomianu na czynniki korzystamy z odpowiednich wzorów (zob. *Zarys II* s. 30).

14.21. Rozłożyć na czynniki wielomiany

a) $2x^2+4x$, $4x^2-2x$, $2x^2+4$, $2x^2-4$

b) x^2+x-6, $x^2+8x+16$, $3x^2+2x-1$, $4x^2+4x+1$

c) x^3-5x^2, $5x^3+x^2$, x^3-1, x^3+1

d) x^3+4x^2+x-6, x^3-3x^2-9x-5

e) x^3-2x^2+x-2, x^3+x^2+x

14.22. Rozłożyć na czynniki wielomiany

a) $4x^2+x$, $4x^2-8x$, x^2-3, x^2-3x

b) $x^2-10x+9$, $x^2+10x+9$, $16x^2-1$, $16x^2+8x+1$

c) x^3-9x, x^4-x, x^3-8, $8x^3+1$

d) x^3+x^2-x-1, x^3+x-2

e) x^3-x^2+x-1, x^3+x^2+x+1

14.23. Rozłożyć na czynniki wielomiany

a) x^4-3x^2+2, x^4-10x^2+9, x^4+10x^2+9, x^4+x^2-2

b) x^4-x^2-2, x^4+3x^2+2, x^4+2x^2+1, x^4-2x^2+1

c) x^4+x^2+1, x^4-x^2+1, x^4+x^2+4, x^4-x^2+4

d) $x^4-1,\quad x^4+1,\quad x^6-1,\quad x^6+1$

e) $x^8-1,\quad x^8+1$

Rozkład funkcji wymiernej

Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów

$$R(x) = \frac{L(x)}{M(x)}, \quad M(x) \not\equiv 0 \tag{14}$$

Dzieląc licznik $L(x)$ i mianownik $M(x)$ przez ich największy wspólny podzielnik, sprowadzamy funkcję wymierną $R(x)$ do postaci

$$R(x) = \frac{g(x)}{f(x)}, \quad f(x) \not\equiv 0 \tag{15}$$

w której licznik $g(x)$ i mianownik $f(x)$ są względnie pierwsze. Zakładamy, że st $f \geqslant 1$. Jeśli st $g \geqslant$ st f, czyli R jest ułamkiem niewłaściwym, to dzieląc g przez f, sprowadzamy R do postaci

$$R(x) = W(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \tag{16}$$

gdzie W jest wielomianem, a $\varphi(x)/f(x)$ jest ułamkiem właściwym, tj. st $\varphi <$ st f.

Jeśli f ma rozkład (13) i $a_0 = 1$, to $\varphi(x)/f(x)$ ma następujący rozkład na *ułamki proste* typu I (w pierwszym wierszu) i typu II (w drugim wierszu)

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$
$$+ \frac{G_1x+H_1}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{G_\gamma x+H_\gamma}{(x^2+px+q)^\gamma} + \ldots + \frac{K_1x+L_1}{x^2+rx+s} + \ldots + \frac{K_\delta x+L_\delta}{(x^2+rx+s)^\delta} \tag{17}$$

Aby wyznaczyć stałe rozkładu występujące w licznikach tych ułamków, sprowadzamy prawą stronę (17) do wspólnego mianownika, którym jest $f(x)$, i otrzymany przy tym licznik identyfikujemy z wielomianem $\varphi(x)$, tj. żądamy, aby odpowiednie współczynniki tych wielomianów były równe.

14.24. Sprowadzić ułamek niewłaściwy do postaci sumy wielomianu i ułamka właściwego

a) $\dfrac{x-2}{x-1}$ b) $\dfrac{3x^2-9x+2}{x-3}$ c) $\dfrac{x^3+3x-9}{x^2+2x+5}$

d) $\dfrac{x^6+2x^4+3x^2+5}{x^2+2}$ e) $\dfrac{x^{10}}{x^3+1}$

14.25. Rozłożyć ułamek właściwy na ułamki proste

a) $\dfrac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$ b) $\dfrac{6-x}{x^2+3x}$

c) $\dfrac{-1}{x^2+3x-4}$ d) $\dfrac{4x^3-3x^2-2x+2}{x^4-x^3}$

e) $\dfrac{x}{2x^3-x^2-4x+3}$ f) $\dfrac{x^3-2x-5}{x^4+2x^3+5x^2}$

g) $\dfrac{x-3}{x^3+x^2+3x+3}$ h) $\dfrac{x^3+4x^2+2}{2x^5+x^3}$

i) $\dfrac{-x^4+x^3-x^2+2x}{(x^2+1)^2(x^2+2)}$ j) $\dfrac{1}{x^2-1}$

k) $\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$

Całkowanie funkcji wymiernych

Całkowanie funkcji wymiernej (14) sprowadza się do całkowania ułamków prostych (17). Ułamek prosty typu I całkujemy łatwo (zob. zad. 14.3c). Ułamek prosty typu II z licznikiem stałym przekształcamy tak, aby mianownik miał postać $(x^2+a^2)^n$, $a \neq 0$, i całkujemy wg wzorów

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \tag{18}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\,\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}, \quad n \geqslant 2 \tag{19}$$

Ułamek prosty typu II z licznikiem liniowym przekształcamy tak, aby w liczniku pojawiła się pochodna czynnika kwadratowego występującego w mianowniku, po czym rozdzielamy ten ułamek na 2 składniki, z których jeden całkujemy przez włączenie pod różniczkę (zad. 14.11c, d), a drugi, z licznikiem stałym, całkujemy wg wzorów (18) i (19). Na przykład

$$\int\frac{(2x-1)\,dx}{(x^2-2x+5)^2}=\int\frac{[(2x-2)+1]\,dx}{(x^2-2x+5)^2}=\int\frac{(2x-2)\,dx}{(x^2-2x+5)^2}+\int\frac{dx}{[(x-1)^2+4]^2}=$$

$$=\frac{-1}{x^2-2x+5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{4(x^2-2x+5)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$$

14.26. Wyznaczyć całkę ułamka prostego. Zakładamy, że $a \neq 0$. Zadania e), f), i) wymagają zastosowania wzoru (19) na całkowanie funkcji wymiernych

a) $\displaystyle\int\frac{1}{x+a}\,dx$ b) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+a)^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+a)^3}\,dx$

d) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}$ e) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ f) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$

g) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{2x^2+2x+1}$ h) $\displaystyle\int\frac{(2x-7)\,dx}{x^2+2x+10}$ i) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2x+10)^2}$

14.27. Wyznaczyć całkę funkcji wymiernej

a) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}\,dx$ b) $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x^2-1)^2}\,dx$ d) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x(2x-1)}\,dx$

e) $\displaystyle\int\frac{3x+5}{2x^2+5x}\,dx$ f) $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2+x-12}\,dx$

g) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^3-8x^2+22x-20}$ h) $\displaystyle\int\frac{x^3-x^2-5x-2}{(x-1)^4}\,dx$

i) $\displaystyle\int\frac{x^3-3x^2+5x-9}{x^2-3x}\,dx$ j) $\displaystyle\int\frac{x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x+2)^3}\,dx$

k) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^4-x^2-2x+2}$ l) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^4-4x^3+10x^2-12x+9}$

m) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^4+4x^2+3}$ n) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^6+1}$

o) $\displaystyle\int\frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$ p) $\displaystyle\int\frac{x^9\,dx}{(x^4-1)^2}$

q) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2x+5)^3}$ r) $\displaystyle\int\frac{3x^4-12x^3+18x^2-12x+7}{(x-1)^2(x^2-2x+2)^3}\,dx$

Całkowanie funkcji niewymiernych

Pierwiastek dowolnego stopnia funkcji homograficznej $\dfrac{ax+b}{px+q}$. Całkę postaci

$$\int R(x,y)\,dx,\quad y=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{px+q}},\quad \begin{vmatrix} a & b\\ p & q\end{vmatrix}\neq 0 \tag{20}$$

gdzie R jest funkcją wymierną zmiennych x, y, sprowadzamy do całki funkcji wymiernej zmiennej y za pomocą podstawienia

$$y=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{px+q}} \tag{21}$$

14.28. Obliczyć całki

a) $\displaystyle\int\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{2x+3}{x-1}}\,dx$ b) $\displaystyle\int\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt[3]{\frac{3x+4}{1-x}}\,dx$

c) $\displaystyle\int\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ d) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{3x-2}}$

e) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{3x-2}}$ f) $\displaystyle\int\frac{x+1}{1+\sqrt{2x+3}}\,dx$

g) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x-1)\sqrt{x-3}}$ h) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$

i) $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx$ j) $\displaystyle\int\frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}\,dx$

k) $\displaystyle\int\frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}\,dx$ l) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

m) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ n) $\int \frac{1}{x^3}\sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\,dx$

o) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2-x}{x}}\,dx$

Pierwiastek kwadratowy trójmianu kwadratowego. Całkę postaci

$$\int R(x,y)dx, \quad y=\sqrt{ax^2+bx+c}\,, \quad a\neq 0, \quad \Delta=b^2-4ac\neq 0 \tag{22}$$

gdzie R jest funkcją wymierną zmiennych x, y, sprowadzamy do całki funkcji wymiernej zmiennej t, stosując

Trzy podstawienia Eulera

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}-t, \quad \text{jeśli} \quad a>0 \tag{23}$$

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}\,, \quad \text{jeśli} \quad c>0 \tag{24}$$

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=(x-x_1)t, \quad \text{jeśli} \quad \Delta>0 \tag{25}$$

Uwaga. W podstawieniu (23) różnicę $x\sqrt{a}-t$ można zastąpić sumą $x\sqrt{a}+t$ lub różnicą $t-x\sqrt{a}$. Zmiana taka może spowodować, że wynik całkowania będzie wyrażony za pomocą innej funkcji pierwotnej.

14.29. Stosując: **a)** pierwsze, **b)** drugie, **c)** trzecie podstawienie Eulera, obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-10x+1}}$$

14.30. Stosując pierwsze podstawienie Eulera, obliczyć całkę ($k\neq 0$)

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$ **b)** $\int \sqrt{x^2+k}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+k}}$

d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ **e)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

14.31. Stosując drugie podstawienie Eulera, obliczyć całkę

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **b)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ **c)** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

14.32. Stosując trzecie podstawienie Eulera, obliczyć całkę

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ **b)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+3x-2}}$

c) $\int \frac{x\,dx}{-2\sqrt{-x^2+3x-2}}$ **d)** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x}}$ **f)** $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-x}}$

14.33. Obliczyć całkę

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+5x+1}}$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+4}}$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-x+4}}$ **d)** $\int \frac{dx}{2\sqrt{-x^2+4x-3}}$

e) $\int \frac{dx}{x\sqrt{-3x^2+8x-4}}$ **f)** $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

g) $\int (x+1)\sqrt{x^2+1}\,dx$ **h)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{-3x^2+5x-2}}$

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-8x+9}}$

Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Całkę superpozycji funkcji wymiernej $R(u,v)$ na funkcje $u=\sin x$, $v=\cos x$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx \tag{26}$$

sprowadzamy do całki funkcji wymiernej za pomocą następujących podstawień:

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$; stąd $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$;
jest to podstawienie *uniwersalne*, można je stosować do każdej funkcji R;

2) $\operatorname{tg} x = s$; stąd $\frac{1}{\cos^2 x}dx = ds$, $\sin^2 x = \frac{s^2}{1+s^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+s^2}$;
podstawienie to można stosować, jeśli $R(u,v) = R(-u,-v)$;
3) $\sin x = u$; stąd $\cos x\,dx = du$, $\cos^2 x = 1-u^2$;
podstawienie to można stosować, jeśli $R(u,v) = -R(u,-v)$;
4) $\cos x = v$; stąd $-\sin x\,dx = dv$, $\sin^2 x = 1-v^2$;
podstawienie to można stosować, jeśli $R(u,v) = -R(-u,v)$.

Uwaga. Niekiedy korzystamy z tożsamości

$$a\sin x + b\cos x = k\sin(x+p) = k\cos(x-q) \tag{27}$$

gdzie $k^2 = a^2+b^2$, $\cos p = \sin q = a/k$, $\sin p = \cos q = b/k$, $ab \neq 0$

14.34. Wyprowadzić równości wynikające z podstawienia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

14.35. Wyprowadzić równości wynikające z podstawienia $\operatorname{tg}x = s$.

14.36. Stosując podstawienie $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, wyznaczyć całkę

a) $\int\frac{dx}{\sin x}$ b) $\int\frac{dx}{\cos x}$ c) $\int\frac{dx}{5+\sin x+2\cos x}$ d) $\int\frac{dx}{4+3\sin x}$

14.37. Stosując podstawienie $\operatorname{tg}x = s$, wyznaczyć całkę

a) $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$ b) $\int\frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$ c) $\int\frac{dx}{1+3\sin^2 x}$

14.38. Stosując podstawienie $\sin x = u$, wyznaczyć całkę

a) $\int\cos^3 x\,dx$ b) $\int\frac{dx}{\cos x}$ c) $\int\frac{dx}{\cos^3 x}$

14.39. Stosując podstawienie $\cos x = v$, wyznaczyć całkę

a) $\int\sin^3 x\,dx$ b) $\int\frac{dx}{\sin x}$ c) $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$

14.40. Wyznaczyć całkę

a) $\int\frac{dx}{9+4\cos x}$ b) $\int\operatorname{tg}^4 x\,dx$

c) $\int\sin^3 x\cos^3 x\,dx$ d) $\int\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}dx$

e) $\int\frac{dx}{(\sin x-3\cos x)^2}$ f) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+8\sin x+10}$

g) $\int\operatorname{tg}^3 x\,dx$ h) $\int\frac{dx}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}$

Wzory redukcyjne dla całek $\int\sin^n x\,dx$, $\int\cos^n x\,dx$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$

$$\int\sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx \tag{28}$$

$$\int\cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx \tag{29}$$

14.41. Za pomocą wzorów redukcyjnych (28) i (29) wyznaczyć całkę

a) $\int\sin^3 x\,dx$ b) $\int\cos^3 x\,dx$ c) $\int\sin^4 x\,dx$
d) $\int\cos^4 x\,dx$ e) $\int\cos^5 x\,dx$ f) $\int\sin^4 x\cos^2 x\,dx$

Całkowanie funkcji niewymiernej za pomocą podstawień trygonometrycznych

14.42. Wyznaczyć całkę

a) $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ b) $\int\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^6}dx$ c) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

stosując do całek a) i b) podstawienie $x = \sin t$, a do całki c) podstawienie $x = 1/\cos t$.

14.43. Wyznaczyć całkę

a) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ b) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ c) $\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$

stosując do całek a) i b) podstawienie $x = \operatorname{tg}t$, a do całki c) podstawienie $x = 2\operatorname{tg}t$, $|t| < \pi/2$.

14.44. Wyznaczyć całkę $\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $r>0$, stosując podstawienie

a) $x = r\sin t$, $|t| < \pi/2$ **b)** $x+r = 2r\sin^2 t$, $0<t<\pi/2$

14.45. Wyznaczyć całkę $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a<b$,

a) sprowadzając ją do całki z poprzedniego zadania,
b) stosując podstawienie $x-a=(b-a)\sin^2 t$, $0<t<\pi/2$.

Całkowanie funkcji niewymiernej za pomocą podstawień hiperbolicznych

Funkcje hiperboliczne oraz odwrotne do nich *funkcje area* (*Zarys I*, s. 270 oraz *Zadania I*, s. 105 i 109) spełniają wiele tożsamości, z których najważniejsze przypominamy:

$$\operatorname{ch}x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}, \quad \operatorname{cth}x = \frac{1}{\operatorname{th}x}$$

$$(\operatorname{ch}x)' = \operatorname{sh}x, \quad (\operatorname{sh}x)' = \operatorname{ch}x, \quad (\operatorname{th}x)' = 1/\operatorname{ch}^2x, \quad (\operatorname{cth}x)' = -1/\operatorname{sh}^2x$$

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x = 1, \quad \operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x, \quad \operatorname{ch}2x = \operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x$$

$$\operatorname{arsh}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \quad \text{dla} \quad x\in\mathscr{R}; \quad y=\operatorname{arsh}x \Leftrightarrow x=\operatorname{sh}y$$

$$\operatorname{arch}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \quad \text{dla} \quad |x|\geqslant 1; \quad y=\operatorname{arch}x \Leftrightarrow x=\operatorname{ch}y, \quad y\geqslant 0$$

$$\operatorname{arth}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{dla} \quad |x|<1; \quad y=\operatorname{arth}x \Leftrightarrow x=\operatorname{th}y$$

$$\operatorname{arcth}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \quad \text{dla} \quad |x|>1; \quad y=\operatorname{arcth}x \Leftrightarrow x=\operatorname{cth}y$$

14.46. Podstawiając $x=\operatorname{sh}t$, obliczyć całkę

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ **b)** $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$

14.47. Podstawiając:
1° $x=\operatorname{ch}t$, $t>0$ dla $x>1$,
2° $x=-\operatorname{ch}t$, $t>0$ dla $x<-1$, obliczyć całkę

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ **b)** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ **c)** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

14.48. Wyznaczyć całkę $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-r^2}}$, $r>0$, stosując

a) dla $x>r$ podstawienie $x=r\operatorname{ch}t$, $t>0$,
oraz dla $x<-r$ podstawienie $x=-r\operatorname{ch}t$, $t>0$;
b) dla $x>r$ podstawienie $x-r=2r\operatorname{sh}^2t$, $t>0$,
oraz dla $x<-r$ podstawienie $x+r=-2r\operatorname{sh}^2t$, $t>0$.

14.49. Wyznaczyć całkę $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$, $a<b$

a) sprowadzając ją do całki z poprzedniego zadania;
b) stosując dla $x>b$ podstawienie $x-b=(b-a)\operatorname{sh}^2t$ oraz dla $x<a$ podstawienie $x-a=-(b-a)\operatorname{sh}^2t$, $t>0$.

Całkowanie funkcji różnych typów

14.50. Wyznaczyć całkę

a) $\int \frac{x^2\,dx}{(1-2x^3)^2}$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}$ **c)** $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$

d) $\int \frac{e^x\,dx}{(e^x+1)^2}$ **e)** $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$ **f)** $\int \frac{x\operatorname{arc\,tg}x}{(1+x^2)^2}dx$

g) $\int \frac{dx}{3e^{2x}+e^{-2x}}$ **h)** $\int \frac{\ln(x^2-x+1)}{x^2}dx$ **i)** $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2x}dx$

j) $\int\sqrt{\operatorname{th}x}\,dx$ **k)** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{-x(x+1)^2}}$ **l)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2x}}$

m) $\int x\sqrt{1+x^2}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$ **n)** $\int \frac{2x-1}{(2x+1)^4}dx$

o) $\int \frac{dx}{4-9\cos^2x}$ **p)** $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$ **q)** $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$

r) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1-\sin x}\,dx$ s) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ t) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$

u) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx$

14.51. Wyznaczyć całkę

a) $\displaystyle\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ d) $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^3}$

e) $\int \cos^3 x\sqrt{\sin x}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x^2+1}\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$

g) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}}{\sin 2x}\,dx$ j) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{2x+x^2}}\,dx$ l) $\int xe^x\cos x\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ n) $\displaystyle\int \frac{2x^3+2x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$

o) $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$ p) $\displaystyle\int \arccos\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx$

Całka dwumienna

Całka dwumienna jest to całka postaci

$$\int x^p(ax+b)^q dx = \int x^{p+q}\left(\frac{ax+b}{x}\right)^q dx, \quad ab \neq 0$$

gdzie liczby p, q są wymierne. W przypadkach, gdy p lub q lub $p+q$ jest liczbą całkowitą, całka ta daje się sprowadzić do całki funkcji wymiernej za pomocą następujących podstawień:

Przypadek	Podstawienie	Objaśnienie
p całkowite	$t=\sqrt[n]{ax+b}$	n jest mianownikiem liczby q
q całkowite	$t=\sqrt[m]{x}$	m jest mianownikiem liczby p
$p+q$ całkowite	$t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{x}}$	n jest mianownikiem liczby q

14.52. Wyznaczyć całkę

a) $\int x(2-x)^{1/3}dx$ b) $\int x^{1/2}(x-1)^{-1}dx$

c) $\int x^{1/2}(1-x)^{-3/2}dx$ d) $\int x^2(x+2)^{-1/3}dx$

e) $\int x^{-1/2}(x+1)^{-1}dx$ f) $\int x^{-5/2}(x+1)^{1/2}dx$

Całkowanie funkcji sklejonej

Funkcją sklejoną w punkcie p nazywamy funkcję

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{dla} \quad a<x\leqslant p \\ f_2(x) & \text{dla} \quad p\leqslant x<b \end{cases} \qquad f_1(p)=f_2(p)$$

gdzie funkcje f_1 i f_2 są ciągłe w odpowiednich przedziałach, przy czym można przyjąć $a=-\infty$ lub $b=\infty$.

Całka nieoznaczona powyższej funkcji sklejonej wyraża się wzorem

$$\int f(x)dx = C+\begin{cases} F_1(x) & \text{dla} \quad a<x\leqslant p \\ F_2(x)+F_1(p)-F_2(p) & \text{dla} \quad p\leqslant x<b \end{cases}$$

gdzie funkcje F_1 i F_2 są funkcjami pierwotnymi funkcji f_1 i f_2 w odpowiednich przedziałach. Na przykład

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{dla} \quad x\leqslant 0 \\ \cos x & \text{dla} \quad x\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\int f(x)dx = C+\left\{\begin{matrix} e^x \\ \sin x+e^0-\sin 0 \end{matrix}\right\} = C+\begin{cases} e^x & \text{dla} \quad x\leqslant 0 \\ \sin x+1 & \text{dla} \quad x\geqslant 0 \end{cases}$$

Dla *funkcji sklejonej w dwóch punktach p i q (p < q)*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{dla } a < x \leqslant p \\ f_2(x) & \text{dla } p \leqslant x \leqslant q \\ f_3(x) & \text{dla } q \leqslant x < b \end{cases} \quad \begin{matrix} f_1(p) = f_2(p) \\ f_2(q) = f_3(q) \end{matrix}$$

mamy wzór

$$\int f(x)dx = C + \begin{cases} F_1(x) & \text{dla } a < x \leqslant p \\ F_2(x)+F_1(p)-F_2(p) & \text{dla } p \leqslant x \leqslant q \\ F_3(x)+F_1(p)-F_2(p)+F_2(q)-F_3(q) & \text{dla } q \leqslant x < b \end{cases}$$

gdzie funkcje F_1, F_2, F_3 są funkcjami pierwotnymi funkcji f_1, f_2, f_3 w odpowiednich przedziałach.

14.53. Wyznaczyć funkcję pierwotną funkcji f określonej poniżej

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{dla } |x| \leqslant 1 \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \leqslant -1 \\ x & \text{dla } |x| \leqslant 1 \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{dla } x \leqslant -1 \\ 0 & \text{dla } |x| \leqslant 1 \\ x^2-1 & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{dla } x \leqslant -1 \\ 0 & \text{dla } |x| \leqslant 1 \\ 2x-2 & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x-2 & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant -1 \\ x+1 & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -x+1 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$

14.54. Wyznaczyć funkcję pierwotną funkcji f określonej poniżej

a) $f(x) = |x|$ **b)** $f(x) = e^{-|x|}$ **c)** $f(x) = |x-1|$

d) $f(x) = |x^2-1|$ **e)** $f(x) = ||x|-1|$ **f)** $f(x) = 3x|x|$

g) $f(x) = \sin|x|$ **h)** $f(x) = |\sin x|$

Rozdział **15**

Równania różniczkowe zwyczajne (metody elementarne)

Pojęcie równania różniczkowego. Równanie rzędu 1

Równaniem różniczkowym nazywamy równanie, w którym niewiadomą jest funkcja i w którym występuje co najmniej jedna pochodna niewiadomej funkcji.

Mówimy, że równanie różniczkowe jest *rzędu n*, $n \geqslant 1$, jeśli w nim występuje pochodna rzędu n niewiadomej funkcji, a nie występują pochodne wyższego rzędu tej funkcji.

Jeśli niewiadomą jest funkcja jednej zmiennej, to mamy równanie różniczkowe *zwyczajne*, które będziemy nazywać: *równaniem różniczkowym* lub *równaniem*. Równanie różniczkowe zapisujemy w następujących postaciach:

	postać ogólna	postać normalna
równanie rzędu 1	$F(x, y, y') = 0$	$y' = f(x, y)$
równanie rzędu 2	$F(x, y, y', y'') = 0$	$y'' = f(x, y, y')$

gdzie $y = y(x)$ jest niewiadomą funkcją argumentu x, natomiast F i f są wiadomymi funkcjami, określającymi równanie.

Rozwiązaniem równania nazywamy każdą funkcję $y(x)$, która w pewnym przedziale ma pochodną $y'(x)$ i której wstawienie (wraz z pochodną) do równania powoduje, że to równanie staje się w tym przedziale tożsamością. Rozwiązanie takie nazywamy zwykle *rozwiązaniem szczególnym* (skrót RS), a jego wykres — *krzywą całkową* równania.

Rozwiązaniem ogólnym (RO) nazywamy wyrażenie postaci

$$y = \Phi(x, C)$$

które zależy od C w sposób istotny i dla każdej wartości C należącej do pewnego przedziału Γ przedstawia pewne rozwiązanie szczególne.

Rozwiązaniem dodatkowym (RD) nazywamy rozwiązanie szczególne nie objęte rozwiązaniem ogólnym.

Całką równania różniczkowego (szczególną lub *ogólną)* nazywamy równanie liczbowe, określające w sposób uwikłany rozwiązanie (szczególne lub ogólne) równania różniczkowego.

15.1. Zbadać, która z funkcji:

a) $y = 0$ **b)** $y = x^2$ **c)** $y = \sin x$ **d)** $y = \operatorname{tg} x$

jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$y' = 1 + y^2$$

15.2. Zbadać, która z funkcji:

a) $y = 0$ **b)** $y = 1$ **c)** $y = x$ **d)** $y = -\dfrac{1}{x}$

jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$y' = y^2$$

15.3. Wykazać, że rozwiązaniem równania różniczkowego

$$y' = -2xy^2$$

jest każda z poniższych funkcji:

a) $y = 0$ **b)** $y = \dfrac{1}{x^2}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

Narysować odpowiednie krzywe całkowe.

15.4. Wykazać, że rozwiązaniem równania różniczkowego

$$y' = 1 - y^2$$

jest każda z poniższych funkcji

a) $y = 1$ **b)** $y = -1$ **c)** $y = \operatorname{th} x$ **d)** $y = \operatorname{cth} x$

Narysować odpowiednie krzywe całkowe (zob. *Zarys I*, s. 271, rys. 52.11).

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania $y' = f(x, y)$

Zbiorem określoności równania

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

nazywamy zbiór Z punktów (x, y), w których funkcja f jest określona. Każdemu punktowi $(x, y) \in Z$ prawa strona równania przyporządkowuje kierunek stycznej do krzywej całkowej w tym punkcie — o ile ta krzywa istnieje. Wartość $f(x, y)$ jest tangensem kąta skierowanego od osi Ox do tej stycznej.

Obszarem istnienia rozwiązań równania (1) nazywamy obszar, w którym przez każdy punkt przechodzi co najmniej jedna krzywa całkowa tego równania. Takim obszarem jest obszar, w którym funkcja f jest ciągła.

Obszarem jednoznaczności rozwiązań równania (1) nazywamy obszar, w którym każdy punkt ma tę własność, że w pewnym otoczeniu tego punktu istnieje dokładnie jedna krzywa całkowa równania (1), przechodząca przez ten punkt. Takim obszarem jest obszar, w którym funkcja f oraz $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ są ciągłe.

Punktem niejednoznaczności rozwiązań równania (1) nazywamy punkt (x, y), przez który przechodzą co najmniej dwie krzywe całkowe równania (1), nie pokrywające się w żadnym otoczeniu tego punktu.

Warunkiem początkowym (WP) dla równania (1) nazywamy żądanie, aby pewne rozwiązanie $y(x)$ równania (1) spełniało równość

$$y(x_0) = y_0 \qquad \text{(WP)} \tag{2}$$

gdzie liczby x_0, y_0 są dane. Liczby te nazywamy *wartościami początkowymi*. Spełnienie warunku (2) oznacza, że krzywa całkowa $y = y(x)$ równania (1) przechodzi przez punkt (x_0, y_0). Zakładamy przy tym, że ten punkt należy do obszaru istnienia rozwiązań równania (1).

Rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy (RSsWP) wyznaczamy w następujący sposób. W rozwiązaniu ogólnym

$$y = \Phi(x, C), \quad C \in \Gamma \tag{3}$$

podstawiamy $x = x_0$, $y = y_0$ i otrzymujemy równanie liczbowe

$$y_0 = \Phi(x_0, C) \tag{4}$$

o niewiadomej C. Jeśli istnieje liczba C_0 spełniająca to równanie i należąca do Γ, to w (3) podstawiamy $C = C_0$ i otrzymujemy RSsWP

$$y = \Phi(x, C_0) \qquad \text{(RSsWP)} \tag{5}$$

Jeśli zaś taka liczba C_0 nie istnieje, to rozwiązania spełniającego warunek (2) szukamy wśród rozwiązań dodatkowych.

15.5. Dane jest równanie różniczkowe

$$y' = \frac{2y}{x}$$

Należy:

1° wskazać obszary istnienia i jednoznaczności rozwiązań;

2° wykazać, że wyrażenie

$$y = Cx^2, \quad C \in \mathscr{R}, x \neq 0$$

jest rozwiązaniem ogólnym; narysować krzywe całkowe odpowiadające wartościom $C = 0, 1, 2, -1, -2$;

3° wyznaczyć rozwiązanie szczególne, spełniające warunek początkowy $y(x_0) = y_0$, gdzie $x_0 = -2$, $y_0 = 3$.

15.6. Dane jest równanie różniczkowe

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Należy:

1° wskazać obszary istnienia i jednoznaczności rozwiązań;

2° wykazać, że każde z wyrażeń

$$y = \sqrt{C - x^2}, \quad C > 0, \quad |x| < \sqrt{C} \qquad \text{I}$$

$$y = -\sqrt{C - x^2}, \quad C > 0, \quad |x| < \sqrt{C} \qquad \text{II}$$

jest rozwiązaniem ogólnym; narysować krzywe całkowe odpowiadające wartościom $C = 1, 4, 9$;

3° wyznaczyć rozwiązanie szczególne, spełniające warunek początkowy $y(x_0) = y_0$, gdzie $x_0 = 3$, $y_0 = -4$.

15.7. Dane jest równanie różniczkowe

$$y' = y^2$$

Należy:

1° wskazać obszar istnienia i jednoznaczności rozwiązań;

2° wykazać, że wyrażenie

$$y = \frac{1}{C - x}, \quad C \in \mathscr{R}, x \neq C$$

jest rozwiązaniem ogólnym; narysować krzywe całkowe odpowiadające wartościom $C = 0, 1, -1$;

3° odgadnąć rozwiązanie dodatkowe, spełniające warunek początkowy $y(x_0) = y_0$, gdzie $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ (6)

gdzie funkcja f jest ciągła w pewnym przedziale X, a funkcja g jest ciągła i różna od 0 w pewnym przedziale Y, ma obszar jednoznaczności rozwiązań:

$$D = \{(x, y) \colon x \in X, y \in Y\}$$

Metoda rozdzielenia zmiennych. Piszemy równanie (6) w postaci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

rozdzielamy zmienne

$$g(y)dy = f(x)dx$$

i całkujemy

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

Jeśli funkcje G i F są funkcjami pierwotnymi funkcji g i f, wówczas

$$G(y) = F(x) + C \qquad \text{(CO)} \qquad (7)$$

Otrzymane równanie liczbowe jest *całką ogólną* równania (6). Jeśli równanie (7) rozwiążemy względem y, to otrzymamy *rozwiązanie ogólne* równania (6)

$$y = \Phi(x, C) \qquad \text{(RO)} \qquad (8)$$

Jeśli mamy dane wartości początkowe x_0, y_0 i wstawimy je do (8), to postępując jak w (3), (4) i (5), otrzymamy RSsWP.

Jeśli jednak przejście efektywne od (7) do (8) jest niemożliwe lub trudne, to poprzestajemy na równaniu (7) i do niego wstawiamy wartości początkowe. Otrzymujemy

$$G(y_0) = F(x_0) + C$$

a po odjęciu tego równania od równania (7) otrzymujemy równanie

$$G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0) \qquad \text{(CSsWP)} \qquad (9)$$

które jest *całką szczególną* spełniającą warunek początkowy.

U w a g i

1. Zakresem zmienności stałej całkowania C w równaniu (7) jest zbiór wartości różnicy $G(y)-F(x)$, $(x, y)\in D$. Jeśli ze względu na dalsze przekształcenia chcemy tę stałą całkowania oznaczyć inaczej, np. $-C$, $2C$, $C/2$ lub $\ln C$ itp., to możemy to uczynić, zważając wszakże na to, aby zachować zakres jej zmienności.

2. Rozwiązując poniższe zadania, należy na wstępie rozpoznać zbiór Z określoności równania i obszar D jednoznaczności rozwiązań.
Jeśli zbiory te są różne, to oprócz RO mogą istnieć RD.

3. W poniższych zadaniach spotykamy dwa sformułowania:

- *rozwiązać równanie różniczkowe* — chodzi tu o wszystkie rozwiązania i w odpowiedzi podajemy RO (lub CO) oraz RD (o ile istnieje); oraz
- *rozwiązać równanie różniczkowe z warunkiem początkowym* — chodzi tu o RSsWP (lub CSsWP).

15.8. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y' = \dfrac{-2x}{e^y}$ **b)** $y' = -2xy^2$ **c)** $y' = \dfrac{x}{y}$

d) $y' = \dfrac{2y}{x}$ **e)** $y' = \dfrac{1}{2xy}$ **f)** $y' = y^2$

g) $y' = \sin^2 y$ **h)** $y' = 1+y^2$ **i)** $y' = 1-y^2$

15.9. Wyznaczyć dla poniższego równania różniczkowego rozwiązanie szczególne, spełniające warunek początkowy o wartościach x_0, y_0 podanych obok równania (w kilku wariantach).

W s k a z ó w k a. Poniższe równania są dokładnym powtórzeniem równań z zad. 15.8, więc można korzystać z RO (i ewentualnie RD) tych równań podanych na s. 244

a) $y' = -2x/e^y$, 1) 0, 0; 2) 0, 1; 3) 1, 0; 4) 1, 1

b) $y' = -2xy^2$, 1) 0, 0; 2) 0, 1; 3) 1, 1; 4) -1, 1; 5) 2, 1; 6) -2, 1; 7) 0, $-1/3$

c) $y' = x/y$, 1) 1, 2; 2) 1, 1; 3) 1, 1/2; 4) 1, 0; 5) 1, $-1/2$; 6) 1, -1; 7) 1, -2; 8) -1, 1; 9) -1, -1; 10) -1, 1/2

d) $y' = 2y/x$, 1) 1, 1; 2) 1, -3; 3) -1, 3; 4) -3, -1

e) $y' = 1/(2xy)$, 1) 1, 1; 2) -1, 1; 3) e, -1; 4) $-$e, -1

f) $y' = y^2$, 1) 0, 0; 2) 0, 1; 3) 2, -1; 4) -1, -1

g) $y' = \sin^2 y$, 1) 0, 0; 2) 0, π; 3) 0, $\pi/2$; 4) 0, 10

h) $y' = 1+y^2$, 1) 0, 0; 2) 1, 0; 3) 0, 1; 4) 4, 1

i) $y' = 1-y^2$, 1) 0, 0; 2) 0, 1/2; 3) 0, 1; 4) 0, 2; 5) 0, -2

15.10. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y' = \dfrac{2x}{e^y}$ **b)** $y' = 2xe^y$ **c)** $y' = -\dfrac{2y}{x}$

d) $y' = 2xy^2$ **e)** $y' = -y^2$ **f)** $y' = \dfrac{3y}{4x}$

g) $y' = \dfrac{1}{x^2}$ **h)** $y' = -y$ **i)** $y' = \dfrac{1}{2}y^3$

15.11. Rozwiązać równanie różniczkowe i wyznaczyć jego rozwiązanie szczególne, spełniające warunek początkowy $y(x_0) = y_0$ o wartościach x_0, y_0 podanych obok równania (w kilku wariantach).

a) $y' = e^{-y}$, 1) 1, 0; 2) 0, 0; 3) -1, 0; 4) 0, 1; 5) 0, -1

b) $y' = -3y/x$, 1) 1, 1; 2) -1, -1; 3) 1, 0; 4) 2, 1

c) $y' = xe^{-y}$, 1) 0, 0; 2) 0, 1; 3) 0, -1; 4) 1, 0; 5) 2, 0; 6) 2, 0; 7) -2, 0

d) $y' = xy^2$, 1) 0, 0; 2) 0, 1; 3) 0, -1; 4) 1, 1; 5) 1, $\ln 2$; 6) 1, -1; 7) 1, -2; 8) -1, -2; 9) 10, 2; 10) 10, -2

15.12. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y' = \dfrac{e^x}{e^y}$ b) $y' = -2xe^y$ c) $y' = 2xy$

d) $y' = -\dfrac{x}{y}$ e) $y' = \dfrac{3x}{4y}$ f) $y' = xy^3$

g) $y' = \dfrac{x}{x-1}$ h) $y' = y$ i) $y' = y+2$

15.13. Rozwiązać równanie różniczkowe i wyznaczyć rozwiązanie szczególne, spełniające warunek początkowy $y(x_0) = y_0$ o wartościach x_0, y_0 podanych obok równania (w kilku wariantach).

a) $y' = \dfrac{y-1}{x}$, 1) 1, 0; 2) 3, 1; 3) -3, 0

b) $y' = -\dfrac{1}{2}y^3$, 1) 0, 1; 2) 1, 1; 3) 2, -1

c) $y' = -2x/y$, 1) 3, -4; 2) 0, 34; 3) 1, 0

d) $y' = 2x/y$, 1) 3, -4; 2) 3, -6; 3) -1, 2

15.14. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y' = e^{x+y}$ b) $y' = e^{-y}\sin x$ c) $y' = \dfrac{y(y-1)}{x}$

d) $y' = \sqrt{1+y^2}$ e) $y' = -\dfrac{y}{x^2}$ f) $y' = \dfrac{e^x}{2y}$

g) $y' = y\sin x$ h) $y' = \sin y$ i) $y' = \dfrac{1-x^2}{xy}$

15.15. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y' = e^y$ b) $y' = \dfrac{1}{2y}$ c) $y' = -\dfrac{1}{2y}$

d) $y' = \dfrac{1}{y}$ e) $y' = \dfrac{1}{2y-2}$ f) $y' = \dfrac{1}{y^2}$

g) $y' = \dfrac{2/3}{y^2+1}$ h) $y' = \dfrac{2/3}{y^2-1}$ i) $y' = 2x\cos^2 y$

15.16. Rozwiązać równanie różniczkowe i wyznaczyć punkty niejednoznaczności rozwiązań tego równania

a) $y' = 2\sqrt{y}$ b) $y' = 4x\sqrt{y}$ c) $y' = -2\sqrt{y}\sin x$

d) $y' = 2\sqrt{|y|}$ e) $y' = 4x\sqrt{|y|}$ f) $y' = -2\sqrt{|y|}\sin x$

g) $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y}$ h) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ i) $y' = 3\sqrt[3]{y^4}$

j) $y' = \sqrt{1-y^2}$ k) $y' = \sqrt{|1-y^2|}$ l) $y' = \operatorname{sgn} y$

15.17. Rozwiązać równanie różniczkowe z warunkiem początkowym

a) $y' = y\ln y$, $y(0) = e$

b) $y' = 1/e^{x+y}$, $y(0) = 0$

c) $y' = \dfrac{1+e^y}{e^y}\dfrac{2x}{1+x^2}$, $y(1) = 0$

d) $y' = \dfrac{1+y^2}{y}\dfrac{x}{1+x^2}$, $y(1) = 1$

Możliwość efektywnego rozwiązania równania różniczkowego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

jest ograniczona i zależy:

1° od tego, czy całki $\int g(y)dy$ i $\int f(x)dx$ są elementarne, tj. czy potrafimy wyznaczyć funkcje $G(y)$, $F(x)$ i napisać efektywnie równanie liczbowe $G(y) = F(x)+C$,

2° od tego, czy potrafimy to równanie liczbowe rozwiązać i wyznaczyć z niego rozwiązanie $y(x)$ danego równania różniczkowego.

Poniżej przedstawiono trzy równania różniczkowe, z których tylko pierwsze ma rozwiązanie efektywne; drugie ma całkę, której nie rozwiążemy elementarnie względem y ani względem x, a trzecie sprowadza się do dwóch całek nieelementarnych.

$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{e^y}$ $\int e^y dy=\int \cos x\,dx$ $e^y=C+\sin x$ $y=\ln(C+\sin x)$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\cos x}{1+e^y}$ $\int(1+e^y)dy=\int(1+\cos x)dx$ $y+e^y=C+x+\sin x$	$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos x}{xe^y}$ $\int\frac{e^y}{y}dy=\int\frac{\cos x}{x}dx$

Obraz geometryczny równania różniczkowego

Obrazem geometrycznym równania różniczkowego $y'=f(x,y)$ nazywamy zbiór krzywych całkowych tego równania. Z geometrycznego punktu widzenia taki obraz może mieć pewne luki; np. obrazem równania $y'=1/y$ jest zbiór parabol $y^2=2(x-C)$, z których każda jest pozbawiona wierzchołka (gdyż, zgodnie z równaniem, musi być $y\neq 0$). Tę niedogodność można usunąć i obraz równania można uzupełnić (zob. *Zarys II* s. 60—61).

Równanie

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{10}$$

i równanie odwrotne

$$\frac{dx}{dy}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \tag{11}$$

zapisujemy łącznie w postaci

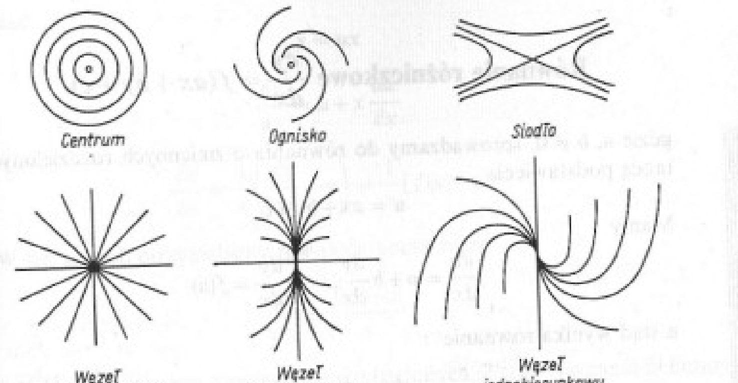
$$P(x,y)\,dx=Q(x,y)\,dy \tag{12}$$

która jest alternatywą powyższych równań (10) i (11). Krzywymi całkowymi równania (12) są krzywe całkowe równań (10) i (11).

Punkty osobliwe. Jeśli w pewnym punkcie (x_0,y_0) obszaru D obie funkcje P i Q są równe 0, a ich stosunek P/Q lub Q/P jest nieograniczony, ale jego moduł nie dąży do ∞, gdy $(x,y)\to(x_0,y_0)$, to punkt (x_0,y_0) nazywamy *punktem osobliwym* równań (10), (11) i (12). Punkty osobliwe klasyfikujemy zależnie od uzupełnionego obrazu równania w sąsiedztwie tych punktów. Główne typy punktów osobliwych i ich nazwy przedstawiono na rysunku na sąsiedniej stronie.

15.18. Które punkty lub proste należy dołączyć do obrazów równań w zadaniach 15.8c, d, e, aby otrzymać uzupełnione obrazy tych równań?

15.19. Określić typ punktu osobliwego równania w zadaniach: 15.8c, d, 15.10c, f, 15.12d, e, 15.14c, e, i.



15.20. Wyznaczyć uzupełniony obraz geometryczny równania różniczkowego

a) $y'=\frac{2xy}{x^2+1}$ b) $y'=\frac{4y}{x}$ c) $y'=\frac{y}{x\ln x}$

d) $y'=\frac{y\ln y}{x\ln x}$ e) $y'=\frac{y\ln y}{x}$ f) $y'=-\frac{y\ln y}{x}$

g) $y'=\frac{1-y^2}{1-x^2}$ h) $y'=\frac{y^2}{x^2}$ i) $y'=\frac{\cos^2 y}{\cos^2 x}$

Równanie różniczkowe rodziny krzywych

Niech będzie dana rodzina krzywych, określona równaniem

$$F(x,y,c)=0$$

Po zróżniczkowaniu tego równania względem x przy założeniu, że $y=y(x)$, otrzymujemy równanie

$$F_x(x,y,c)+F_y(x,y,c)y'=0$$

Z tych dwóch równań rugujemy parametr c i otrzymujemy związek między x, y, y', który jest równaniem różniczkowym danej rodziny krzywych.

15.21. Wyprowadzić równanie różniczkowe rodziny krzywych

a) $y=cx^2$ b) $y=cx^2+c$ c) $x^2+y^2=c$, $c>0$

d) $x^2-y^2=c$ **e)** $y=c/x$ **f)** $y=cx$
g) $y=1/(x-c)$ **h)** $x^2+y^2-cx=0$ **i)** $x^2+y^2-cx+1=0$

Równanie różniczkowe $\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ (13)

gdzie a, $b \neq 0$, sprowadzamy do równania o zmiennych rozdzielonych za pomocą podstawienia

$$u=ax+by+c \tag{14}$$

Mamy

$$\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx}=f(u)$$

a stąd wynika równanie

$$\frac{du}{dx}=a+bf(u) \tag{15}$$

które jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Z tego równania obliczamy u, a następnie z równości (14) obliczamy y.

15.22. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y'=(x+y)^2$ **b)** $y'=(x+y)^2-1$

c) $y'=(x+y)^2-2$ **d)** $y'=(x+y)^2+2(x+y)$

e) $y'=2x+3y+4$ **f)** $y'=1-\dfrac{1}{x-y}$

15.23. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y'=(x-y)^2+2$ **b)** $y'=(x-y)^2+1$ **c)** $y'=(x-y)^2$

d) $y'=\sin^2(x-y)$ **e)** $y'=ax+by+c,\ b\neq 0$

f) $y'=(x-y)^3+1$ **g)** $y'=\dfrac{1-x-y}{x+y}$

Równanie różniczkowe $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (16)

sprowadzamy do równania o zmiennych rozdzielonych za pomocą podstawienia

$$u=\frac{y}{x} \tag{17}$$

Stąd

$$y=ux$$

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}-u\right)=\frac{1}{x}[f(u)-u]$$

W ten sposób otrzymaliśmy równanie pomocnicze

$$\frac{du}{dx}=\frac{f(u)-u}{x} \tag{18}$$

które jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Z tego równania obliczamy u, a następnie z (17) obliczamy y.

15.24. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y'=\dfrac{y}{x}\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$ **b)** $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$

c) $y'=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$ **d)** $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

e) $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$ **f)** $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

g) $y'=\dfrac{kx+y}{x-ky}$

14.25. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y'=\dfrac{2x-y}{x}$ **b)** $y'=\dfrac{x+y}{x}$ **c)** $y'=\dfrac{xy+y^2}{x^2}$

d) $y'=\dfrac{2x-y}{x-y}$ **e)** $y'=\dfrac{9x+y}{x+y}$ **f)** $y'=\dfrac{k^2x+y}{x+y},\ k\neq 0$

g) $y'=\dfrac{y}{x+y}$ **h)** $y'=\dfrac{2x+y}{x-2y}$ **i)** $y'=\dfrac{y}{x}-e^{y/x}$

j) $y'=\dfrac{y(x-y)}{x(x+y)}$ **k)** $y'=\dfrac{y^2-x^2}{xy}$ **l)** $y'=\dfrac{y}{x}+\cos^2\dfrac{y}{x}$

Równanie różniczkowe $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{ax+by+c}{mx+ny+p}\right)$ (19)

gdzie $w = \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} \neq 0$, rozwiązujemy następująco:

1° piszemy równanie pomocnicze

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{mX+nY}\right) = f\left(\frac{a+b\,Y/X}{m+n\,Y/X}\right) \tag{20}$$

które jest równaniem typu (16) i rozwiązujemy je;

2° piszemy układ równań liczbowych

$$\begin{aligned} ax+by &= c \\ mx+ny &= p \end{aligned} \tag{21}$$

wyznaczamy jego rozwiązanie: $x = h$, $y = k$ i piszemy wzory

$$X = x+h, \qquad Y = y+k \tag{22}$$

3° rozwiązanie równania (20) z podstawieniem (22) jest rozwiązaniem równania (19).

Jeśli zaś $w = 0$, to równanie (19) można sprowadzić do równania typu (13) lub (6).

15.26. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y' = \dfrac{2x-y+7}{x-y+3}$ **b)** $y' = \dfrac{2x-y+7}{x+5}$ **c)** $y' = \dfrac{x-y+1}{x-y}$

15.27. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y' = \dfrac{x+y-2}{-x+y+4}$ **b)** $y' = \dfrac{3x+y-2}{-x+1}$ **c)** $y' = \dfrac{2x+4y+3}{x+2y+1}$

d) $y' = \dfrac{x+y-2}{-x+y-4}$ **e)** $y' = \dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$ **f)** $y' = \left(\dfrac{x+y}{x+1}\right)^2$

Równanie różniczkowe liniowe rzędu 1

Rozróżniamy dwie odmiany tego równania:

- *równanie jednorodne* (RJ)

$$y'+p(x)y = 0 \qquad \text{(RJ)} \tag{23}$$

- *równanie niejednorodne* (RN)

$$y'+p(x)y = f(x) \qquad \text{(RN)} \tag{24}$$

Założenie. Zakładamy, że funkcje $p(x)$ i $f(x)$ są ciągłe w pewnym przedziale X oraz że w pewnych punktach tego przedziału $f(x) \neq 0$.

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań. Dla każdej pary wartości początkowych (x_0, y_0), gdzie $x_0 \in X$, $y_0 \in \mathscr{R}$, istnieje w przedziale X dokładnie jedno rozwiązanie $y(x)$ równania (23) spełniające warunek początkowy $y(x_0) = y_0$.
Równanie (24) ma tę samą własność. Każde rozwiązanie równania (23) lub (24) istnieje w całym przedziale X.

Równanie jednorodne rozwiązujemy metodą rozdzielenia zmiennych (*Zarys II*, s. 77). Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (23) ma postać

$$y = Ce^{-P(x)} \qquad \text{(RORJ)} \tag{25}$$

gdzie: $P(x) = \int p(x)dx$, stałą całkowania opuszczamy, C jest stałą dowolną.

Równanie niejednorodne rozwiązujemy metodą uzmiennienia stałej (*Zarys II*, s. 78). Rozwiązanie równania niejednorodnego (24) ma postać

$$y = e^{-P(x)} \int f(x)e^{P(x)}dx \quad \text{(RORN lub RSRN)} \tag{26}$$

Rozwiązanie to jest ogólne, jeśli uwzględniamy stałą występującego tu całkowania, albo szczególne, jeśli tę stałą opuszczamy.

Związek między rozwiązaniami równań RN i RJ

$$\text{RORN} = \text{RSRN} + \text{RORJ} \tag{27}$$

Wyznaczenie RSRN metodą przewidywania. Jeśli w równaniach (23) i (24) współczynnik p jest stały, a prawa strona $f(x)$ jest jedną z funkcji wymienionych w poniższej tabeli, to przewidujemy *projekt* RSRN o postaci $\varphi(x)$, podobnej do $f(x)$, ale zawierającej pewne stałe $A, B, \ldots$ na razie nieznane. Następnie wstawiamy $y = \varphi(x)$ do RN i żądamy, aby otrzymane równanie liczbowe było tożsamością. Stąd wyznaczamy stałe $A, B, \ldots$ i projekt $y = \varphi(x)$, ze stałymi uzyskanymi w ten sposób, stanowi RSRN.

Jeśli otrzymane równanie nie może być tożsamością, to projekt $y = \varphi(x)$ odrzucamy, tworzymy nowy projekt $y = x\varphi(x)$ i ponawiamy postępowanie prowadzące do wyznaczenia stałych $A, B, \ldots$

Prawa strona RN $f(x)$	Projekt RSRN $\varphi(x)$
ae^{kx}	Ae^{kx}
$a\sin\omega x+b\cos\omega x$	$A\sin\omega x+B\cos\omega x$
$a,\ a+bx,\ a+bx+cx^2, \ldots$	$A,\ A+Bx,\ A+Bx+Cx^2, \ldots$
$e^{kx}(a\sin\omega x+b\cos\omega x)$	$e^{kx}(A\sin\omega x+B\cos\omega x)$
$(a+bx)e^{kx}$	$(A+Bx)e^{kx}$
$(a+bx)\sin\omega x+(c+dx)\cos\omega x$	$(A+Bx)\sin\omega x+(C+Dx)\cos\omega x$
a, b, c, d, k, ω — stałe znane, występujące w prawej stronie RN	A, B, C, D — stałe nieznane, występujące w projekcie RSRN

15.28. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

a) $y'+5y=0$ b) $y'+\frac{5}{x}y=0$ c) $y'-\frac{5}{x}y=0$

15.29. Korzystając z wyników poprzedniego zadania i stosując metodę uzmiennienia stałej, wyznaczyć rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego

a) $y'+5y=\frac{1}{e^{5x}+1}$ b) $y'+\frac{5}{x}y=\frac{2}{x^4}$ c) $y'-\frac{5}{x}y=x^5$

d) $y'+5y=\frac{25x}{(1+5x)^2}$ e) $y'+\frac{5}{x}y=\frac{1}{x^6}$ f) $y'-\frac{5}{x}y=x^4$

15.30. Stosując metodę przewidywania, wyznaczyć rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego

a) $y'+5y=4e^{-3x}$ b) $y'+5y=7e^{-5x}$
c) $y'+5y=10\sin 5x$ d) $y'+y=x^2$
e) $y'+y=x^2e^x$ f) $y'-y=x^2e^x$
g) $y'+y=e^{2x}\sin 3x$ h) $y'+3y=4xe^x$
i) $y'-y=2x\cos x$ j) $y'+2y=169x^2\sin 3x$
k) $y'+4y=3+6e^{2x}-x\sin 3x$

15.31. Korzystając z wyników poprzednich trzech zadań, wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego

a) $y'+5y=\frac{1}{e^{5x}+1}$ b) $y'+\frac{5}{x}y=\frac{2}{x^4}$ c) $y'-\frac{5}{x}y=x^4$
d) $y'+5y=4e^{-3x}$ e) $y'+5y=7e^{-5x}$ f) $y'+5y=10\sin 5x$

15.32. Stosując metodę przewidywania, rozwiązać równanie

a) $y'+3y=6x$ b) $y'-2y=x^3+x+1$
c) $y'+5y=e^{2x}$ d) $y'-3y=e^{3x}$
e) $y'+y=\sin x$ f) $y'-4y=-16x+17\cos x$
g) $y'-2y=e^{2x}$ h) $y'+y=x+6e^x$
i) $y'+y=e^x+e^{-x}$

15.33. Stosując metodę uzmiennienia stałej, rozwiązać równanie

a) $y'+y\cos x=\sin x\cos x$ b) $y'+\frac{1}{x}y=8$

c) $y'-\frac{1}{x}y=x$ d) $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}$

e) $y'-y\,\mathrm{ctg}\,x=\sin x$ f) $y'-\frac{2}{x}y=e^{-1/x}$

15.34. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y'+2y=2x-1$ b) $y'-y=3-x$
c) $y'-y=-x^2+2x-3$ d) $y'+3y=3x^2+14x+4$
e) $y'+y=x^3$ f) $y'+3y=3x^2(x+1)$
g) $y'-3y=2e^x$ h) $y'+3y=9x+e^{2x}$
i) $y'+y=2\cos x$ j) $y'+5y=26\sin x$
k) $y'+y=5e^x\sin x$

15.35. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y'+y=e^x\sin x$ b) $y'-y=e^x$

c) $y'-\frac{2}{x}y=x^2+1$ d) $y'+2y=5\sin x+4\cos 2x$

e) $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=x+\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{tg}\,x$ f) $y'+3y=9x+4e^x+10\sin x$

g) $y'+2xy=2x$ h) $y'+\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{3}{x^2+1}$

i) $y'-2y=8\sin 2x$

15.36. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y'-y=4x^2e^{3x}$ b) $y'-y\operatorname{ctg}x=1-x\operatorname{ctg}x$

c) $y'+2y=(x+3)e^{2x}$ d) $y'+y=e^x\cos 2x$

e) $y'-4y=e^x(\cos x-3\sin x)$ f) $y'-y=2e^{-x}$

g) $y'+y=x^2e^{-x}$ h) $y'-\dfrac{1}{x\ln x}y=\dfrac{1}{\ln x}-1$

i) $y'+y=x+e^{-x}$ j) $y'+y=x/(1+x)^2$

k) $y'-y=e^x-\sin x$ l) $y'+2xy=2x^3$

15.37. Rozwiązać równanie różniczkowe z warunkiem początkowym

a) $y'-y=2x\sin x,\ \ y(0)=1$

b) $y'-2xy=-x^3+x,\ \ y(0)=0$

c) $y'-\dfrac{2}{x}y=x+1,\ \ y(1)=-1/2$

d) $y'+y\operatorname{tg}x=1/\cos x,\ \ y(0)=a$

Równania Bernoulliego, Riccatiego, Clairauta i Lagrange'a

Równanie Bernoulliego

$$y'+p(x)y=f(x)y^r \tag{28}$$

($r\in\mathscr{R}$, $0\neq r\neq 1$; p, f ciągłe w przedziale X) rozwiązujemy, dzieląc to równanie przez y^r i wprowadzając funkcję $u=1/y^{r-1}$, dla której otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe

$$u'+(1-r)p(x)u=(1-r)f(x) \tag{29}$$

Nadto, jeśli $r>0$, to istnieje rozwiązanie zerowe $y=0$ dla $x\in X$.

Równanie Riccatiego

$$y'+p(x)y=f(x)y^2+g(x) \tag{30}$$

(p, f, g ciągłe w przedziale X) jest na ogół niecałkowalne elementarnie. Jeśli znamy rozwiązanie szczególne $y_1(x)$ tego równania, to przez podstawienie $y=y_1+1/u$ sprowadzamy je do równania liniowego

$$u'+[2f(x)y_1(x)-p(x)]u=-f(x) \tag{31}$$

Równanie Clairauta

$$y=xy'+g(y') \tag{32}$$

(g — funkcja klasy C^2 w przedziale Γ) ma rozwiązania liniowe

$$y=Cx+g(C),\quad C\in\Gamma, x\in\mathscr{R} \qquad \text{(RO)} \tag{33}$$

Aby znaleźć rozwiązanie $y(x)$ n i e l i n i o w e, zakładamy, że $y''\neq 0$, różniczkujemy równanie (32) względem x i po zredukowaniu otrzymujemy równanie

$$x=-g'(y') \tag{34}$$

Jeśli stąd wyznaczymy funkcję $y'=h(x)$, odwrotną do funkcji (34), i wstawimy ją do (32), to otrzymamy dodatkowe rozwiązanie nieliniowe

$$y=xh(x)+g[h(x)] \qquad \text{(RD)} \tag{35}$$

Krzywa całkowa (35) jest obwiednią rodziny prostych (33).

U w a g a. Równanie (32) nie ma postaci normalnej (1). Krzywe całkowe tego równania mogą się przecinać i mieć w punkcie przecięcia różne styczne. Uwaga ta odnosi się także do równania Lagrange'a (poniżej).

Równanie Lagrange'a

$$y=xf(y')+g(y') \tag{36}$$

(f, g — funkcje klasy C^2 w przedziale Γ) rozwiązujemy, oznaczając

$$y'=p \tag{37}$$

i uważając p za parametr, a obie zmienne x, y za funkcje parametru p.

Równanie (36) przepisujemy w postaci

$$y=xf(p)+g(p) \tag{38}$$

różniczkujemy względem x i otrzymujemy równanie

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p-f(p)}{xf'(p)+g'(p)} \tag{39}$$

Jeśli $p-f(p)=0$ wszędzie w Γ, to równanie (36) jest równaniem (32).

Jeśli $p-f(p)\neq 0$ w pewnym przedziale γ, $\gamma\subset\Gamma$, to równanie odwrotne

$$\frac{dx}{dp}-\frac{f'(p)}{p-f(p)}x=\frac{g'(p)}{p-f(p)} \tag{40}$$

jest liniowe względem funkcji $x=x(p)$. Po wyznaczeniu tej funkcji i podstawieniu jej do (38) otrzymujemy funkcję $y=y(p)$ i w ten sposób otrzymujemy rozwiązanie równania (36) w postaci parametrycznej. Jeśli z równań $x=x(p)$, $y=y(p)$ wyrugujemy p, to otrzymamy to rozwiązanie w postaci jawnej $y=y(x)$.

Jeśli $p-f(p)=0$ dla pewnego $p_0\in\Gamma$, to podstawiając w (38) $p=p_0$, otrzymamy dla równania (36) rozwiązanie liniowe

$$y=xp_0+g(p_0) \tag{41}$$

15.38. Rozwiązać równanie różniczkowe Bernoulliego

a) $y'+xy=xy^3$ b) $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2y^2}$

c) $y'-2y=2e^x\sqrt{y}$ d) $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\ln x}{x}y^2$

e) $y'-\frac{1}{3x}y=y^4\ln x$

15.39. Rozwiązać równanie różniczkowe Riccatiego, mając dane rozwiązanie szczególne $y_1(x)$ tego równania

a) $y'+y=e^{-x}y^2+e^x,\quad y_1=e^x$

b) $y'-\frac{1}{x}y=y^2+\frac{1}{x^2},\quad y_1=-\frac{1}{x}$

c) $y'=-y^2+\frac{2}{x^2},\quad y_1=-\frac{1}{x}$

d) $y'+xy=(x-1)y^2+1,\quad y_1=1$

e) $y'+y=\frac{1}{x}y^2+1,\quad y_1=x$

15.40. Rozwiązać równanie różniczkowe Clairauta

a) $y=xy'-y'^2$ b) $y=xy'-2\sqrt{y'}$

c) $y=xy'+y'(1-\ln y')$ d) $y=xy'-1/y'$

e) $y=xy'+\sqrt{1+y'}$ f) $y=xy'+\sqrt{1+y'^2}$

g) $y=xy'+\sqrt{1-y'^2}$ h) $y=xy'+\sqrt{1-y'^2}-y'\arccos y'$

15.41. Rozwiązać równanie różniczkowe Lagrange'a

a) $y=x+y'(y'-2)$ b) $y=xy'^2+y'^2$

c) $y=x+\ln y'$ d) $y=x(1+y')+y'^2$

Równanie różniczkowe rzędu 2

$$y''=f(x,y,y') \tag{42}$$

Zbiorem określoności równania (42) nazywamy zbiór Z trójek liczb x, y, y', dla których funkcja f traktowana jako funkcja trzech zmiennych niezależnych, jest określona.

Rozwiązaniem równania (42) nazywamy każdą funkcję $y=y(x)$, która wraz ze swymi pochodnymi $y'(x)$ i $y''(x)$ spełnia to równanie w pewnym przedziale.

Warunkiem początkowym (WP) dla równania (42) nazywamy wskazanie trzech liczb x_0, y_0, y_0', zwanych *wartościami początkowymi*, i żądanie, aby pewne rozwiązanie tego równania spełniało równości

$$y(x_0)=y_0,\qquad y'(x_0)=y_0' \qquad \text{(WP)} \tag{43}$$

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań. Jeśli funkcja f występująca w równaniu (42) oraz jej pochodne cząstkowe względem y i y' są ciągłe w pewnym obszarze D i trójka wartości początkowych x_0, y_0, y_0' należy do D, to w pewnym otoczeniu argumentu x_0 istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $y(x)$ spełniające warunek (43).

Rozwiązaniem ogólnym (RO) równania (42) nazywamy wyrażenie

$$y=\Phi(x,A,B) \qquad \text{(RO)} \tag{44}$$

które dla każdej pary wartości A, B należących do pewnych przedziałów jest rozwiązaniem równania (42) i które zależy od A i B w sposób *istotny*, tj. taki, że z układu równań

$$\Phi(x,A,B)=y,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,A,B)=y' \tag{45}$$

można wyznaczyć A i B jako funkcje zmiennych x, y, y'.

Wyznaczenie RSsWP jeśli RO i WP są dane. Wartości początkowe x_0, y_0, y_0' wstawiamy do równań (45) i obliczamy A, B. Znalezione w ten sposób A, B wstawiamy do (44) i otrzymujemy żądane RSsWP.

Warunkiem brzegowym dla równania (42) nazywamy wskazanie dwóch punktów (x_1,y_1) i (x_2,y_2), $x_1\neq x_2$, i żądanie, aby krzywa całkowa tego równania przechodziła przez te dwa punkty.

15.42. Dane jest równanie różniczkowe

$$y''=1-2x+2y-y'$$

Wykazać, że każde z wyrażeń

$$y = x + Ae^x, \qquad y = x + Be^{-2x},$$
$$y = x + ABe^x, \qquad y = x + Ae^x + Be^{-2x}$$

jest rozwiązaniem danego równania dla dowolnych A, B, ale tylko ostatnie z nich jest rozwiązaniem ogólnym tego równania. Korzystając z tego rozwiązania ogólnego, wyznaczyć

a) RS spełniające warunek początkowy $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$;

b) RS spełniające warunek brzegowy $y(0) = 1$, $y(1) = 2$.

Równania rzędu 2 sprowadzalne do równań rzędu 1

Równanie $y'' = f(x)$ rozwiązujemy, wykonując dwukrotne całkowanie.

Równanie, w którym y nie występuje

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{46}$$

rozwiązujemy, podstawiając $y' = u(x)$, $y'' = u'(x)$.

Równanie, w którym x nie występuje

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{47}$$

rozwiązujemy, podstawiając $y' = u(y)$, $y'' = u'u$.

Równanie jednorodne względem y, y', y'', tj. równanie

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{48}$$

w którym wszystkie składniki lewej strony są tego samego stopnia względem zmiennych y, y', y'' (np. równanie $yy'' - y'^2 - 6xy^2 = 0$) rozwiązujemy, podstawiając $y = e^{z(x)}$. Następnie upraszczamy przez $e^{z(x)}$ oraz podstawiamy $z' = u(x)$. W ten sposób otrzymujemy rozwiązania dodatnie. Aby otrzymać rozwiązania ujemne, podstawiamy $y = -e^{z(x)}$.

15.43. Rozwiązać równanie różniczkowe

a) $y'' = 12x^2$ b) $y'' = e^x$ c) $y'' = 1/\cos^2 x$ d) $y'' = 1/x^2$

15.44. Rozwiązać równanie różniczkowe z warunkiem początkowym

a) $y'' = 6x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

b) $y'' = \sin x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

c) $y'' = 1/x$; $y(1) = 3$, $y'(1) = -1$

d) $y'' = \sqrt{x}$; $y(1) = 19/15$, $y'(1) = 5/3$

15.45. Rozwiązać równanie różniczkowe z warunkiem brzegowym

a) $y'' = \sqrt{1/x}$; $y(1) = -2/3$, $y(3) = 4\sqrt{3}$

b) $y'' = 0$; $y(1) = -2$, $y(3) = 12$

c) $y'' = -1/x$; $y(-1) = -1$, $y(-e) = 0$

d) $y'' = \operatorname{sh} x$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$

Uwaga. W poniższych zadaniach należy znaleźć RO (lub CO) oraz RD (o ile istnieje). Jeśli równanie nie jest dane w postaci normalnej, należy zwrócić uwagę na to, w jakim zbiorze dane równanie jest określone, a w jakim zbiorze jest ono sprowadzalne do postaci normalnej.

15.46. Rozwiązać poniższe równania, uważając je za równania typu $F(x, y', y'') = 0$

a) $y'' = y'$ b) $y'' = y'^2$ c) $xy'' = y'$

d) $xy'' = -y'$ e) $xy'' = -2y'$ f) $y'' + y' = 1$

g) $2y'y'' = 1$ h) $y'' = \sqrt{1 - y'^2}$

15.47. Rozwiązać poniższe równania, uważając je za równania typu $F(y, y', y'') = 0$

a) $y'' = y'$ b) $y'' = y'^2$ c) $yy'' = y'^2$

d) $(y-1)y'' = 2y'^2$ e) $y'' = \sqrt{1 - y'^2}$ f) $2yy'' = 1 + y'^2$

15.48. Rozwiązać równanie różniczkowe, korzystając z tego, że jest to równanie jednorodne względem zmiennych y, y', y''

a) $yy'' = 6xy^2 + y'^2$ b) $xyy'' = yy' + xy'^2$

c) $x^2yy'' = (y - xy')^2$ d) $2xyy'' = 2xy'^2 - yy'$

e) $2x^2yy'' = 2x^2y'^2 - y^2$

Zastosowanie wzorów na różniczkowanie

Przy rozwiązywaniu równań różniczkowych korzystamy ze wzorów

$$yy'' + y'^2 = \frac{d}{dx}(yy'), \qquad yy' = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(y^2) \tag{49}$$

$$\frac{yy''-y'^2}{y^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right),\qquad \frac{y'}{y}=\frac{d}{dx}\ln|y| \tag{50}$$

$$2y'y''=\frac{d}{dx}(y'^2),\qquad \frac{y''}{y'}=\frac{d}{dx}\ln|y'| \tag{51}$$

15.49. Rozwiązać poniższe równania różniczkowe, korzystając ze wzorów (49)—(51)

a) $yy''+y'^2=3x$ b) $x(yy''+y'^2)=3yy'$

c) $yy''-y'^2=xy^2$ d) $x(yy''+y'^2)+yy'=1$

e) $2y'y''=1$ f) $\dfrac{y''}{y'}=\dfrac{1}{x}$

Równanie różniczkowe liniowe rzędu 2

Rozróżniamy dwie odmiany tego równania:

• *równanie jednorodne* (RJ)

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad \text{(RJ)} \tag{52}$$

• *równanie niejednorodne* (RN)

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad \text{(RN)} \tag{53}$$

Zakładamy, że funkcje $p(x)$, $q(x)$ oraz $f(x)$ są ciągłe w pewnym przedziale X i że $f(x)\neq 0$ dla pewnych $x\in X$.

Istnienie rozwiązań. Każde z tych dwóch równań ma nieskończenie wiele rozwiązań i każde z tych rozwiązań jest określone w całym przedziale X.

Równanie jednorodne ma rozwiązanie *zerowe* (równe 0 wszędzie w X) oraz rozwiązania *niezerowe* (różne od 0 wszędzie w X lub w pewnych częściach przedziału X).

Jednoznaczność rozwiązań. Dla dowolnych wartości początkowych

$$x_0,\, y_0,\, y'_0$$

gdzie $x_0\in X$, y_0, $y'_0\in\mathcal{R}$, każde z dwóch równań (52) i (53) ma dokładnie jedno rozwiązanie $y(x)$, spełniające warunek początkowy

$$y(x_0)=y_0,\qquad y'(x_0)=y'_0$$

Jeśli równanie jednorodne (52) ma dwa rozwiązania

$$y_1(x),\qquad y_2(x)$$

takie, że ich stosunek nie jest stały lub, wyrażając to ogólniej, takie że ich *wrońskian*

$$W(x)=W[y_1(x),y_2(x)]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y'_1(x) & y'_2(x)\end{vmatrix}$$

jest różny od zera (jeśli $W(x)\neq 0$ w jednym punkcie przedziału X, to $W(x)\neq 0$ w całym X), to kombinacja liniowa tych rozwiązań o dowolnych współczynnikach C_1, C_2

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \qquad \text{(RORJ)} \tag{54}$$

jest *rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego*, obejmującym wszystkie rozwiązania tego równania, a parę funkcji $y_1(x)$, $y_2(x)$ nazywamy *układem fundamentalnym rozwiązań* tego równania.

U w a g a. Jeśli jest znane niezerowe rozwiązanie $y_1(x)$ równania jednorodnego, to drugie rozwiązanie $y_2(x)$ tego równania, spełniające wraz z $y_1(x)$ warunek $W[y_1(x),y_2(x)]\neq 0$, jest dane wzorem

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-P(x)}}{y_1^2(x)}\,dx \tag{55}$$

w którym P jest funkcją pierwotną funkcji p, a stałą całkowania pominięto.

Równanie jednorodne o współczynnikach stałych

$$y''+py'+qy=0 \tag{56}$$

rozwiązujemy za pomocą równania charakterystycznego o niewiadomej r

$$r^2+pr+q=0 \tag{57}$$

którego pierwiastki, zwane *pierwiastkami charakterystycznymi*, są dane wzorem

$$r=-p/2\pm\sqrt{\Delta}/2,\quad \text{gdzie}\quad \Delta=p^2-4q \tag{58}$$

Jeśli $\Delta>0$, to istnieją dwa pierwiastki charakterystyczne rzeczywiste r_1, r_2. Równanie (56) ma dwa rozwiązania szczególne

$$e^{r_1x},\qquad e^{r_2x}$$

i rozwiązanie ogólne

$$C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x} \tag{59}$$

Jeśli $\Delta=0$, to istnieje jeden (dwukrotny) pierwiastek charakterystyczny rzeczywisty $r=-p/2$. Równanie (56) ma dwa rozwiązania szczególne

$$e^{rx},\qquad xe^{rx}$$

i rozwiązanie ogólne

$$(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx} \tag{60}$$

Jeśli $\Delta < 0$, to istnieje pierwiastek charakterystyczny zespolony

$$r = a+ib, \quad \text{gdzie} \quad a = -p/2, \quad b = \sqrt{|\Delta|}/2, \quad i = \sqrt{-1} \tag{61}$$

Równanie (56) ma dwa rozwiązania szczególne

$$\mathrm{e}^{ax}\cos bx, \qquad \mathrm{e}^{ax}\sin bx$$

i rozwiązanie ogólne

$$\mathrm{e}^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx) \tag{62}$$

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (RORN) jest dane wzorem

$$\text{RORN} = \text{RSRN}+\text{RORJ} \tag{63}$$

gdzie RSRN jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego.

Wyznaczenie RSRN metodą uzmiennienia stałych. Jeśli para funkcji $y_1(x)$, $y_2(x)$ jest układem fundamentalnym rozwiązań RJ (52), to RSRN (53) otrzymujemy ze wzoru

$$y = y_1(x)\int\frac{-y_2(x)}{W(x)}f(x)dx+y_2(x)\int\frac{y_1(x)}{W(x)}f(x)dx \tag{64}$$

w którym W jest wrońskianem, a stałe całkowania pominięto.

Wyznaczenie RSRN metodą przewidywania. Jeśli współczynniki p, q są stałe, to postępujemy podobnie jak na s. 51.

15.50. Stosując metodę określoną równościami (56)—(62), rozwiązać równanie

a) $y''-2y-3y=0$ b) $y''-4y'+4y=0$ c) $y''-2y'+5y=0$

15.51. Stosując metodę (56)—(62), rozwiązać równanie

a) $y''-5y'+6y=0$ b) $y''+2y'+y=0$ c) $y''-2y'+2y=0$
d) $y''+4y=0$ e) $y''+y'+y=0$ f) $y''-3y'=0$

15.52. Wyznaczyć RSRN metodą przewidywania i korzystając ze wzoru (63), rozwiązać równanie

a) $y''-7y'+6y=6x+5$
b) $y''-3y'+2y=4\mathrm{e}^{3x}$
c) $5y''-6y'+5y=6\sin x-12\cos x$

d) $y''-6y'+8y=-3\mathrm{e}^{2x}(\sin 3x+5\cos 3x)$
e) $y''+y=x^3$
f) $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x$
g) $y''+y'+5y=5\sin 2x$
h) $y''+4y=4x\sin 2x$
i) $y''-2y'+y=6x\mathrm{e}^x$

Wskazówka. W zadaniach f), h), i) projektować RSRN w postaci $x\varphi(x)$ lub $x^2\varphi(x)$ (zob. s. 51).

j) $y''-10y'+25y=9\mathrm{e}^{2x}+25x^2-20x+27$
k) $y''-6y'+13y=8\mathrm{e}^x+20\mathrm{e}^{-x}$
l) $y''+y'+y=x+1+\cos x$
m) $2y''-y'+2y=-3\cos x-16\sin 2x-3\cos 3x-16\sin 3x$
n) $y''+6y'+9y=(8x+5)\mathrm{e}^x+(6x^2+19x+8)\mathrm{e}^{2x}$

15.53. Wyznaczyć RSRN metodą uzmiennienia stałych i korzystając ze wzoru (63), rozwiązać równanie

a) $y''+y=1/\sin x$ b) $y''-3y'+2y=\cos\mathrm{e}^{-x}$
c) $y''-2y'+y=-\mathrm{e}^x\ln x$ d) $y''-2y'+y=\mathrm{e}^x/x^2+1$

15.54. Rozwiązać równanie różniczkowe z warunkiem początkowym

a) $y''+4y'-5y=1$; $y(0)=\frac{4}{5}$, $y'(0)=1$
b) $y''-4y'+4y=3\mathrm{e}^{2x}$; $y(0)=1$, $y'(0)=3$
c) $y''+4y=\sin x$; $y(\pi/2)=\frac{4}{3}$, $y'(\pi/2)=-2$
d) $y''-5y'+6y=6+2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$; $y(0)=4$, $y'(0)=6$
e) $y''-2y'+2y=\mathrm{e}^x\cos x$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$
f) $y''+y=\mathrm{tg}\,x$; $y(0)=1$, $y'(0)=3$
g) $y''+2y'+y=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-x}$; $y(1)=0$, $y'(1)=0$

15.55. Rozwiązać równanie różniczkowe, mając dane rozwiązanie szczególne $y_1(x)$ i korzystając ze wzorów (54) i (55)

a) $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=0$, $y_1(x)=x\sin x$

b) $xy''+2y'-xy=0, \quad y_1(x)=\frac{1}{x}e^x, \quad x\neq 0$
c) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0, \quad y_1(x)=x$
d) $xy''-xy'-y=0, \quad y_1(x)=xe^x$

15.56. Korzystając z wyników poprzedniego zadania oraz ze wzorów (63) i (64), rozwiązać równanie
a) $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=x^3$
b) $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=2x^3e^x$
c) $xy''+2y'-xy=2-x^2$
d) $xy''+2y'-xy=2e^x$

Równanie Eulera

Równaniem Eulera nazywamy równanie

$$x^2y''+pxy'+qy=0, \qquad p,q \text{ — stałe}, \ x\neq 0 \tag{65}$$

Zakładamy, że $x>0$. Podstawiamy

$$y=x^r=e^{r\ln x} \tag{66}$$

i otrzymujemy dla r równanie liczbowe

$$r^2+(p-1)r+q=0 \tag{67}$$

którego pierwiastki są dane wzorem

$$r=(1-p)/2\pm\sqrt{\Delta}/2, \quad \Delta=(p-1)^2-4q \tag{68}$$

Rozwiązanie ogólne równania (65) dla $x>0$ ma postać zależną od znaku Δ:

- jeśli $\Delta>0$, to $y=C_1x^{r_1}+C_2x^{r_2}$ (69)
- jeśli $\Delta=0$, to $y=(C_1+C_2\ln x)x^{r_0}$ (70)
- jeśli $\Delta<0$, to $y=e^{ax}[C_1\cos(b\ln x)+C_2\sin(b\ln x)]$ (71)

przy czym r_1, r_2, względnie r_0, są pierwiastkami równania (67), zaś $a=(1-p)/2$, $b=\sqrt{|\Delta|}/2$.

Jeśli we wzorach (69), (70), (71) zastąpimy x przez $|x|$, to otrzymamy rozwiązanie ogólne równania (65) dla $x<0$.

15.57. Rozwiązać równanie Eulera dla $x>0$
a) $x^2y''+xy'-y=0$ **b)** $x^2y''+5xy'+4y=0$

c) $x^2y''+xy'+y=0$ **d)** $x^2y''-5xy'+9y=0$
e) $x^2y''-xy'+2y=0$ **f)** $x^2y''-2xy'+2y=0$

15.58. Korzystając z wyników poprzedniego zadania, rozwiązać równanie niejednorodne
a) $x^2y''+xy'-y=10x^3$ **b)** $x^2y''+5xy'+4y=\frac{1}{x}$
c) $x^2y''+xy'+y=\ln x$ **d)** $x^2y''-5xy+9y=-x^2$
e) $x^2y''-xy'+2y=\frac{5}{4}\sqrt{x}$ **f)** $x^2y''-2xy'+2y=2(x^3+1)$

Równanie różniczkowe liniowe rzędu n

Rozróżniamy dwie odmiany tego równania:
- *równanie jednorodne* (RJ)

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \qquad \text{(RJ)} \tag{72}$$

- *równanie niejednorodne* (RN)

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x) \qquad \text{(RN)} \tag{73}$$

Zakładamy, że funkcje $p_1(x),\ldots,p_n(x)$ oraz $f(x)$ są ciągłe w pewnym przedziale X i że $f(x)\neq 0$ dla pewnych $x\in X$.

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań. Dla dowolnych *wartości początkowych*

$$x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)} \tag{74}$$

gdzie $x_0\in X$, $y_0,\ldots,y_0^{(n-1)}\in\mathcal{R}$, każde z równań (72) i (73) ma dokładnie jedno rozwiązanie $y(x)$ spełniające *warunek początkowy*

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0', \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \qquad \text{(WP)} \tag{75}$$

Jeśli równanie jednorodne (72) ma n rozwiązań

$$y_1(x),\ldots,y_n(x)$$

takich, że ich *wrońskian*

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x), \ldots\ldots, y_n(x) \\ y_1'(x), \ldots\ldots, y_n'(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}(x), \ldots, y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix} \tag{76}$$

jest różny od 0, to kombinacja liniowa tych rozwiązań o dowolnych współczynnikach $C_1, \ldots, C_n$

$$y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) \quad \text{(RORJ)} \tag{77}$$

jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego, obejmującym wszystkie rozwiązania tego równania, a ciąg funkcji $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ nazywamy *układem fundamentalnym rozwiązań* tego równania.

Równanie jednorodne o współczynnikach stałych

$$y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{78}$$

rozwiązujemy za pomocą *równania charakterystycznego* o niewiadomej r

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \ldots + p_{n-1} r + p_n = 0 \tag{79}$$

Jeśli r jest pierwiastkiem rzeczywistym równania (79), to

$$e^{rx}$$

jest rozwiązaniem równania (78), ale jeśli jest to pierwiastek k-krotny, to także

$$xe^{rx},\ x^2 e^{rx},\ \ldots,\ x^{k-1} e^{rx}$$

są rozwiązaniami równania (78).

Jeśli $r = a + ib$ jest pierwiastkiem zespolonym równania (79), to

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx$$

są rozwiązaniami równania (78), ale jeśli jest to pierwiastek k-krotny, to także iloczyny tych funkcji przez

$$x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{k-1}$$

są rozwiązaniami równania (78).

Uwzględniając wszystkie pierwiastki równania (79) i ich krotności, otrzymujemy układ fundamentalny i rozwiązanie ogólne równania (78) w postaci (77).

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (RORN) jest dane wzorem

$$\text{RORN} = \text{RSRN} + \text{RORJ} \tag{80}$$

gdzie RSRN jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego.

Jeśli współczynniki równania $p_1, \ldots, p_n$ są stałe, to RSRN wyznaczamy metodą przewidywania, podobnie jak na s. 51.

15.59. Rozwiązać równanie jednorodne

a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$
b) $y''' - y'' + y' - y = 0$

c) $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$
d) $y''' + 5y'' + 19y' - 25y = 0$
e) $y^{\mathrm{IV}} - 10y'' + 9y = 0$
f) $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' - y'' - 2y' = 0$
g) $y^{\mathrm{IV}} - 16y = 0$
h) $y^{\mathrm{V}} - 4y^{\mathrm{IV}} - 10y''' + 40y'' + 9y' - 36y = 0$
i) $y^{\mathrm{VI}} + 3y^{\mathrm{IV}} + 3y'' + y = 0$

15.60. Korzystając z wyników poprzedniego zadania, rozwiązać równanie niejednorodne

a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 12e^{2x}$
b) $y''' - y'' + y' - y = -x^3 + x^2 - x$
c) $y''' + y'' - 5y' + 3y = -6\cos x + 2\sin x + 6x - 10$
d) $y''' + 5y'' + 19y' - 25y = 32e^x$
e) $y^{\mathrm{IV}} - 10y'' + 9y = x^4$
f) $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' - y'' - 2y' = -10e^x \sin x$
g) $y^{\mathrm{IV}} - 16y = 130e^{-3x}$
h) $y^{\mathrm{V}} - 4y^{\mathrm{IV}} - 10y''' + 40y'' + 9y' - 36y = \cos x$
i) $y^{\mathrm{VI}} + 3y^{\mathrm{IV}} + 3y'' + y = 1 + \operatorname{sh} x$

15.61. Rozwiązać równanie jednorodne

a) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
b) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$
c) $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$
d) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$
e) $y^{\mathrm{IV}} - 13y'' + 36y = 0$
f) $y^{\mathrm{IV}} - 5y''' + 9y'' - 9y' + 6y = 0$
g) $y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + y = 0$
h) $y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 8y'' + 16y' + 16y = 0$

15.62. Rozwiązać równanie niejednorodne

a) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = -6x^3 + 33x^2 - 42x + 17$
b) $y''' - y'' - 5y' - 3y = \sin 2x - 18\cos 2x$
c) $y^{\mathrm{IV}} - y''' = -4e^x \cos x$
d) $y^{\mathrm{IV}} - y''' - y'' + y' = 4e^x$

e) $y''' + y'' + y' + y = x + 1 - 5e^{-2x}$
f) $y^{IV} - y = 4e^x + 15 \sin 2x$

15.63. Znaleźć rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy

a) $y^{IV} + 2y'' + y = \sin x;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1,\quad y''(0) = 4,$
$$y'''(0) = -\frac{7}{4}$$

b) $y^{IV} - 2y'' + y = x - \sin x;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = \frac{3}{4},\quad y''(0) = 3,$
$$y'''(0) = \frac{9}{4}$$

15.64. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, mając dane jedno rozwiązanie szczególne tego równania

a) $y''(1 + 2x^2) - 4xy' + 4y = 0,\quad y = x$
b) $y'' - (\operatorname{tg} x)y' + 2y = 0,\quad y = \sin x$

15.65. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego, mając dane jedno rozwiązanie szczególne odpowiedniego równania jednorodnego

a) $xy'' + 2y' - xy = e^x,\quad y = e^x/x$
b) $(3x + 2x^2)y'' - 6(1 + x)y' + 6y = 6,\quad y = x^3$

15.66. Napisać równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu 2, którego układ fundamentalny rozwiązań składa się z funkcji

a) x^2, x^3 b) e^x, $x^2 e^x$ c) $\cos^2 x$, $\sin^2 x$

W s k a z ó w k a. Zgodnie z (77) piszemy $C_1 x^2 + C_2 x^3 = y$. Różniczkujemy tę równość dwukrotnie i z otrzymanych trzech równań eliminujemy stałe C_1 i C_2.

15.67. Napisać równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu 3, którego układ fundamentalny rozwiązań składa się z funkcji

a) e^x, e^{-x}, xe^x b) e^x, e^{-x}, x

15.68. Napisać równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu 4, którego układ fundamentalny rozwiązań składa się z funkcji

a) 1, x, $\sin x$, $\cos x$ b) 1, x, x^2, x^3

Zadania o treści fizycznej

15.69. **Stygnięcie.** Ciało o temperaturze początkowej 100°C zostało w chwili $t = 0$ umieszczone w otoczeniu o temperaturze stałej równej 10°C i w ciągu 5 minut ostygło o 40°C. Przyjmując, że prędkość stygnięcia ciała jest proporcjonalna do różnicy temperatur ciała i otoczenia, obliczyć po ilu minutach ciało ostygnie o następne 40°C.

W s k a z ó w k a. Oznaczamy: $u = u(t)$ — temperatura ciała w chwili t, $\frac{du}{dt}$ — prędkość wzrostu temperatury, $-\frac{du}{dt}$ — prędkość stygnięcia; $-\frac{du}{dt} = k(u - 10)$ — równanie procesu stygnięcia, w którym współczynnik $k > 0$ jest nieznany.

15.70. **Rozładowanie kondensatora przez rezystor.** W obwodzie są: kondensator o pojemności C, rezystor o rezystancji R i wyłącznik. Na okładce kondensatora znajduje się pewien ładunek. W ciągu sekundy od chwili zamknięcia obwodu ładunek na okładce zmniejszył się o połowę. Obliczyć R, uważając C za wiadomą.

W s k a z ó w k a. Oznaczamy: $Q = Q(t)$ — ładunek na okładce w chwili t; równanie procesu rozładowania $\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}$; warunki brzegowe $Q(0) = a$, $Q(1) = a/2$.

15.71. **Opór cieczy.** Kula o masie m w chwili $t = 0$ wpada z prędkością v_0 do wody i porusza się w niej dzięki bezwładności z prędkością $v = v(t)$ malejącą wskutek oporu H wody. Zakładając, że ciężar kuli jest kompensowany siłą wyporu wody i że opór wody jest dany wzorem:

a) $H = k\sqrt{v}$ b) $H = kv$ c) $H = kv^2$

gdzie stałe dodatnie k, m, v_0 są wiadome, obliczyć czas T i drogę S hamowania kuli od prędkości v_0 do prędkości 0.

Wskazówka. Równanie przebiegu zjawiska:

$$m\frac{dv}{dt} = -H,$$

warunek początkowy $v(0) = v_0$. Należy wyznaczyć:
1° funkcję $t = t(v)$ odwrotną do funkcji $v = v(t)$;
2° czas T hamowania, przyjmując w $t(v)$ wartość $v = 0$ lub $v \to 0$;
3° funkcję $v = v(t)$;
4° drogę $s = s(t)$ przebytą do chwili t; jest to funkcja pierwotna prędkości $v = v(t)$, spełniająca warunek $s(0) = 0$;
5° drogę S hamowania, przyjmując w $s(t)$ wartość $t = T$ lub $t \to T$.

15.72. Pionowe wznoszenie się pocisku. Pocisk o masie m wystrzelony pionowo w górę w chwili $t = 0$ z prędkością v_0 wznosi się z prędkością $v = v(t)$, która wskutek działania siły ciężkości $F = mg$ i oporu powietrza $H = kv^2$, $k > 0$, maleje i w pewnej chwili T na wysokości S staje się zerem. Obliczyć czas T i wysokość S wznoszenia się pocisku, uważając liczby m, v_0, g, k za wiadome. Obliczyć $\lim_{v_0 \to \infty} T$ i $\lim_{v_0 \to \infty} S$.

Wskazówka. Prędkość $v = v(t)$ wznoszenia się pocisku jest rozwiązaniem równania $m\frac{dv}{dt} = -F - H$ z warunkiem $v(0) = v_0$. Należy wyznaczyć niewiadome 1°—5° wg wskazówki do poprzedniego zadania.

15.73. Pionowe opadanie pocisku. Pocisk o masie m znajdujący się w powietrzu na wysokości S nad ziemią i mający prędkość 0, zaczyna w chwili $t = 0$ pod działaniem siły ciężkości $F = mg$ spadać z prędkością $v = v(t)$, pokonując przy tym opór powietrza

$H = kv^2$, $k = \text{const} > 0$. Obliczyć czas X spadania i prędkość Y upadku pocisku na ziemię, uważając liczby m, S, g, k za wiadome. Obliczyć $\lim_{S \to \infty} X$ i $\lim_{S \to \infty} Y$.

Wskazówka. Prędkość $v = v(t)$ spadania pocisku jest rozwiązaniem równania $m\frac{dv}{dt} = F - H$ z warunkiem $v(0) = 0$. Droga $z = z(t)$ spadania pocisku od chwili 0 do chwili t jest funkcją pierwotną prędkości, spełniającą warunek $z(0) = 0$. Jeśli we wzorze na drogę zastąpimy z przez S oraz t przez X, to otrzymamy równanie względem X. Jeśli we wzorze na prędkość zastąpimy t przez X oraz v przez Y, to otrzymamy wzór dla Y.

15.74. Przebicie ściany przez pocisk. Pocisk o masie m i prędkości v_0 uderza w chwili $t = 0$ w ścianę, przechodzi przez nią po drodze długości d z prędkością $v = v(t)$ malejącą wskutek oporu H ściany i w chwili $t = t_1$ wylatuje z prędkością v_1. Przyjmując, że opór H jest proporcjonalny do kwadratu prędkości pocisku i uważając liczby m, d, v_0, v_1 za wiadome, obliczyć czas t_1 przejścia pocisku przez ścianę.

Wskazówka. Przyjmujemy, że $H = kv^2$, $k > 0$, przy czym k jest liczbą niewiadomą. Prędkość $v = v(t)$ jest rozwiązaniem równania $m\frac{dv}{dt} = -kv^2$ z warunkiem $v(0) = v_0$. Droga $s = s(t)$ pocisku w ścianie od chwili 0 do chwili t jest funkcją pierwotną prędkości spełniającą warunek $s(0) = 0$. Wyznaczamy wzory na prędkość i drogę, a następnie podstawiamy w nich $t = t_1$, $v = v_1$, $s = d$ oraz obliczamy t_1 i k.

Ruch punktu materialnego po prostej

Ruch punktu materialnego M po osi Ox określamy za pomocą funkcji, która każdej chwili t pewnego przedziału czasowego przyporządkowuje położenie x punktu M na osi Ox. Funkcja ta może być dana jawnie

$$x = x(t) \quad \text{(pozycja)}$$

albo w sposób uwikłany: $f(x, t) = 0$ lub $t = t(x)$. Równanie określające tę funkcję nazywamy *liczbowym równaniem ruchu*. Pochodna tej funkcji, oznaczana symbolami

$$\frac{dx}{dt} \quad \text{lub} \quad \dot{x} = \dot{x}(t) \quad \text{(prędkość)}$$

jest miarą na osi Ox prędkości punktu M w chwili t. Jej moduł $|\dot{x}|$ jest prędkością w zwykłym sensie, a znak sgn $\dot{x}$ zależy od kierunku prędkości. Druga pochodna oznaczana symbolami

$$\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{lub} \quad \ddot{x} = \ddot{x}(t) \quad \text{(przyspieszenie)}$$

jest miarą na osi Ox przyspieszenia punktu M w chwili t.

Jeśli $\ddot{x} > 0$, to $\dot{x}$ rośnie i jeśli przy tym $\dot{x} > 0$, to także $|\dot{x}|$ rośnie i ruch staje się szybszy. Jeśli jednak $\ddot{x} > 0$, ale $\dot{x} < 0$, to $|\dot{x}|$ maleje i ruch staje się wolniejszy. Podobnie jest w przypadku $\ddot{x} < 0$.

Jeśli punkt materialny M o masie m porusza się pod działaniem siły, której miarą na osi Ox jest liczba F (znak liczby F zależy od kierunku siły), to zachodzi równość

$$m\ddot{x} = F$$

którą nazywamy *różniczkowym równaniem ruchu*. Rozwiązując to równanie, otrzymamy liczbowe równanie ruchu.

15.75. Punkt materialny o masie $m = 1$ porusza się po osi Ox pod działaniem siły

a) $F = x$ **b)** $F = -x$ **c)** $F = 1/x^3$ **d)** $F = -1/x^3$

Napisać różniczkowe równanie ruchu i rozwiązać je z warunkiem początkowym: $x = 1$, $\dot{x} = 0$ dla $t = 0$.

W s k a z ó w k a. Różniczkowe równanie ruchu jest równaniem typu (47) (nie zawiera zmiennej t). Podstawiamy $\dot{x} = y(x)$, $\ddot{x} = y'y$.

15.76. Punkt materialny M o masie m porusza się po osi Ox pod działaniem siły $S = -kx$ (przyciągającej punkt M do punktu początkowego osi) oraz siły $H = -h\dot{x}$ (hamującej ruch). Napisać równanie różniczkowe ruchu i rozwiązać je z warunkiem początkowym: $x = a$, $\dot{x} = 0$ dla $t = 0$, przyjmując $m = k = 1$ oraz

a) $h = 0$ **b)** $h = 1{,}2$ **c)** $h = 1{,}6$ **d)** $h = 2$ **e)** $h = 2{,}5$

15.77. Przyciąganie grawitacyjne. Punkt materialny M o masie m poruszający się po dodatniej półosi Ox jest przyciągany przez nieruchomy punkt materialny Z o masie z, znajdujący się w punkcie początkowym osi Ox siłą $F = Gzm/r^2$, gdzie $r = ZM = |x|$, G — stała grawitacyjna. Różniczkowe równanie ruchu punktu M ma postać

$$\ddot{x} = -c/x^2, \quad x > 0,\ c = Gz > 0$$

a) Przyjmując, że w chwili $t = 0$ punkt M ma pozycję $x = a > 0$ i prędkość $\dot{x} = 0$, wyznaczyć liczbowe równanie ruchu punktu M i obliczyć, w jakim czasie i z jaką prędkością końcową punkt M przebędzie: pierwszą ćwierć, pierwszą połowę, trzy czwarte i całość drogi od pozycji początkowej $x = a$ do pozycji $x = 0$.

b) Przyjmując, że w chwili $t = 0$ punkt M ma pozycję $x = b > 0$ i prędkość $\dot{x} = p > 0$, zbadać ruch punktu M w zależności od p.

15.78. Odpychanie elektrostatyczne. Punkt materialny M o masie m i ładunku q, poruszający się po dodatniej półosi Ox, jest odpychany przez nieruchomy ładunek punktowy Q, znajdujący się w punkcie początkowym osi Ox, siłą $F = KQq/r^2$, gdzie $r = OM = |x|$, K — stała fizyczna. Różniczkowe równanie ruchu punktu M ma postać

$$\ddot{x} = c/x^2, \quad x > 0,\ c = KQq/m > 0$$

Wyznaczyć liczbowe równanie ruchu punktu M, przyjmując, że w chwili $t = 0$ punkt M ma

a) pozycję $x = a > 0$ i prędkość $\dot{x} = 0$;

b) pozycję $x = b > 0$ i prędkość $\dot{x} = -p < 0$.

Rozdział 16

Całka oznaczona

Całka oznaczona w przedziale

Całka oznaczona funkcji f w przedziale $\langle a; b\rangle$

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

jest liczbą, której istnienie i wartość są wyznaczone przez funkcję f i przedział $\langle a; b\rangle$ w sposób podany w definicji (*Zarys II*, s. 116), którą w skrócie zapisujemy wzorem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,\Delta x_j \tag{2}$$

gdzie: Δx_j jest długością *przedziału częściowego* (zwanego *elementem*), x_j jest argumentem należącym do elementu $\langle \Delta x_j\rangle$, λ jest *średnicą podziału* (tj. długością najdłuższego elementu), a suma $\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,\Delta x_j$ jest *sumą całkową* całki (1) dla danego podziału przedziału $\langle a; b\rangle$ i wyboru argumentów x_j.

Jeśli powyższa granica istnieje i jest skończona, niezależnie od wyboru przedziałów częściowych i argumentów w tych przedziałach, to mówimy, że całka (2) *istnieje*, oraz że funkcja f jest *całkowalna* w przedziale $\langle a; b\rangle$. W przeciwnym razie mówimy, że całka (2) *nie istnieje* oraz że funkcja f jest *niecałkowalna* w przedziale $\langle a; b\rangle$.

Warunki istnienia całki oznaczonej. Warunkiem koniecznym istnienia całki oznaczonej jest ograniczoność funkcji podcałkowej w przedziale całkowania. Oznacza to, że jeśli funkcja podcałkowa jest w przedziale całkowania nieograniczona, to całka nie istnieje.

Warunkiem wystarczającym istnienia całki oznaczonej jest każda z poniższych trzech własności funkcji podcałkowej:
1) ciągłość w domkniętym przedziale całkowania lub
2) monotoniczność w domkniętym przedziale całkowania lub
3) ograniczoność w przedziale całkowania i ciągłość w tym przedziale z wyjątkiem punktów nieciągłości, których jest albo skończenie wiele, albo dają się pokryć skończenie wielu przedziałami o łącznej długości dowolnie małej.

U w a g a. Jeśli funkcja jest w przedziale domkniętym ciągła lub monotoniczna, to jest w tym przedziale ograniczona (*Zarys I*, s. 240).

Sens geometryczny całki oznaczonej przedstawiono w *Zarysie II*, s. 117.

Obliczenie całki za pomocą sumy całkowej

Jeśli wiemy, że funkcja f jest w przedziale $\langle a; b\rangle$ całkowalna, to w celu obliczenia całki możemy obrać taki podział przedziału całkowania i takie argumenty, aby rachunek był łatwy. Niech części podziału będą równe

$$\Delta x_1 = \ldots = \Delta x_n = h = \frac{b-a}{n} = \lambda \tag{3}$$

Wówczas suma całkowa ma postać

$$h\,[f(x_1) + \ldots + f(x_n)] \tag{4}$$

a warunek $\lambda \to 0$ jest równoważny warunkowi $n \to \infty$.

Jeśli za argumenty przyjmiemy prawe końce przedziałów częściowych, to otrzymaną sumę nazwiemy *sumą prawą*, a jeśli lewe, to — *sumą lewą*.

Sumą trapezów nazywamy średnią arytmetyczną sumy prawej i sumy lewej. Jest ona na ogół lepszym przybliżeniem całki niż suma prawa i suma lewa.

Jeśli funkcja f jest rosnąca, to sumy: prawa i lewa są *sumami Darboux: górną i dolną* (*Zarys II*, s. 118).

16.1. Za pomocą sumy całkowej prawej obliczyć całkę

a) $\int_0^1 x\,dx$ b) $\int_0^1 x^2\,dx$ c) $\int_0^1 x^3\,dx$

W s k a z ó w k a. Skorzystać z równości:

a) $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$
b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = n(2n^2+3n+1)/6$
c) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = n^2(n+1)^2/4$

16.2. Za pomocą sumy całkowej obliczyć całkę

a) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ **b)** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$

W s k a z ó w k a. Za argumenty przyjąć środki przedziałów częściowych. Skorzystać z równości (zob. zad. 2.2 i 2.7 w *Zadaniach I*):

a) $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+...+\cos(2n-1)x = \dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$

b) $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+...+\sin(2n-1)x = \dfrac{1-\cos nx}{2\sin x}$

oraz z tego, że $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Całka oznaczona skierowana (całka od *a* do *b*)

Całka oznaczona skierowana jest uogólnieniem całki w przedziale $\langle a;\, b\rangle$ na przypadki: $a=b$ lub $a>b$ (*Zarys II*, s. 124). Uogólnienie to wyraża się równościami

$$\int\limits_a^a = 0, \qquad \int\limits_a^b = -\int\limits_b^a \tag{5}$$

Dla całki skierowanej niektóre twierdzenia formułujemy inaczej niż dla całki w przedziale, np.

- całka w przedziale $\langle a;\, b\rangle$ funkcji dodatniej jest dodatnia;
- całka skierowana od a do b funkcji dodatniej jest: dodatnia gdy $a<b$, równa 0 gdy $a=b$, ujemna gdy $a>b$.

U m o w a. W dalszym ciągu przez całkę oznaczoną będziemy rozumieli całkę oznaczoną skierowaną.

Własności całki oznaczonej

Zakładamy, że wszystkie funkcje podcałkowe we wzorach (6)—(13) są całkowalne w pewnym przedziale E, a liczby a, b, c należą do E.

Łączenie przedziałów całkowania

$$\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx \tag{6}$$

Całka stałej jest iloczynem tej stałej i różnicy granic całkowania

$$\int\limits_a^b k\,dx = k(b-a) \tag{7}$$

Współczynnik stały można wynieść przed znak całki

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx \tag{8}$$

Całka sumy dwóch funkcji jest równa sumie całek tych funkcji

$$\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b g(x)dx \tag{9}$$

Moduł całki i całka modułu spełniają następujące nierówności

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx, \quad a\leqslant b \tag{10}$$

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b |f(x)|\,dx\right| \tag{11}$$

Oszacowanie całki. Jeśli $m\leqslant f(x)\leqslant M$ dla $a\leqslant x\leqslant b$, to

$$m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a), \quad a\leqslant b \tag{12}$$

Jeśli $|f(x)|\leqslant C$ dla $a\leqslant x\leqslant b$ i liczby p, q należą do $\langle a;\, b\rangle$, to

$$\left|\int\limits_p^q f(x)dx\right| \leqslant C|p-q| \tag{13}$$

Obliczenie całki oznaczonej za pomocą całki nieoznaczonej

Jeśli całkę oznaczoną

$$\int\limits_a^b f(x)dx \tag{14}$$

gdzie funkcja f jest ciągła w pewnym przedziale E, a liczby a, b należą do E, chcemy obliczyć za pomocą całki nieoznaczonej

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \quad x\in E \tag{15}$$

to korzystamy ze wzoru

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \tag{16}$$

który przy wykonywaniu obliczeń zapisujemy zwykle w postaciach

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} \quad \text{lub} \quad \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$\text{lub} \quad \int_a^b f(x)dx = [\textstyle\int f(x)dx]_{x=a}^{x=b} \tag{17}$$

Na przykład

$$\int_1^2 3x^2dx = [\textstyle\int 3x^2dx]_{x=1}^{x=2} = x^3\Big|_1^2 = 8-1 = 7$$

Zmiana zmiennej. Całkowanie przez części

W sprawie założeń zob. *Zarys II*, s. 129, 131.

Wzór na zmianę zmiennej w całce oznaczonej

$$\int_a^b f(x)dx = \left\| \begin{matrix} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \\ x|_a^b \quad t|_\alpha^\beta \end{matrix} \right\| = \int_\alpha^\beta f[g(t)]\,g'(t)dt \tag{18}$$

R e g u ł a. Zmianę zmiennej w całce oznaczonej wykonujemy następująco:
1° zmieniamy zmienną w funkcji podcałkowej,
2° zmieniamy różniczkę,
3° zmieniamy granice całkowania.

Na przykład

$$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt{1+3x}} = \left\| \begin{matrix} 1+3x = t \\ 3dx = dt \\ x|_1^8 \quad t|_4^{25} \end{matrix} \right\| = \int_4^{25} \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{t}\Big|_4^{25} = 2$$

Wzór na całkowanie przez części w całce oznaczonej

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)v(x)dx \tag{19}$$

Na przykład

$$\int_a^b x\cos x dx = [x\sin x]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \sin x dx = b\sin b - a\sin a - [-\cos x]_{x=a}^{x=b} =$$
$$= b\sin b - a\sin a + \cos b - \cos a$$

16.3. Obliczyć całki oznaczone

a) $\int_0^2 3x^2dx$, $\int_0^1 (x^2+2x)dx$, $\int_1^2 (4x^3+1)dx$, $\int_{-1}^3 (x^2+4x-1)dx$

b) $\int_0^1 e^x dx$, $\int_0^2 (1+e^{2x})dx$, $\int_1^3 e^{x/4}dx$, $\int_0^4 e^{2x+1}dx$

c) $\int_0^\pi \sin x dx$, $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}\, x dx$, $\int_{-\pi/3}^{\pi/2} \cos x dx$, $\int_{\pi/4}^{\pi} \sin x\cos x dx$

d) $\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}dx$, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+1}$, $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2-5x+4}$, $\int_0^{-1} \frac{x-4}{x^2-5x+4}dx$

16.4. Obliczyć całkę oznaczoną, stosując zmianę zmiennej (proponowane podstawienie — obok całki; a, b — stałe dodatnie)

a) $\int_0^4 \sqrt{1+2x}\,dx$, $1+2x = t$ b) $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$, $\sqrt{x} = t$

c) $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a^2-x^2 = t$ d) $\int_0^a \frac{x^2}{x^3+a^3}dx$, $x^3+a^3 = t$

Odnośnie do zadań c) i d) zob. wzór (6) s. 13 i zad. 14.11.

e) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $x = a\cos t$

f) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos x}$, $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$, $t^2 = 2s^2$

g) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$, $e^x = t$

h) $\int\limits_0^{a/b} \frac{dx}{a^2+b^2x^2}, \quad x = \frac{a}{b}t$

i) $\int\limits_0^1 (1-x^{2/3})^{3/2} dx, \ x = \sin^3 t$

j) $\int\limits_0^a x^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\, dx, \ x = a\cos t$

k) $\int\limits_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2}\, dx, \ x = 2a\sin^2 t$

l) $\int\limits_{a/2}^a \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}, \ \sqrt{2ax-x^2} = xt$

16.5. Obliczyć całkę oznaczoną (a, b — stałe dodatnie)

a) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$ b) $\int\limits_{-a}^a x\cos\frac{x}{b}\, dx$

c) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$ d) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

e) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$ f) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{4dx}{3+5\cos x}$

g) $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ h) $\int\limits_{b/a}^{3b/a} \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x}}$

i) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$ (podstawienie Eulera $\sqrt{x^2+5x+1} = x-t$)

j) $\int\limits_0^1 \sqrt{e^x-1}\, dx$ k) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

16.6. Stosując całkowanie przez części, obliczyć całkę oznaczoną

a) $\int\limits_0^1 xe^x dx$ b) $\int\limits_0^{2\pi} x\cos x\, dx$

c) $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$ d) $\int\limits_1^e \ln x\, dx$

e) $\int\limits_0^1 x^2e^x dx$ f) $\int\limits_1^2 \ln^2 x\, dx$

g) $\int\limits_1^1 \frac{x}{(1+x)^2} e^x dx$

W s k a z ó w k a. Zgodnie z równością $\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$, rozdzielić daną całkę na dwie całki i pierwszą z nich całkować przez części, przyjmując $e^x = v'(x)$.

h) $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x\, dx$

Średnia całkowa funkcji jednej zmiennej

Średnia całkowa funkcji f w przedziale $\langle a; b\rangle$ jest to iloraz całki funkcji f w przedziale $\langle a; b\rangle$ przez długość przedziału $\langle a; b\rangle$

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \tag{20}$$

Średnia całkowa istnieje, jeśli funkcja jest całkowalna.

16.7. Obliczyć średnią całkową funkcji f w podanym przedziale

a) $f(x) = x^3$, $\langle 0; a\rangle$ b) $f(x) = e^x$, $\langle a; b\rangle$

c) $f(x) = a^2-x^2$, $\langle -a; a\rangle$ d) $f(x) = \sin x$, $\langle 0; \pi\rangle$

e) $f(x) = x\sin x$, $\langle 0; \pi\rangle$ f) $f(x) = x\cos x$, $\langle 0; \pi\rangle$

Przybliżone obliczanie całki oznaczonej

Przybliżeniami całki oznaczonej

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

są sumy całkowe.

Dzielimy przedział $\langle a; b\rangle$ na n równych części o długości $h = \frac{b-a}{n}$. Mamy $n+1$ punktów podziału

$$a = a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n = b$$

Obliczamy odpowiadające tym punktom wartości funkcji podcałkowej f

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n$$

i tworzymy cztery następujące sumy całkowe:

suma lewa $\quad S_L = h(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})$

suma prawa $\quad S_P = h(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+y_n)$

suma trapezów $\quad S_T = \frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n) = \frac{1}{2}(S_L+S_P)$

suma Simpsona $\quad S_S = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ldots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$

(w sumie Simpsona n jest parzyste).

Każda z tych sum jest przybliżeniem całki (zob. *Zarys II*, s. 137).

16.8. Obliczyć przybliżone wartości całek, przyjmując $n = 10$

a) $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ **b)** $\int_1^2 \ln x\,dx$ **c)** $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ **e)** $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$

Rozdział **17**

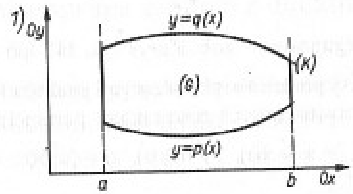
Geometryczne zastosowania całki oznaczonej

Pole figury płaskiej

Założenia do poniższych wzorów zob. *Zarys II*, s. 154.

Obszar normalny *względem osi 0x* (rys. 1) określony wzorem

$$(G) = \{(x, y): a \leqslant x \leqslant b,\quad p(x) \leqslant y \leqslant q(x)\} \qquad (1)$$

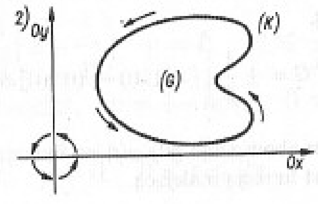


ma pole

$$G = \int_a^b [q(x)-p(x)]\,dx \qquad (2)$$

Obszar (G) **ograniczony krzywą zamkniętą** (K) (rys. 2), daną równaniami parametrycznymi

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad t \in \langle a; b\rangle \qquad (3)$$



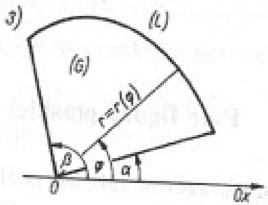
ma pole

$$G = \pm\frac{1}{2}\int_a^b [x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)]dt \tag{4}$$

w którym znak plus obowiązuje wtedy, gdy wzrostowi parametru t od a do b odpowiada na krzywej (K) obieg dodatni (jak na rysunku), a znak minus, gdy ten obieg jest ujemny; $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ są pochodnymi funkcji $x(t)$ i $y(t)$.

Obszar (G) **pokryty promieniami wodzącymi punktów krzywej** (L) (rys. 3), danej w układzie biegunowym równaniem jawnym

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in \langle \alpha; \beta \rangle, \quad 0 < \beta - \alpha < 2\pi \tag{5}$$



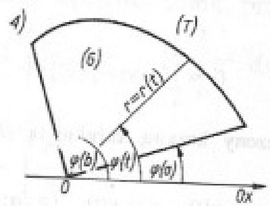
przy założeniu $r(\varphi) > 0$, $\alpha < \varphi < \beta$, ma pole

$$G = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi \tag{6}$$

Współrzędne biegunowe — zob. *Zarys I*, s. 147 lub *Zadania I*, s. 66.

Obszar (G) **pokryty promieniami wodzącymi punktów krzywej** (T) (rys. 4) danej we współrzędnych prostokątnych równaniami parametrycznymi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in \langle a; b \rangle \tag{7}$$



przy założeniu, że $r = r(t) > 0$, a kąt $\varphi(t)$ jest funkcją monotoniczną parametru t, ma pole

$$G = \pm\frac{1}{2}\int_a^b [x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)]dt \tag{8}$$

przy czym znak plus obowiązuje, gdy $\varphi(t)$ jest funkcją rosnącą parametru t, a znak minus, gdy $\varphi(t)$ jest funkcją malejącą.

17.1. Narysować krzywe i obliczyć pole obszaru ograniczonego przez te krzywe

a) $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$ b) $y = x^2, \quad y = 4$

c) $y = x^2, \quad y = x$ d) $y = x^2, \quad y = 2 - x^2$

e) $y = x^2, \quad y = 2 + \frac{1}{2}x^2$ f) $y = 2x - \frac{1}{4}x^2, \quad x - 4y + 6 = 0$

g) $y = \frac{1}{x}, \quad y = -x + \frac{5}{2}$ h) $y = e^x, \quad y = 2, \quad x = 0$

i) $y = \sin x$ dla $0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad y = 0$

j) $y = \operatorname{tg} x, \quad y = 0, \quad x = \pi/4$ k) $y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y = \frac{1}{2}x^2$

17.2. Narysować obszar (G) ograniczony krzywą zamkniętą (K) i obliczyć pole G tego obszaru (a, b — stałe dodatnie).

Uwaga. Krzywa (K) może być dana jako połączenie dwóch łuków (K_1) i (K_2). Całka po (K) oraz całki po (K_1) i po (K_2) powinny być skierowane zgodnie z dodatnim obiegiem brzegu obszaru (G).

a) (K): $x = a\cos t, \quad y = a\sin t; \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, okrąg

b) (K): $x = a\cos t, \quad y = b\sin t; \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, elipsa

c) (K): $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t; \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, asteroida (*Zadania I*, zad. 12.9c)

d) (K): $x = \cos t + \sin t, \quad y = \cos t - \sin t; \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (*Zadania I*, zad. 12.9a)

e) (K_1): $x = t, \quad y = 1/t; \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$, łuk hiperboli

(K_2): $x = t, \quad y = \frac{1}{2}(3 - t); \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$, cięciwa tego łuku

f) (K_1): $x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t; \quad |t| \leqslant 1$, łuk hiperboli

(K_2): $x = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) \quad y = t; \quad |t| \leqslant \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$, cięciwa tego łuku

g) (K_1): $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t; \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, łuk cykloidy (*Zarys I*, s. 411)

(K_2): $x = t, \quad y = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, odcinek osi Ox

17.3. Narysować krzywą (*Zadania I*, s. 259—260) i obliczyć pole obszaru pokrytego promieniami wodzącymi punktów tej krzywej ($a>0$, $m>0$).

a) $r = a\varphi$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, część spirali Archimedesa

b) $r = a/\varphi$, $\quad \dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$, część spirali hiperbolicznej

c) $r = ae^{m\varphi}$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, część spirali logarytmicznej

d) $r = a(1+\cos\varphi)$, $\quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, kardioida

e) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\quad -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, prawa pętla lemniskaty

f) $r = a\sin\varphi$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, okrąg

g) $r = a\sin 2\varphi$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, krzywa czterolistna

h) $r = a\sin 3\varphi$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, krzywa trójlistna

h) $r = a\sin 3\varphi$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, krzywa trójlistna

i) $r = a\sin 4\varphi$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, krzywa ośmiolistna

17.4. Narysować krzywą i obliczyć pole obszaru pokrytego promieniami wodzącymi punktów tej krzywej ($a>0$, $b>0$).

U w a g a. Kierunek całkowania powinien odpowiadać wzrostowi kąta φ.

a) $x = a\cos^2 t$, $\quad y = b\sin^2 t$; $\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, odcinek

b) $x = a\sin^2 t$, $\quad y = b\cos^2 t$; $\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, odcinek

c) $x = \operatorname{ch} t$, $\quad y = \operatorname{sh} t$; $\quad 0 \leqslant t \leqslant a$, łuk hiperboli

d) $x = \operatorname{ctg} t$, $\quad y = \operatorname{tg} t$; $\quad \pi/6 \leqslant t \leqslant \pi/3$, łuk hiperboli

Objętości i pola figur obrotowych

Założenia do poniższych wzorów zob. *Zarys II*, s. 158—161.

Na płaszczyźnie Oxy (rys. 5) dany jest obszar domknięty (H), ograniczony krzywą (T) o równaniu

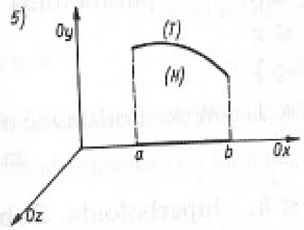
$$y = y(x), \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{9}$$

oraz rzutem tej krzywej na oś Ox i dwoma odcinkami bocznymi (z których każdy może być zerowy).

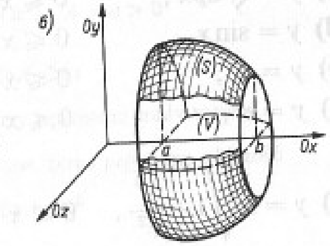
Bryła obrotowa (V) (rys. 6), utworzona w przestrzeni $Oxyz$ przez obrót obszaru domkniętego (H) dokoła osi Ox (rys. 5), ma objętość

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx \tag{10}$$

5)



6)



Powierzchnia obrotowa (S) (rys. 6), utworzona w przestrzeni $Oxyz$ przez obrót krzywej (T) dokoła osi Ox (rys. 5), ma pole

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{11}$$

O bryle (V) i powierzchni (S) mówimy, że są *wyznaczone* przez krzywą (T).

17.5. Obliczyć objętość bryły obrotowej wyznaczonej przez krzywą o danym równaniu (a, b, h, p — stałe dodatnie)

a) $y = \dfrac{a}{h}x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant h$, stożek

b) $y = \sqrt{a^2-x^2}$, $\quad -a \leqslant x \leqslant a$, kula

c) $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $\quad -a \leqslant x \leqslant a$, elipsoida

d) $y = \sqrt{x^2-a^2}$, $\quad a \leqslant x \leqslant a+h$, hiperboloida

e) $y = \sqrt{2px}$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant h$, paraboloida

f) $y = \sin x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

g) $y = 1+\cos x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

h) $y = e^x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

i) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad -h \leqslant x \leqslant h$, (zob. zad. 14.50).

17.6. Obliczyć pole powierzchni obrotowej wyznaczonej przez krzywą o danym równaniu (a, h, p — stałe dodatnie)

a) $y = \dfrac{a}{h}x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant h$, pobocznica stożka

b) $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $\quad -a\leqslant x\leqslant a$, $\quad$ sfera

c) $y=\sqrt{2px}$, $\quad 0\leqslant x\leqslant h$, $\quad$ paraboloida

d) $y=\sin x$, $\quad 0\leqslant x\leqslant \pi$

e) $y=x^3$, $\quad 0\leqslant x\leqslant 1$

f) $y=e^x$, $\quad 0\leqslant x\leqslant 1$. Wsk. Podstawić $e^x=t$, zob. zad. 14.30b.

g) $y=a\sqrt{1+\dfrac{x^2}{c^2}}$, $\quad 0\leqslant x\leqslant h$, $\quad$ hiperboloida. Zob. całki na końcu książki.

Figura obrotowa (V), utworzona w przestrzeni $Oxyz$ przez obrót obszaru normalnego (G) (rys. 1) dokoła osi Ox, przy założeniu, że funkcje p i q mają pierwsze pochodne ciągłe, ma objętość

$$V=V_q-V_p \tag{12}$$

gdzie V_p i V_q należy obliczyć ze wzoru (10), podstawiając $y=p(x)$, względnie $y=q(x)$.

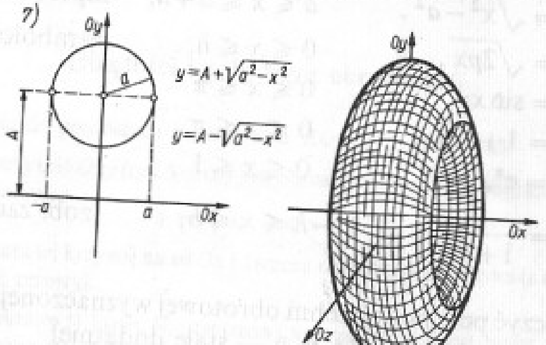
Całkowita powierzchnia takiej figury ma pole

$$S=S_q+S_p+S_a+S_b \tag{13}$$

gdzie S_p i S_q należy obliczyć ze wzoru (11), podstawiając $y=p(x)$ względnie $y=q(x)$, natomiast S_a i S_b są polami pierścieni kołowych, utworzonych w przestrzeni $Oxyz$ przez obrót odcinków bocznych dokoła osi Ox.

Torus jest powierzchnią utworzoną przez obrót okręgu dokoła prostej leżącej w płaszczyźnie tego okręgu, zewnątrz okręgu.

7)



Torus (rys. 7) utworzony w przestrzeni $Oxyz$ przez obrót dokoła osi Ox okręgu określonego na płaszczyźnie Oxy równaniem

$$x^2+(y-A)^2=a^2,\quad A>a>0 \tag{14}$$

ma pole

$$S=2\pi A\cdot 2\pi a \tag{15}$$

gdzie A i a oznaczają promień duży i promień mały torusa.

Bryła ograniczona tym torusem, tzw. *torus pełny*, ma objętość

$$V=2\pi A\cdot \pi a^2 \tag{16}$$

17.7. Udowodnić: a) wzór (15) za pomocą wzorów (12) i (10), b) wzór (16) za pomocą wzorów (13) i (11), przyjmując (rys. 7), że $y=p(x)=A-\sqrt{a^2-x^2}$, $\quad y=q(x)=A+\sqrt{a^2-x^2}$, $-a\leqslant x\leqslant a$, $A>a>0$.

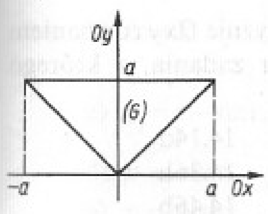
17.8. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły obrotowej utworzonej w przestrzeni $Oxyz$ przez obrót dokoła osi Ox domkniętego obszaru (G) leżącego na płaszczyźnie Oxy

a) $(G)=\{|x|\leqslant y\leqslant a,\ |x|\leqslant a\}$, $\quad$ rys. 8

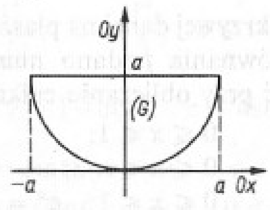
b) $(G)=\{a-\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant a,\ \ |x|\leqslant a\}$, $\quad$ rys. 9

c) $(G)=\{a\leqslant y\leqslant a+\sqrt{a^2-x^2},\ \ |x|\leqslant a\}$, $\quad$ rys. 10

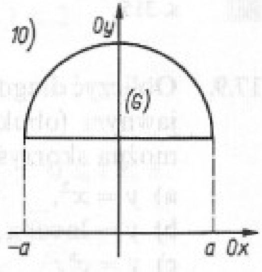
8)



9)



10)



Długość krzywej

Krzywa na płaszczyźnie Oxy dana równaniem jawnym

$$y=y(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

ma długość

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{17}$$

Krzywa na płaszczyźnie w układzie biegunowym dana równaniem

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$$

ma długość

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \tag{18}$$

Krzywa na płaszczyźnie Oxy dana równaniami parametrycznymi

$$x = x(t), \quad y = y(t); \quad a \leqslant t \leqslant b$$

ma długość

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt \tag{19}$$

Krzywa w przestrzeni $Oxyz$ dana równaniami parametrycznymi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \quad a \leqslant t \leqslant b$$

ma długość

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt \tag{20}$$

Warunkiem wystarczającym istnienia długości krzywej jest, aby równanie określające krzywą było klasy C^1.

Uwaga. Całki wyrażające długość krzywej bywają trudne lub nieelementarne (*Zarys II*, s. 14), np. długość elipsy wyraża się całką nieelementarną (*Zarys II*, s. 315).

17.9. Obliczyć długość krzywej danej na płaszczyźnie Oxy równaniem jawnym (obok równania podano numer zadania, z którego można skorzystać przy obliczaniu całki)

a) $y = x^2$,	$0 \leqslant x \leqslant 1$;	14.14d
b) $y = \ln\cos x$,	$0 \leqslant x \leqslant \pi/3$;	14.36b
c) $y = e^x$,	$0 \leqslant x \leqslant 1$; $e^x = t$,	14.46b
d) $y = \ln(1 - x^2)$,	$0 \leqslant x \leqslant 1/2$;	14.50t,u
e) $y = \ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$,	$1 \leqslant x \leqslant 2$	
f) $y = 2\sqrt{x}$,	$1/8 \leqslant x \leqslant 4/5$;	14.27

17.10. Obliczyć długość krzywej danej na płaszczyźnie w układzie biegunowym równaniem ($a > 0$, $m > 0$)

a) $r = a\varphi$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
b) $r = ae^{m\varphi}$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
c) $r = a\sin\varphi$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$
d) $r = a(1+\cos\varphi)$, $\quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$

17.11. Napisać całkę wyrażającą długość krzywej

a) $r = a\sin 2\varphi$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
b) $r = a\sin 3\varphi$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$
c) $r = a\sin 4\varphi$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

17.12. Obliczyć długość krzywej danej na płaszczyźnie Oxy równaniami parametrycznymi ($a > 0$)

a) $x = \frac{1}{6}t^6$, $\quad y = \frac{1}{4}t^4$; $\quad 0 \leqslant t \leqslant \sqrt[4]{8}$
b) $x = a(t - \sin t)$, $\quad y = a(1 - \cos t)$; $\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$
c) $x = a(t\sin t + \cos t)$, $\quad y = a(\sin t - t\cos t)$; $\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

17.13. Obliczyć długość krzywej danej w przestrzeni $Oxyz$ równaniami parametrycznymi

a) $x = t$, $\quad y = \frac{t^2}{2}$, $\quad z = \frac{2}{3}\sqrt{2}\, t^{3/2}$; $\quad 0 \leqslant t \leqslant 2$
b) $x = t$, $\quad y = \frac{t^2}{\sqrt{2}}$, $\quad z = \frac{t^3}{3}$; $\quad 0 \leqslant t \leqslant 3$
c) $x = t - \sin t$, $\quad y = 1 - \cos t$, $\quad z = 4\sin\frac{t}{2}$; $\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$
d) $x = \cos t$, $\quad y = \sin t$, $\quad z = t$; $\quad 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$
e) $x = t\cos t$, $\quad y = t\sin t$, $\quad z = t$; $\quad 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$
f) $x = t\cos t$, $\quad y = t\sin t$, $\quad z = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2$; $\quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

Rozdział 18

Całka niewłaściwa

Obliczanie całek niewłaściwych

Całka niewłaściwa jest uogólnieniem całki oznaczonej na przypadki, w których funkcja podcałkowa lub przedział całkowania są nieograniczone. Rozważa się 4 przypadki podstawowe oraz przypadki złożone (*Zarys II*, s. 176—179).

Osobliwość w lewym końcu przedziału. *Całka niewłaściwa* funkcji f w przedziale $\langle a;b\rangle$ z osobliwością w punkcie a jest to liczba, którą oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

takim samym, jak symbol całki oznaczonej, a definiujemy i obliczamy następująco:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{symbol}} = \underbrace{\lim_{h\to a+0}\int_h^b f(x)\,dx}_{\text{definicja}} = \underbrace{\left[\int f(x)\,dx\right]_{x\to a+0}^{x=b}}_{\text{sposób obliczenia}} \tag{2}$$

Jeśli ta granica jest skończona, to całka niewłaściwa (1) *istnieje* (jest *zbieżna*). Jeśli zaś granica ta nie istnieje lub jest nieskończona, to całka niewłaściwa (1) nie istnieje (jest *rozbieżna*).

Inne przypadki całki niewłaściwej definiujemy i obliczamy w podobny sposób.

18.1. Obliczyć całkę

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

g) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$ h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ k) $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ l) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

m) $\displaystyle\int_0^e 4x\ln x\,dx$ n) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

18.2. Obliczyć całkę

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$ h) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx,\quad a>0$

i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$ j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx$ k) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}dx,\quad a>0$

l) $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x^3}dx$ m) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ n) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 e^x\,dx$

o) $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$ p) $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2+x-2} dx$ q) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

r) $\int_{0}^{\infty} \cos x dx$ s) $\int_{0}^{\infty} e^{-x} \sin x dx$

18.3. Rozróżniając przypadki: $r < 1$, $r = 1$, $r > 1$, obliczyć całkę

a) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^r} dx$ b) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^r} dx$

18.4. Obliczyć całkę

a) $\int_{0}^{1} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$ b) $\int_{1}^{\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$ c) $\int_{0}^{1} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx$ d) $\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx$

18.5. Porównując funkcję podcałkową, która jest niecałkowalna elementarnie (*Zarys II*, s. 14) z odpowiednio dobraną funkcją elementarnie całkowalną, udowodnić, że całka niewłaściwa:

a) $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2} dx$ jest zbieżna i mniejsza od $1/e$,

b) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$ jest zbieżna i mniejsza od 2,

c) $\int_{1}^{e} \frac{1}{\ln x} dx$ jest rozbieżna,

d) $\int_{1/e}^{1} \frac{1}{\ln x} dx$ jest rozbieżna.

18.6. Zbadać, gdzie występują osobliwości funkcji podcałkowej i obliczyć całkę

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\int_{1}^{2} \frac{x dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ c) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$

d) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x \ln x}$ e) $\int_{-1}^{1} \ln|x| dx$ f) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

g) $\int_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ h) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2-6x+8}$ i) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$

18.7. Zbadać, gdzie występują osobliwości funkcji podcałkowej i obliczyć całkę

a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}$ f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} dx$

g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}\, x} dx$ h) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}\, x} dx$ i) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}\, x} dx$

j) $\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx$ k) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} dx$ l) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} dx$

m) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} dx$ n) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} dx$

Kryterium całkowe zbieżności szeregu

Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle a;\infty)$, $a\in\mathcal{N}$, oraz dodatnia i malejąca dla x większych od pewnej liczby c, to szereg

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \tag{3}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \tag{4}$$

jest zbieżna.

Na przykład szereg harmoniczny rzędu r (*Zarys I*, s. 205)

$$1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\ldots+\frac{1}{n^r}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r} \tag{5}$$

jest zbieżny dla $r>1$, a rozbieżny dla $r\leqslant 1$. Rozwiązując zad. 18.3b, stwierdzamy, że całka

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^r}dx \tag{6}$$

jest zbieżna dla $r>1$, a rozbieżna dla $r\leqslant 1$.

Związek między całką (6) i szeregiem (5) jest taki jak związek między całką (4) i szeregiem (3).

18.8. Za pomocą kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregu

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^r n}$, $r>1$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^r}$, $r>1$

18.9. Za pomocą kryterium całkowego wykazać zbieżność szeregu dla $x>1$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$

W s k a z ó w k a. Literę x w całce (4) należy zastąpić inną literą, gdyż litera x występuje w określeniu badanego szeregu.

Rozdział **19**

Całka podwójna

Obszary regularne i normalne w $\mathcal{R}^2$

Przestrzeń $\mathcal{R}^2$, czyli 2-wymiarowa przestrzeń rzeczywista, jest to zbiór par liczb rzeczywistych, które nazywamy *punktami* przestrzeni $\mathcal{R}^2$ i oznaczamy $P=(x,y)$, $P_0=(x_0,y_0)$ itp., a ich *odległość* definiujemy wzorem

$$PP_0=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Przestrzeń $\mathcal{R}^2$ z tak określoną odległością identyfikujemy z płaszczyzną $0xy$, a podzbiory tej przestrzeni nazywamy *zbiorami płaskimi*.

Definicje odnoszące się do $\mathcal{R}^2$ zob. *Zarys I*, s. 317—319.

Obszar regularny. Obszar ograniczony, którego brzeg jest sumą skończenie wielu krzywych danych jawnie, nazywamy *obszarem regularnym*, a jego domknięcie — *obszarem regularnym domkniętym*. Obszar regularny i jego domknięcie mają takie samo pole.

Obszar normalny. Najprostsze obszary regularne domknięte — to *obszary normalne*, a mianowicie:

• *prostokąt* (rys. 1)

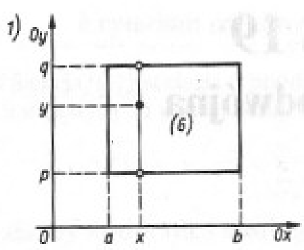
$$(G)=\{a\leqslant x\leqslant b,\quad p\leqslant y\leqslant q\} \tag{1}$$

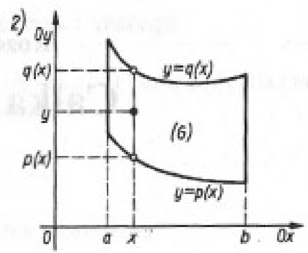
gdzie liczby a, b, p, q są dane i $a<b$, $p<q$;

• *obszar normalny względem osi Ox* (rys. 2)

$$(G)=\{a\leqslant x\leqslant b,\quad p(x)\leqslant y\leqslant q(x)\} \tag{2}$$

gdzie funkcje p, q są dane i ciągłe w $\langle a;b\rangle$ i $p(x)<q(x)$ w $(a;b)$;



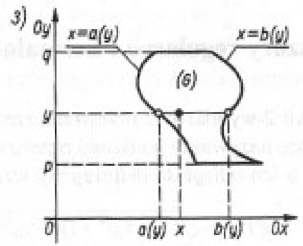


• *obszar normalny względem osi Oy* (rys. 3)

$$(G) = \{a(y) \leqslant x \leqslant b(y), \quad p \leqslant y \leqslant q\} \tag{3}$$

gdzie funkcje $a(y)$, $b(y)$ są ciągłe w $\langle p; q\rangle$ i $a(y) < b(y)$ w $(p; q)$.

U w a g a. Prostokąt jest obszarem normalnym względem obu osi układu.



Całki iterowane

Całka iterowana jest to wyrażenie utworzone w ten sposób, że funkcja dwóch zmiennych jest całkowana względem jednej zmiennej w pewnych granicach, a następnie wynik tego całkowania jest całkowany względem drugiej zmiennej w pewnych granicach (każda z występujących tu całek może być całką niewłaściwą).

Całka iterowana w prostokącie (rys. 1) z kolejnością całkowania: najpierw względem y, potem względem x, jest oznaczana symbolami

$$\int_a^b \left[\int_p^q f(x,y)dy\right]dx \quad \text{lub} \quad \int_a^b dx \int_p^q f(x,y)dy \tag{1a}$$

zapis pełny — zapis skrócony

Całka iterowana w tym samym prostokącie z przeciwną kolejnością całkowania jest oznaczana symbolami

$$\int_p^q \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy \quad \text{lub} \quad \int_p^q dy \int_a^b f(x,y)dx \tag{1b}$$

W dalszych wzorach jest używany wyłącznie zapis skrócony.

Jeśli funkcja f jest w prostokącie (G) ciągła, to powyższe dwie całki (1a) i (1b) są równe.

Całka iterowana w obszarze normalnym względem osi *Ox* (rys. 2)

$$\int_a^b dx \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy \tag{2a}$$

Całka iterowana w obszarze normalnym względem osi *Oy* (rys. 3)

$$\int_p^q dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx \tag{3a}$$

Obliczenie całki iterowanej składa się z czterech czynności, które przedstawimy na przykładzie całki

$$I = \int_1^e dx \int_0^{1/x} \ln(xy)dy$$

1° Obliczenie całki wewnętrznej nieoznaczonej

$$\int \ln(xy)dy = y\ln(xy) - y$$

2° Wprowadzenie granic całkowania

$$[y\ln(xy) - y]_{y=0}^{y=1/x} = -\frac{1}{x}$$

3° Obliczenie całki zewnętrznej nieoznaczonej

$$\int -\frac{1}{x}dx = -\ln x$$

4° Wprowadzenie granic całkowania

$$[-\ln x]_{x=1}^{x=e} = -1$$

Odpowiedź: $I = -1$.

19.1. Obliczyć całkę iterowaną

a) $\int_0^1 dx \int_0^1 12x^2y^3 dy$ b) $\int_0^a dx \int_0^h 2x dy$

c) $\int_a^b dx \int_{-c}^c (y-c)dy$ d) $\int_1^a dy \int_1^a \frac{a+1}{y} dx$

e) $\int\limits_a^b dx \int\limits_p^q 4xy\,dy$ f) $\int\limits_a^b dx \int\limits_p^q e^{x-y} dy$

g) $\int\limits_0^\pi dx \int\limits_0^\pi \cos(x+y)dy$ h) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 y\cos(xy)dx$

i) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^1 \frac{x}{y}dx$ j) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[4]{y}} \frac{x}{y}dx$

k) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 y^x \ln y\,dx$ l) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} dy$

Całka podwójna w prostokącie

Całka podwójna funkcji f w prostokącie (G) (rys. 1), którą oznaczamy symbolami

$$\iint\limits_{(G)} f(P)dG \quad \text{lub} \quad \iint\limits_{(G)} f(x,y)dx\,dy \tag{4}$$

jest liczbą, której istnienie i wartość są wyznaczone przez funkcję f i zbiór (G) w sposób określony w definicji (*Zarys II*, s. 187—189), którą w skrócie zapisujemy wzorem

$$\iint\limits_{(G)} f(P)dG = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(P_j)\,\Delta G_j \tag{5}$$

gdzie: ΔG_j jest polem obszaru częściowego (tzw. elementu podziału), P_j jest argumentem należącym do elementu (ΔG_j), λ jest średnicą podziału (tj. największą ze średnic poszczególnych elementów), a sumę w tym wzorze nazywamy sumą całkową całki (4) dla danego podziału prostokąta (G) i wyboru argumentów P_j.

Jeśli powyższa granica istnieje i jest skończona niezależnie od wyboru argumentów, to mówimy, że całka (4) istnieje, oraz że funkcja f jest całkowalna w (G). W przeciwnym razie mówimy, że całka (4) nie istnieje, oraz że funkcja f jest niecałkowalna w (G).

Warunki istnienia całki podwójnej w prostokącie. Warunkiem koniecznym jest ograniczoność funkcji podcałkowej w prostokącie (G). Warunkiem wystarczającym jest ciągłość funkcji podcałkowej w prostokącie (G).

U w a g a. W niektórych przypadkach funkcja jest całkowalna mimo pewnych nieciągłości.

Uogólnieniem całki (5) jest *całka podwójna niewłaściwa* (s. 118), która może istnieć także wtedy, gdy funkcja podcałkowa lub obszar całkowania są nieograniczone.

Obliczenie całki podwójnej w prostokącie za pomocą całki iterowanej

$$\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ p\leqslant y\leqslant q}} f(x,y)dx\,dy = \begin{cases} = \int\limits_a^b dx \int\limits_p^q f(x,y)dy \\ = \int\limits_p^q dy \int\limits_a^b f(x,y)dx \end{cases} \tag{6}$$

Jeśli funkcja f jest ciągła w prostokącie całkowania, to powyższe trzy całki istnieją i są równe; do obliczenia można użyć którejkolwiek z dwóch całek iterowanych.

19.2. Obliczyć całkę podwójną w prostokącie $(G) = \{-2 \leqslant x \leqslant 2,\ -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

a) $\iint\limits_{(G)} (x+y)^2 dx\,dy$ b) $\iint\limits_{(G)} (ax+by)^2 dx\,dy$ c) $\iint\limits_{(G)} (ax+by)^3 dx\,dy$

19.3. Obliczyć całkę podwójną w prostokącie $(G) = \{-4 \leqslant x \leqslant -1,\ -3 \leqslant y \leqslant -1\}$. (W s k a z ó w k a: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$, $\sqrt{xy} = \sqrt{(-x)(-y)}$)

a) $\iint\limits_{(G)} \frac{1}{xy}dx\,dy$ b) $\iint\limits_{(G)} \frac{1}{(x+y)^2}dx\,dy$ c) $\iint\limits_{(G)} \frac{1}{\sqrt{xy}}dx\,dy$

d) $\iint\limits_{(G)} \frac{1}{xy^2}dx\,dy$ e) $\iint\limits_{(G)} \frac{1}{x+y}dx\,dy$ f) $\iint\limits_{(G)} \sqrt{xy}\,dx\,dy$

19.4. Obliczyć całkę podwójną w prostokącie

a) $\iint\limits_{(G)} (2x-3y^2)dx\,dy$, $(G) = \{-1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

b) $\iint\limits_{(G)} 4xy\,dx\,dy$, $(G) = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

c) $\iint\limits_{(G)} \frac{x}{y}dx\,dy$, $(G) = \{0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant e\}$

d) $\iint\limits_{(G)} e^{x+y}\,dx\,dy, \qquad (G)=\{0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1\}$

e) $\iint\limits_{(G)} \sin 2\pi x\,dx\,dy, \qquad (G)=\{0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2},\quad 1\leqslant y\leqslant 3\}$

f) $\iint\limits_{(G)} \frac{1}{\sqrt{2y+9}}\,dx\,dy, \qquad (G)=\{-2\leqslant x\leqslant -1,\quad 0\leqslant y\leqslant 8\}$

19.5. Obliczyć całkę podwójną w prostokącie

a) $\iint\limits_{(G)} xy(x+y)\,dx\,dy, \qquad (G)=\{0\leqslant x\leqslant 2,\quad 0\leqslant y\leqslant 6\}$

b) $\iint\limits_{(G)} \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}, \qquad (G)=\{0\leqslant x\leqslant 1,\quad 1\leqslant y\leqslant 2\}$

c) $\iint\limits_{(G)} x\cos(x^2+y)\,dx\,dy, \qquad (G)=\{-\sqrt{\pi}\leqslant x\leqslant 0,\quad 0\leqslant y\leqslant \pi\}$

d) $\iint\limits_{(G)} \frac{xy}{\sqrt{1-x^2+y^2}}\,dx\,dy, \qquad (G)=\{0\leqslant x\leqslant 1,\quad 1\leqslant y\leqslant 2\}$

e) $\iint\limits_{(G)} x^2y\,e^{xy}\,dx\,dy, \qquad (G)=\{0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 2\}$

f) $\iint\limits_{(G)} \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad (G)=\{0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1\}$

g) $\iint\limits_{(G)} x^2y\cos(xy^2)\,dx\,dy, \qquad (G)=\{0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant y\leqslant 2\}$

19.6. Zbadać czy poniższa całka istnieje jako całka podwójna w sensie definicji (5). Napisać odpowiednią całkę iterowaną i obliczyć ją

a) $\iint\limits_{(G)} \frac{x^2y}{1+xy^2}\,dx\,dy, \qquad (G)=\{-1\leqslant x\leqslant 0,\quad 0\leqslant y\leqslant 1\}$

b) $\iint\limits_{(G)} \frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\,dx\,dy, \qquad (G)=\{1\leqslant x\leqslant 2,\quad 0\leqslant y\leqslant \frac{1}{2}\}$

Całka podwójna w obszarze normalnym

Całkę podwójną w obszarze normalnym względem osi $0x$ (rys. 2) obliczamy za pomocą całki iterowanej

$$\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b \\ p(x)\leqslant y\leqslant q(x)}} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dy \tag{7}$$

Jeśli zaś obszar jest normalny względem osi $0y$ (rys. 3), to całkę podwójną obliczamy według wzoru

$$\iint\limits_{\substack{a(y)\leqslant x\leqslant b(y) \\ p\leqslant y\leqslant q}} f(x,y)\,dx\,dy=\int_p^q dy\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \tag{8}$$

19.7. Obliczyć całkę podwójną w obszarze normalnym (G) ograniczonym przez proste, których równania podano obok całki

a) $\iint\limits_{(G)} (x+y)\,dx\,dy;\quad x=0,\quad y=0,\quad x+y=1$

b) $\iint\limits_{(G)} y\,dx\,dy;\quad x=0,\quad y=2,\quad y=x$

c) $\iint\limits_{(G)} e^{x+y}\,dx\,dy;\quad x+y=1,\quad x-y=-1,\quad y=0$

d) $\iint\limits_{(G)} (x+y+1)^2\,dx\,dy;\quad x=0,\quad x+y=1,\quad x-y=1$

e) $\iint\limits_{(G)} x\,dx\,dy;\quad x=2,\quad x=6,\quad x-2y+2=0,\quad x-2y+4=0$

Całka podwójna w obszarze ograniczonym przez krzywe

19.8. Obliczyć całkę podwójną w obszarze normalnym (G) ograniczonym przez krzywe, których równania podano obok całki

a) $\iint\limits_{(G)} xy\,dx\,dy;\quad y=x^2,\quad y=0,\quad x=1$

b) $\iint\limits_{(G)} (x+1)\,dx\,dy;\quad xy=1,\quad x=1,\quad x=2,\quad y=0$

c) $\iint\limits_{(G)} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy;\quad xy=1,\quad x=2,\quad y=x$

d) $\iint\limits_{(G)} x\,dx\,dy;\quad y=\frac{1}{2}x^2,\quad x=0,\quad y=2$

e) $\iint\limits_{(G)} \frac{1}{y^2}\,dx\,dy;\quad xy=1,\quad x=2,\quad y=2$

f) $\iint\limits_{(G)} dx\,dy;\quad y=x^2,\quad y=3x+4$

g) $\iint\limits_{(G)} dx\,dy;\quad y=x^2,\quad y=4-x^2$

h) $\iint\limits_{(G)} dx\,dy;\quad y^2=x+4,\quad y^2=-x+4$

i) $\iint\limits_{(G)} 3x^2y\,dx\,dy;\quad y^3=x^2,\quad y=1$

Całka podwójna w obszarze regularnym domkniętym

Jeśli obszar regularny domknięty (G) jest sumą nie zachodzących na siebie obszarów normalnych $(G_1),\dots,(G_n)$, a funkcja f jest w (G) całkowalna, to całkę obliczamy według wzoru

$$\iint\limits_{(G)} f(P)\,dG = \iint\limits_{(G_1)} f(P)\,dG+\dots+\iint\limits_{(G_n)} f(P)\,dG \tag{9}$$

19.9. Obliczyć całkę podwójną w obszarze regularnym domkniętym (G) ograniczonym przez krzywe podane obok całki

a) $\iint\limits_{(G)} dx\,dy;\quad y=\frac{2}{x}$ dla $x>0,\quad y=2x,\quad y=\frac{1}{2}x$

b) $\iint\limits_{(G)} x\,dx\,dy;\quad y=\frac{1}{x}$ dla $x>0,\quad y=x,\quad y=0,\quad x=2$

c) $\iint\limits_{(G)} 3\,dx\,dy;\quad y=0,\quad y=x,\quad y=(x-2)^2$ dla $x\leqslant 2$

d) $\iint\limits_{(G)} 2x\,dx\,dy;\quad y=x^2$ dla $x\geqslant 0,\quad y=\frac{1}{4}x^2$ dla $x\geqslant 0,\ y=1$

e) $\iint\limits_{(G)} (x+2y)\,dx\,dy;\quad y=-\sqrt{x},\quad y=-2\sqrt{x},\quad y=-x$ dla $1\leqslant x\leqslant 4$

f) $\iint\limits_{(G)} 2xy\,dx\,dy;\quad y=x^2$ dla $0\leqslant x\leqslant 1,\quad y=2-x$ dla $1\leqslant x\leqslant 2,\quad y=0$

g) $\iint\limits_{(G)} 2x\,dx\,dy;\quad y^2=x+2,\quad y=-x$

h) $\iint\limits_{(G)} 2xy\,dx\,dy;\quad y=x^2,\quad y=2+|x|$

i) $\iint\limits_{(G)} 2|x|y\,dx\,dy;\quad y=x^2,\quad y=2+|x|$

Pole obszaru płaskiego we współrzędnych prostokątnych

Figura płaska (G) leżąca na płaszczyźnie Oxy jest mierzalna i ma pole

$$G=\iint\limits_{(G)} dx\,dy \tag{10}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy powyższa całka podwójna istnieje.

Każdy obszar regularny jest mierzalny.

Jeśli (G) jest obszarem normalnym względem osi $0x$ (rys. 2), to na podstawie równości (10) i (7) jego pole jest równe

$$G=\iint\limits_{(G)} dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{p(x)}^{q(x)} dy=\int\limits_a^b [q(x)-p(x)]\,dx$$

Analogicznie obliczamy pole obszaru normalnego względem osi $0y$.

19.10. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi

a) $y=x^2,\quad y=x^2/4,\quad x=2$
b) $y^2=4+x,\quad x+3y=0$
c) $y=\ln x,\quad y=x-1,\quad y=-1$
d) $y=x^2$ dla $x\geqslant 0,\quad y=x^2/4$ dla $x\geqslant 0,\quad y=4$
e) $y=2x,\quad y=8-x,\quad x=0$

f) $y = \sin x, \quad y = \cos x$ dla $\pi/4 \leqslant x \leqslant 5\pi/4$
g) $y = x^2 - 2x, \quad y = x$
h) $y = \dfrac{1}{2}x, \quad y = 2x, \quad xy = 2$
i) $y^2 = 1 - x, \quad y = 1 + x$
j) $y = x^2, \quad x^2 + y^2 = 2$ dla $y \geqslant 0$
k) $y = x^2$ dla $x \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 = 2$ dla $x \geqslant 0, \quad y = 0$
l) $xy = 4, \quad y = x, \quad x = 4$
m) $xy = 1, \quad xy = 8, \quad y = x^2, \quad y = x^2/8$

Zmiana kolejności całkowania w całce iterowanej

Jeśli (G) jest obszarem normalnym względem Ox i względem Oy, a funkcja $f(x, y)$ jest w (G) ciągła, to całka podwójna tej funkcji w (G) jest równa pewnej całce iterowanej postaci (7) oraz pewnej całce iterowanej postaci (8). Zastąpienie jednej z tych całek iterowanych przez drugą nazywamy *zmianą kolejności całkowania* w całce iterowanej.

19.11. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej

a) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy$ **b)** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

c) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} f(x,y)dy$ **d)** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx$

e) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x,y)dy$ **f)** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$

g) $\int\limits_{-2}^0 dy \int\limits_{y^2-4}^0 f(x,y)\,dx$ **h)** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\,dy$

i) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$ **j)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y-1}^{y^2} f(x,y)dx$

k) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$ **l)** $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

m) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$ **n)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

19.12. Za pomocą zmiany kolejności całkowania przedstawić sumę całek iterowanych w postaci jednej całki iterowanej

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$

b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{(3-x)/2} f(x,y)dy$

c) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)dy$

Oszacowanie całki podwójnej

Jeśli funkcja $f(x, y)$ jest w obszarze regularnym domkniętym (G) całkowalna i spełnia w tym obszarze nierówność

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M \tag{11}$$

to całka funkcji f w tym obszarze spełnia nierówność

$$mG \leqslant \iint\limits_{(G)} f(x, y)\,dx\,dy \leqslant MG \tag{12}$$

gdzie G jest polem obszaru (G).

19.13. Oszacować całkę funkcji $f(x, y)$ w obszarze (G), mając dane

a) $f(x,y) = x + y + 1, \quad (G) = \{0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2\}$
b) $f(x,y) = xy(x+y), \quad (G) = \{0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant 6\}$
c) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad (G) = \{x^2 + y^2 \leqslant a^2\}, \quad a > 0$
d) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 9, \quad (G) = \{x^2 + y^2 \leqslant 4\}$
e) $f(x,y) = \dfrac{y}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (G) = \{0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$
f) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}, \quad (G) = \{0 = x \leqslant 1, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

g) $f(x,y)=4xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\quad (G)=\{x^2+y^2 \leqslant a^2,\ x \geqslant 0,$
$\quad 0 \leqslant y \leqslant x\}$

Średnia całkowa funkcji dwóch zmiennych

Średnia całkowa funkcji $f(x,y)$ w obszarze (G) jest to iloraz całki funkcji $f(x,y)$ w obszarze (G) przez pole obszaru (G)

$$\frac{1}{G}\iint_{(G)} f(x,y)\,dx\,dy \tag{13}$$

19.14. Obliczyć średnią całkową funkcji $f(x,y)$ w obszarze ograniczonym krzywymi, których równania podano obok funkcji

a) $f(x,y)=2x+y;\quad x=0,\quad y=0,\quad x+y=3$

b) $f(x,y)=x+6y;\quad y=x,\quad y=5x,\quad x=1$

c) $f(x,y)=x;\quad y=x^2-2x,\quad y=x$

Całka podwójna we współrzędnych biegunowych

Współrzędne biegunowe punktu $P=(x,y)$ na płaszczyźnie Oxy (*Zadania I*, s. 66) są to następujące dwie liczby:

r — *współrzędna radialna*; jest to odległość punktu P od początku układu

$$r=OP=\sqrt{x^2+y^2}$$

φ — *współrzędna kątowa*; jest to miara łukowa kąta skierowanego od osi Ox do wektora $\overrightarrow{OP}$, jeśli $OP \neq 0$, natomiast w przypadku $OP=0$ współrzędna kątowa φ jest dowolną liczbą.

Wzory przejścia od współrzędnych x, y do współrzędnych r, φ:

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi \tag{14}$$

Z tych wzorów wynikają następujące równości

$$x^2+y^2=r^2,\quad \frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi \quad \text{dla} \quad x\neq 0,\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad \text{dla} \quad x>0 \tag{15}$$

Element podziału (*Zarys II*, s. 205, rys. 125.1) ma pole

$$\Delta G=r\,\Delta r\,\Delta\varphi$$

Różniczka pola wyraża się we współrzędnych biegunowych wzorem

$$dG=r\,dr\,d\varphi \tag{16}$$

Całka podwójna wyraża się we współrzędnych biegunowych wzorem

$$\iint_{(G)} f(P)\,dG=\iint_{(G)} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{(\Omega)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi \tag{17}$$

gdzie (Ω) jest zbiorem par wartości (r,φ) przyporządkowanych punktom (x,y) zbioru (G). To przyporządkowanie powinno spełniać pewne ogólne warunki (s. 122).

Jeśli zbiór (G) (rys. 4a) jest określony nierównościami

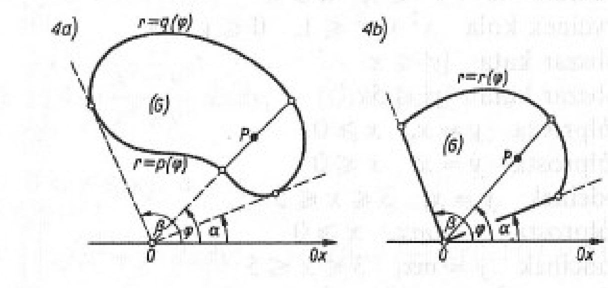
$$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \qquad p(\varphi) \leqslant r \leqslant q(\varphi) \tag{18}$$

gdzie:

1° funkcje $p(\varphi)$, $q(\varphi)$ są ciągłe w przedziale $\langle\alpha;\beta\rangle$,

2° $0 \leqslant p(\varphi) < q(\varphi)$ wewnątrz tego przedziału,

3° $0 < \beta-\alpha \leqslant 2\pi$,



to wzór (17) przyjmuje postać

$$\iint_{(G)} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{p(\varphi)}^{q(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr \tag{19}$$

Jeśli zaś zbiór (G) (rys. 4b) jest określony nierównościami

$$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \qquad 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi) \tag{20}$$

gdzie funkcja $r(\varphi)$ jest ciągła w przedziale $\langle\alpha;\beta\rangle$ i dodatnia wewnątrz tego przedziału, przy czym $0<\beta-\alpha \leqslant 2\pi$, to zachodzi równość

$$\iint_{(G)} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr \tag{21}$$

19.15. Figurę określoną we współrzędnych biegunowych rozpoznać i określić za pomocą współrzędnych prostokątnych

a) $r=1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$
b) $0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$
c) $0 \leqslant r \leqslant 1, \quad |\varphi| \leqslant \pi/4$
d) $1 \leqslant r \leqslant 3, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
e) $r = 1/\cos\varphi, \quad |\varphi| < \pi/2$
f) $r = 1/\cos\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$
g) $0 \leqslant r \leqslant 1/\cos\varphi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$
h) $r = 2\sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$
i) $0 \leqslant r \leqslant 2\sin\varphi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$
j) $0 \leqslant r \leqslant 3\sin\varphi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$
k) $2\sin\varphi \leqslant r \leqslant 3\sin\varphi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$

19.16. Figurę określoną we współrzędnych prostokątnych określić za pomocą współrzędnych biegunowych

a) półokrąg $\quad x^2+y^2 = 1, \quad y \geqslant 0$
b) okrąg $\quad x^2+y^2=1$
c) koło $\quad x^2+y^2 \leqslant 1$
d) pierścień kołowy $\quad 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$
e) półkole $\quad x^2+y^2 \leqslant 1, \quad x \geqslant 0$
f) wycinek koła $\quad x^2+y^2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant x$
g) obszar kąta $\quad |y| \leqslant x$
h) obszar kąta $\quad |y| \leqslant 5x$
i) półprosta $\quad y = x, \quad x \geqslant 0$
j) półprosta $\quad y = x, \quad x \leqslant 0$
k) odcinek $\quad y = x, \quad 3 \leqslant x \leqslant 5$
l) półprosta $\quad y = mx, \quad x \geqslant 0$
m) odcinek $\quad y = mx, \quad 3 \leqslant x \leqslant 5$
n) okrąg $\quad x^2+(y-c)^2 = c^2, \quad c > 0$
o) koło $\quad x^2+(y-c)^2 \leqslant c^2, \quad c > 0$
p) prosta $\quad x+y=1$
r) prosta $\quad y = mx+1$
s) parabola $\quad y^2 = 2x+1$

Obliczanie całek podwójnych za pomocą współrzędnych biegunowych

19.17. Obliczyć za pomocą współrzędnych biegunowych całkę podwójną

a) $\iint\limits_{(G)} (x^2+y^2)\,dx\,dy, \qquad (G) = \{x^2+y^2 \leqslant a^2\}, \quad a > 0$

b) $\iint\limits_{(G)} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad (G) = \{x^2+y^2 \leqslant 1\}$

c) $\iint\limits_{(G)} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \qquad (G) = \{x^2+y^2 \leqslant 1, \quad y \geqslant 0\}$

d) $\iint\limits_{(G)} \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy,$

$(G) = \{x^2+y^2 \leqslant a^2, \quad |y| \leqslant x\}, \ a > 0$

e) $\iint\limits_{(G)} (x^2+4y+9)\,dx\,dy, \qquad (G) = \{x^2+y^2 \leqslant 4\}$

f) $\iint\limits_{(G)} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,dx\,dy,$

$(G) = \{x^2+y^2 \leqslant 16, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0\}$

g) $\iint\limits_{(G)} \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy, \quad (G) = \{x^2+y^2 \leqslant 1, \ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0\}$

h) $\iint\limits_{(G)} 4xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad (G) = \{x^2+y^2 \leqslant a^2,$

$0 \leqslant y \leqslant x\}, \ a > 0$

i) $\iint\limits_{(G)} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad (G) = \{x^2+(y-1)^2 \leqslant 1\}$

j) $\iint\limits_{(G)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \qquad (G) = \{x^2+(y-1)^2 \leqslant 1, \quad x \geqslant 0\}$

k) $\iint\limits_{(G)} xy\,dx\,dy, \qquad (G) = \{(x-1)^2+y^2 \leqslant 1, \quad y \geqslant 0\}$

l) $\iint\limits_{(G)} xy\,dx\,dy, \qquad (G) = \{(x-1)^2+y^2 \leqslant 1, \quad y \geqslant x\}$

m) $\iint\limits_{(G)} xy(x^2+y^2)^{-3/2}\,dx\,dy,$

$(G) = \{(x-1)^2+y^2 \leqslant 1, \quad x \geqslant 1, \quad y \geqslant 0\}$

Pole obszaru płaskiego we współrzędnych biegunowych

Ze wzoru (10) i z równości (19) przy podstawieniu $f(x, y) = 1$ wynika, że obszar (G) (rys. 4a) określony nierównościami (18) ma pole

$$G = \iint\limits_{(G)} dx\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{p(\varphi)}^{q(\varphi)} r\,dr = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} [q^2(\varphi) - p^2(\varphi)]\,d\varphi \tag{22}$$

Analogicznie, ze wzoru (10) i z równości (21) wynika, że obszar (G) (rys. 4b) określony nierównościami (20) ma pole

$$G = \iint\limits_{(G)} dx\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} r\,dr = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi \tag{23}$$

19.18. Obliczyć za pomocą współrzędnych biegunowych pole obszaru

a) ograniczonego jedną pętlą lemniskaty $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $|\varphi| \leqslant \pi/2$;

b) ograniczonego pętlą krzywej czterolistnej $r = a \sin 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$;

c) ograniczonego kardioidą $r = a(1+\cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;

d) będącego różnicą wnętrza kardioidy $r = a(1+\cos\varphi)$ i koła $r \leqslant a$;

e) będącego różnicą koła $r \leqslant a$ i wnętrza kardioidy $r = a(1+\cos\varphi)$;

f) będącego iloczynem koła $r \leqslant 2a$ i półpłaszczyzny $x \geqslant a$;

g) będącego iloczynem wnętrza kardioidy $r = 4(1+\cos\varphi)$ i półpłaszczyzny $x \geqslant 3$;

h) ograniczonego parabolą $y = x^2$ i prostą $y = mx$, $m > 0$;

i) ograniczonego hiperbolą $xy = 1$ i półprostymi $y = ax$, $y = bx$ dla $x \geqslant 0$, $0 < a < b$.

Wskazówka. Lemniskata i inne krzywe w układzie biegunowym — zob. *Zadania I*, s. 165, 259.

Objętość figury przestrzennej

Niech (G) oznacza obszar regularny domknięty na płaszczyźnie Oxy.

1. Figura przestrzenna (V) zawarta między wykresem (S) funkcji $z(x, y)$ ciągłej i nieujemnej w (G) a obszarem (G) (*Zarys II*, s. 199, rys. 124.1)

$$(V) = \{x, y, z\colon\quad (x, y) \in (G),\quad 0 \leqslant z \leqslant z(x, y)\} \tag{24}$$

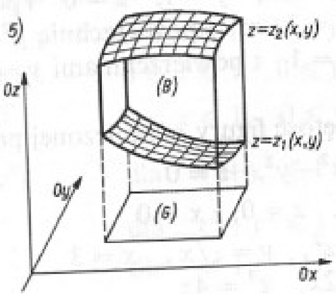
ma objętość

$$V = \iint\limits_{(G)} z(x, y)\,dx\,dy \tag{25}$$

2. Figura przestrzenna (B) zawarta między wykresami funkcji $z_1(x, y)$ i $z_2(x, y)$ ciągłych w (G) i spełniających nierówność $z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y)$ (rys. 5)

$$(B) = \{(x, y, z)\colon\quad (x, y) \in (G),\quad z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\} \tag{26}$$

5)



ma objętość

$$B = \iint\limits_{(G)} [z_2(x, y) - z_1(x, y)]\,dx\,dy \tag{27}$$

19.19. Obliczyć objętość figury (24) przy poniższych danych. Sprawdzić, czy funkcja $z(x, y)$ jest nieujemna w (G).

a) $(G) = \{|x| \leqslant 1,\quad |y| \leqslant 1\}$, $\quad z(x, y) = 2x + 3y + 7$

b) $(G) = \{x^2 + y^2 \leqslant 9\}$, $\quad z(x, y) = 9 - x - y$

19.20. Obliczyć objętość figury (24) przy poniższych danych. Zbadać dla jakich a, b, c, k, funkcja $z(x, y)$ jest nieujemna w (G)

a) $(G) = \{|x| \leqslant k,\quad |y| \leqslant k\}$, $\quad z(x, y) = ax + by + c$

b) $(G) = \{x^2 + y^2 \leqslant k^2\}$, $\quad z(x, y) = ax + by + c$

19.21. Obliczyć objętość figury ograniczonej płaszczyzną $z = 0$ oraz powierzchnią

a) $z = (1-x^2)(1-y^2)$ $\qquad$ **b)** $z = 1 - x^2 - y^2$

c) $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad$ **d)** $z = 1 - |x| - |y|$

W s k a z ó w k a. Wyznaczyć linie przecięcia się płaszczyzny $z=0$ z daną powierzchnią.

19.22. Obliczyć objętość figury ograniczonej płaszczyznami

a) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$

b) $x+y+z=6, \quad 3x+y=6, \quad 3x+2y=12, \quad z=0, \quad y=0$

c) $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y=4$ i powierzchnią $z=1+x^2+y^2$

d) $x=0, \quad y=2x, \quad y=1, \quad z=0$ i powierzchnią $z=x^2+y^2$

e) $z=0, \quad z=3-x$ i powierzchnią $y^2=3x$

f) $z=0, \quad y=1$ i powierzchniami $y=x^2, \quad z=x^2+y^2$

19.23. Obliczyć objętość figury ograniczonej powierzchniami

a) $2z=4-x^2-y^2, \quad z=0$

b) $z=\sqrt{xy}, \quad z=0, \quad x=0$

c) $4x=y^2+z^2, \quad y=\sqrt{x}, \quad x=3$

d) $x^2+y^2=2x, \quad z^2=4x$

e) $4z=16-x^2-y^2, \quad z=0, \quad x^2+y^2=4$

19.24. Obliczyć objętość części wspólnej

a) dwóch walców: $x^2+y^2 \leqslant a^2$ i $x^2+z^2 \leqslant a^2$;

b) dwóch kul o promieniu a, których środki są oddalone od siebie o $2(a-h)$, gdzie $0<h<a$;

c) kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$ i walca $x^2+y^2 \leqslant ax$ (bryła Vivianiego).

Pole płata

Pole płata danego jawnie. Jeśli płat (S) (*Zarys II*, s. 200) jest dany w przestrzeni $Oxyz$ równaniem jawnym

$$z=z(x,y), \quad (x,y)\in(G) \tag{28}$$

gdzie:

1° zbiór (G), zwany *rzutem płata* (S), jest obszarem regularnym domkniętym na płaszczyźnie Oxy, a jego brzegiem jest jedna krzywa zamknięta zwykła częściami gładka,

2° $z(x,y)$ jest funkcją klasy C^1 w domkniętym zbiorze (G),

to płat (S) ma pole

$$S=\iint_{(G)} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy \tag{29}$$

U w a g a. Dla istnienia całki (29) koniunkcja założeń 1° i 2° jest warunkiem wystarczającym, ale nie koniecznym. W zadaniach 19.25 i)—n) założenia te nie są spełnione, mimo to całka (29) istnieje (jako całka niewłaściwa — s. 118).

19.25. Obliczyć pole płata danego równaniem jawnym

a) $z=3x+4y+5, \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \quad 0\leqslant y\leqslant 1$

b) $z=ax+by+c, \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \quad 0\leqslant y\leqslant 1$

c) $z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \quad 0\leqslant y\leqslant 1$

d) $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ dla $x^2+y^2\leqslant 1$

e) $z=x^2+y^2$ dla $x^2+y^2\leqslant 1$

f) $z=xy$ dla $x^2+y^2\leqslant 3$

g) $z=\frac{1}{2}x^2, \quad 0\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}, \quad \frac{1}{2}x\leqslant y\leqslant 2x$

h) $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2\leqslant 16$

i) $z=\sqrt{2xy}, \quad 0\leqslant x\leqslant a, \quad 0\leqslant y\leqslant a$

j) $z=\sqrt{x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2\leqslant a^2, \quad -x\leqslant y\leqslant x$

k) $z=\sqrt{a^2-y^2}$ dla $x^2+y^2\leqslant a^2$ (skrzyżowanie walców)

l) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ dla $x^2+y^2\leqslant 1, \quad x>0$ (powierzchnia śrubowa)

m) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2\leqslant ax$ (płat Vivianiego)

n) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2\leqslant a^2$ (półsfera)

Pole płata danego parametrycznie. Jeśli płat (S) jest określony w przestrzeni $Oxyz$ równaniami parametrycznymi

$$x=x(u,v), \quad y=y(u,v), \quad z=z(u,v); \quad (u,v)\in(\Omega) \tag{30}$$

przy czym spełnione są następujące założenia:

1° zbiór (Ω), leżący na płaszczyźnie parametrów u, v, jest obszarem regularnym domkniętym, ograniczonym jedną krzywą zamkniętą zwykłą, częściami gładką,

2° funkcje (30) są klasy C^1 w pewnym obszarze zawierającym zbiór (Ω),

3° różnym punktom wnętrza (Ω) odpowiadają różne punkty na (S),

4° wyrażenie

$$H = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}^2 \tag{31}$$

jest wewnątrz (Ω) różne od 0,

to płat (S) ma pole

$$S = \iint_{(\Omega)} \sqrt{H}\, du dv \tag{32}$$

Uwaga

1. Niekiedy rolę parametrów u, v spełniają współrzędne cylindryczne r, φ lub sferyczne φ, θ, lub inne.

Uwaga

2. Wyrażenie (31) jest sumą kwadratów minorów macierzy jakobianowej

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,z)} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$$

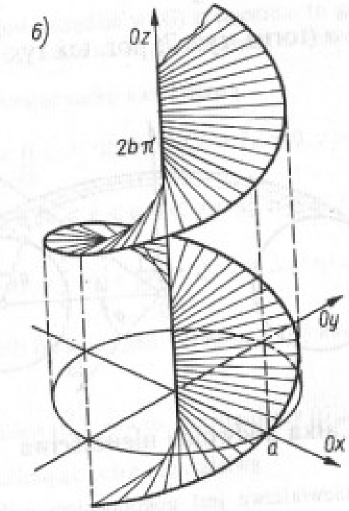
19.26. Obliczyć pole płata danego równaniami parametrycznymi (A, a, b — stałe dodatnie)

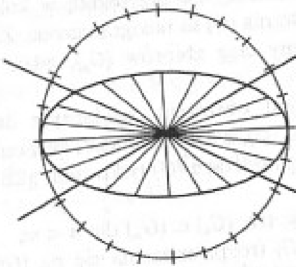
a) $\left.\begin{aligned} x &= u \\ y &= a\cos v \\ z &= a\sin v \end{aligned}\right\}\quad |u| \leqslant a\sin v,\quad 0 \leqslant v \leqslant \pi$

(skrzyżowanie walców, por. zad. 19.25k);

b) $\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= b\varphi \end{aligned}\right\}\quad 0 \leqslant r \leqslant a,\quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$

gdzie α, β — liczby dane, $\alpha < \beta$; jest to ogólne określenie powierzchni śrubowej (na rys. 6 przyjęto $b = a/\pi$, por. zad. 19.25l);





c) $\left.\begin{aligned} x &= a\sin\theta\cos\varphi \\ y &= a\sin\theta\sin\varphi \\ z &= a\cos\theta \end{aligned}\right\}\quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\quad \gamma \leqslant \theta \leqslant \delta$

gdzie liczby α, β, γ, δ są dane i spełniają warunki: $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $0 < \gamma < \delta < \pi$ (jest to prostokąt sferyczny);

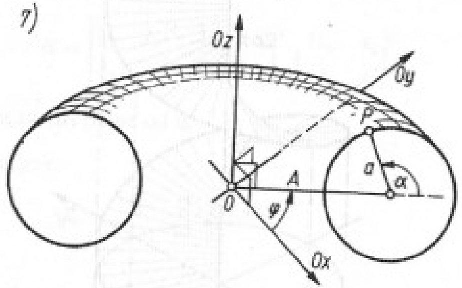
d) $\left.\begin{aligned} x &= a\sin\theta\cos\varphi \\ y &= a\sin\theta\sin\varphi \\ z &= a\cos\theta \end{aligned}\right\}\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\quad |\varphi| \leqslant \pi/2 - \theta$

(płat Vivianiego, por. zad. 19.25m);

e) $\left.\begin{array}{l} x=(A+a\cos\alpha)\cos\varphi \\ y=(A+a\cos\alpha)\sin\varphi \\ z=a\sin\alpha \end{array}\right\}\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$

gdzie $A>a$ (torus, rys. 7; por. też rys. 7 na s. 88).

7)



Całka podwójna niewłaściwa

Całka podwójna niewłaściwa jest uogólnieniem całki podwójnej (5) (którą będziemy nazywali właściwą) na przypadki, w których funkcja podcałkowa $f(x,y)$ lub zbiór całkowania (G) są nieograniczone. Zakładamy, że funkcja f jest ciągła w (G). Obieramy ciąg zbiorów (G_n), gdzie $n=1,2,\ldots$, spełniających następujące warunki:

1° każdy zbiór (G_n) jest obszarem regularnym domkniętym, zawartym w domknięciu obszaru (G), z zastrzeżeniem, że punkty brzegowe zbioru (G_n) mogą leżeć na brzegu obszaru (G) tylko tam, gdzie funkcja f jest określona i ciągła,

2° ciąg (G_n) jest *rosnący*, tzn. $(G_n)\subset(G_m)$ dla $n<m$,

3° ciąg (G_n) *dąży do* (G) (rozprzestrzenia się na (G)), tzn. każdy domknięty ograniczony podzbiór obszaru (G) zawiera się w pewnym zbiorze (G_n).

W każdym ze zbiorów (G_n) tworzymy całkę (właściwą) funkcji f i obliczamy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{(G_n)} f(x,y)\,dx\,dy \tag{33}$$

Jeśli ta granica istnieje, jest skończona i nie zależy od wyboru zbiorów (G_n), to nazywamy ją *całką podwójną niewłaściwą* funkcji f w obszarze (G), oznaczamy tym samym symbolem, co całkę właściwą

$$\iint\limits_{(G)} f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{(G_n)} f(x,y)\,dx\,dy \tag{34}$$

i mówimy, że całka niewłaściwa (34) *istnieje* (jest *zbieżna*). W przeciwnym razie mówimy, że ta całka *nie istnieje* (jest *rozbieżna*).

Uwaga

1. Jeśli funkcja f jest wszędzie w (G) nieujemna, to granica (33) nie zależy od wyboru zbiorów (G_n) i można te zbiory obrać w dowolny sposób.

Na przykład, obliczając całkę niewłaściwą

$$I_1=\iint\limits_{(G)} e^{-x-y}\,dx\,dy,\quad (G)=\{x>0,y>0\}$$

przyjmujemy $(G_n)=\{0\leqslant x\leqslant n, 0\leqslant y\leqslant n\}$, $n\to\infty$ i otrzymujemy

$$\iint\limits_{(G_n)} e^{-x-y}\,dx\,dy=\int\limits_0^n dx\int\limits_0^n e^{-x}\cdot e^{-y}\,dy=(1-e^{-n})^2\to 1;\quad I_1=1$$

Podobnie jest, jeśli funkcja f jest wszędzie w (G) niedodatnia.

Uwaga

2. Niekiedy zamiast (G_n), $n\to\infty$, przyjmujemy (G_h), $h=\dfrac{1}{n}\to 0$.

Na przykład, obliczając całkę niewłaściwą

$$I_2=\iint\limits_{(G)}\frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy,\quad (G)=\{0<x<1,0<y<1\}$$

przyjmujemy $(G_h)=\{h\leqslant x\leqslant 1, h\leqslant y\leqslant 1\}$, $0<h<1$, $h\to 0$, i otrzymujemy

$$\iint\limits_{(G_h)}\frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy=\int\limits_h^1 dx\int\limits_h^1\frac{1}{\sqrt{xy}}\,dy=4(1-\sqrt{h})^2\to 4;\quad I_2=4$$

Uwagi

3. Całka właściwa jest granicą sumy, całka niewłaściwa jest granicą całki.

4. Jeśli zbiór całkowania lub funkcja podcałkowa są nieograniczone, to całka właściwa nie istnieje, a całka niewłaściwa może istnieć.

5. W każdym przypadku, w którym istnieje całka właściwa, istnieje też całka niewłaściwa i ma tę samą wartość; dlatego obie te całki oznaczamy tym samym symbolem.

19.27. Obliczyć całkę niewłaściwą w obszarze $(G)=\{0<x<1,\ 0<y<1\}$

a) $\displaystyle\iint\limits_{(G)}\frac{x}{\sqrt{y}}\,dx\,dy$ b) $\displaystyle\iint\limits_{(G)}\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$

c) $\iint\limits_{(G)} \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,dy$ d) $\iint\limits_{(G)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{y(1-x^2)}}$

e) $\iint\limits_{(G)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$ f) $\iint\limits_{(G)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{xy(1-x)(1-y)}}$

g) $\iint\limits_{(G)} \frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$ h) $\iint\limits_{(G)} \sqrt[3]{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$

i) $\iint\limits_{(G)} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$

19.28. Obliczyć całki niewłaściwe występujące w zad. 19.6.

19.29. Obliczyć całkę niewłaściwą w obszarze $(G) = \{0 < x^2+y^2 < a^2\}$.

W s k a z ó w k a. Zastosować współrzędne biegunowe.

a) $\iint\limits_{(G)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ b) $\iint\limits_{(G)} \frac{dx\,dy}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}$

c) $\iint\limits_{(G)} \frac{dx\,dy}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^2}}$ d) $\iint\limits_{(G)} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

e) $\iint\limits_{(G)} \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ f) $\iint\limits_{(G)} \frac{\ln(a-\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

g) $\iint\limits_{(G)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ h) $\iint\limits_{(G)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

19.30. Obliczyć całkę niewłaściwą po całej płaszczyźnie Oxy.

W s k a z ó w k a. Zastosować współrzędne biegunowe.

a) $\iint\limits_{Oxy} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ b) $\iint\limits_{Oxy} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

c) $\iint\limits_{Oxy} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ d) $\iint\limits_{Oxy} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$

19.31. Obliczyć całkę niewłaściwą w obszarze $(G) = \{x > 0, y > 0\}$

a) $\iint\limits_{(G)} (x+y)e^{-(x+y)}\,dx\,dy$ b) $\iint\limits_{(G)} xye^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$

19.32. Obliczyć całkę niewłaściwą w obszarze $(G) = \{0 < x, |y| < x\}$

a) $\iint\limits_{(G)} e^{-x^2}\,dx\,dy$ b) $\iint\limits_{(G)} e^{-2x-y}\,dx\,dy$

c) $\iint\limits_{(G)} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$ d) $\iint\limits_{(G)} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$

19.33. Obliczenie całki Laplace'a. Udowodnić, że całka niewłaściwa

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

zwana *całką Laplace'a* (*Zarys II*, s. 214), ma wartość $L = \sqrt{\pi}$.

W s k a z ó w k a. Całki Laplace'a nie można obliczyć w zwykły sposób, gdyż $\int e^{-x^2}dx$ jest całką nieelementarną (s. 13). Należy skorzystać ze związku między całką Laplace'a a podobną do niej całką

$$M = \iint\limits_{Oxy} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

Przyjmując ciąg kwadratów $(G_n) = \{|x| \leqslant n, |y| \leqslant n\}$, $n \to \infty$, wykazać, że $M = L^2$, a następnie ciąg kół $(K_n) = \{x^2+y^2 \leqslant n^2\}$, $n \to \infty$, wykazać, że $M = \pi$. Z tych dwóch równości wynika, że $L = \sqrt{\pi}$.

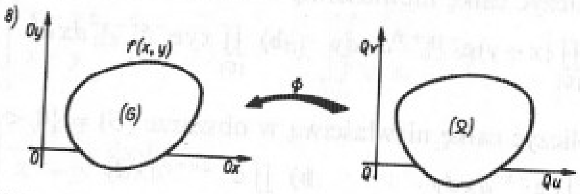
Zbieżność bezwzględna i zbieżność warunkowa całek niewłaściwych podwójnych i potrójnych przedstawia się inaczej niż całek pojedynczych. Całka niewłaściwa pojedyncza może być bezwzględnie zbieżna lub warunkowo zbieżna (*Zarys II*, s. 182). Natomiast całki niewłaściwe podwójne i potrójne — jeśli są zbieżne — to są bezwzględnie zbieżne.

Zmiana zmiennych w całce podwójnej

Jeśli obszar regularny domknięty (G) jest w przekształceniu

$$\Phi = \{x = x(u, v), \quad y = y(u, v)\}$$

obrazem regularnego domkniętego obszaru (Ω) (rys. 8)



przy czym:

1° Φ jest klasy C^1 w pewnym obszarze zawierającym obszar (Ω),

2° różnym punktom wnętrza (Ω) odpowiadają różne punkty obszaru (G),

3° jakobian przekształcenia Φ

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \tag{35}$$

jest różny od 0 wewnątrz (Ω),

to zachodzi następujący *wzór na zmianę zmiennych* w całce podwójnej według przekształcenia Φ:

$$\iint_{(G)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{(\Omega)} f(x(u, v), y(u, v))\,|J|\,du\,dv \tag{36}$$

gdzie $|J|$ jest bezwzględną wartością jakobianu (35), f jest dowolną funkcją ciągłą w (G).

19.34. Stosując przekształcenie: $\dfrac{x}{3} = u\cos v$, $\dfrac{y}{4} = u\sin v$, obliczyć całkę

$$\iint_{(G)} \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}\right) dx\,dy, \quad (G) = \left\{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leqslant 1\right\}$$

W s k a z ó w k a : $(\Omega) = \{0 \leqslant u \leqslant 1, \quad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi\}$.

19.35. Stosując odpowiednie przekształcenie, obliczyć całkę

a) $\displaystyle\iint_{(G)} \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}\right) dx\,dy, \quad (G) = \left\{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leqslant 1\right\}$

b) $\displaystyle\iint_{(G)} \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}\,dx\,dy, \quad (G) = \left\{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1\right\}$

19.36. Stosując przekształcenie: $\dfrac{x}{a} = u\cos v$, $\dfrac{y}{b} = u\sin v$, $a > 0$, $b > 0$, obliczyć całkę

a) $\displaystyle\iint_{(G)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx\,dy, \quad (G) = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, |y| \leqslant mx\right\}, \quad m > 0$

b) $\displaystyle\iint_{(G)} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx\,dy, \quad (G) = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, \ |y| \leqslant \frac{b}{a}x\right\}$

19.37. Za pomocą przekształcenia: $xy = u$, $y/x = v$ obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi

$$xy = a^2/2, \quad xy = 2a^2, \quad y = x/2, \quad y = 2x \quad (a > 0)$$

19.38. Za pomocą przekształcenia: $xy = u$, $y^2/x = v$ obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 4x$$

19.39. Obszar (G) jest ograniczony prostymi: $x + y = 1$, $x + y = -1$, $x - y = 1$, $x - y = -1$. Stosując przekształcenie: $x + y = u$, $x - y = v$, obliczyć całkę $\iint_{(G)} x^2\,dx\,dy$.

19.40. Na płaszczyźnie Oxy jest dana hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ i na niej dwa punkty A, B o odciętej s, $s > 1$, i rzędnych wzajemnie przeciwnych. Obszar (G) jest ograniczony odcinkami OA, OB i łukiem

AB hiperboli. Stosując przekształcenie: $x = u\operatorname{ch} v,\ y = u\operatorname{sh} v$, obliczyć całkę

$$G = \iint_{(G)} dx\,dy, \qquad G_x = \iint_{(G)} x\,dx\,dy, \qquad G_{xx} = \iint_{(G)} x^2\,dx\,dy$$

Wskazówka. Równania $x = \operatorname{ch} v,\ y = \operatorname{sh} v,\ v \in \mathscr{R}$, są równaniami parametrycznymi prawej gałęzi hiperboli $x^2 - y^2 = 1$.

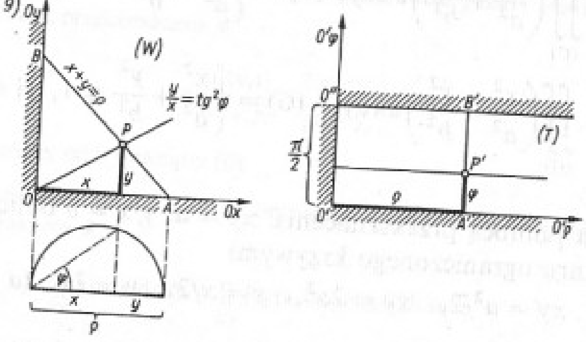
Współrzędne strefowe na płaszczyźnie

Obszar $(W) = \{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ na płaszczyźnie Oxy jest w przekształceniu

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos^2\varphi \\ y &= \varrho\sin^2\varphi \qquad \varrho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2 \end{aligned} \tag{37}$$

obrazem półpasa $(T) = \{\varrho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}$ na płaszczyźnie $O'\varrho\varphi$ (rys. 9)

9)



przy czym zachodzą równości

$$x + y = \varrho, \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}^2\varphi, \qquad J = \frac{D(x,y)}{D(\varrho,\varphi)} = 2\varrho\cos\varphi\sin\varphi \tag{38}$$

Przekształcenie (37) przekształca wnętrze (T) na wnętrze (W) i wewnątrz (T) jest odwracalne.

Każdy punkt $P = (x, y)$, należący do (W) i różny od punktu $O = (0, 0)$, jest obrazem pewnego punktu $P' = (\varrho, \varphi)$ należącego do (T); liczby ϱ, φ są nazywane *współrzędnymi strefowymi* punktu P; można je wyznaczyć geometrycznie, co przedstawiono na rys. 9 (lewa dolna część rysunku).

Trójkąt OAB, zwany *strefą*, jest obrazem prostokąta $O'A'B'O''$, przy czym odcinki OA, AB i BO są odpowiednio obrazami odcinków $O'A'$, $A'B'$ i $B'O''$; nadto punkt O jest obrazem odcinka $O'O''$.

19.41. Stosując przekształcenie (37), obliczyć poniższe całki, w których obszar całkowania (G) jest trójkątem ograniczonym prostymi: $x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0$

a) $\displaystyle\iint_{(G)} e^{(x+y)^2}\,dx\,dy$ **b)** $\displaystyle\iint_{(G)} \frac{dx\,dy}{1+(x+y)^2}$

c) $\displaystyle\iint_{(G)} (x+y)\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$ **d)** $\displaystyle\iint_{(G)} (x+y)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$

e) $\displaystyle\iint_{(G)} \frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$ **f)** $\displaystyle\iint_{(G)} \frac{1}{x+y}\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$

g) $\displaystyle\iint_{(G)} \frac{1}{x+y}\,dx\,dy$

19.42. Za pomocą przekształcenia (37) obliczyć poniższą całkę w zbiorze (G) ograniczonym liniami danymi obok całki

a) $\displaystyle\iint_{(G)} \frac{xy}{(x+y)^3}\,dx\,dy$, trzy proste: $y = x,\ y = 0,\ x = 1$

b) $\displaystyle\iint_{(G)} \frac{1}{x+y}\,dx\,dy$, hiperbola $xy = 1$, prosta $x + y = 4$

Wskazówka. Stosując przekształcenie (37) do linii ograniczających obszar (G), otrzymamy linie ograniczające obszar (Ω).

19.43. Za pomocą przekształcenia (37) obliczyć pole obszaru (G) zawartego w I ćwiartce płaszczyzny Oxy i ograniczonego krzywą (S) o równaniu

a) $(x+y)^4 = 16xy$ **b)** $(x+y)^3 = 8xy$

W s k a z ó w k a. Krzywa (S) jest symetryczna względem prostej $y = x$, ponieważ jej równanie nie ulega zmianie, gdy zmienne x, y zamieniają się miejscami. Aby zbadać kształt tej krzywej, stosujemy obrót układu współrzędnych o kąt $\alpha = 45°$ (*Zadania I*, s. 64), tj. przekształcenie $x = (X-Y)/\sqrt{2}$, $y = (X+Y)/\sqrt{2}$. Dla a) otrzymujemy $Y^2 = X^2 - X^4/2$, czyli $Y = \pm X\sqrt{1-X^2/2}$. Jest to lemniskata z zad. 12.1b powiększona $\sqrt{2}$ razy (w *Zadaniach I*, s. 254). Dla b) otrzymujemy podobną krzywą. Stosując do tych krzywych przekształcenie (37), otrzymamy krzywe ograniczające obszar (Ω).

Rozdział **20**

Całka potrójna

Obszary regularne i normalne w $\mathscr{R}^3$

Przestrzeń $\mathscr{R}^3$, czyli trójwymiarowa przestrzeń rzeczywista – zob. *Zarys. I*, s. 342. Obszar ograniczony, którego brzeg jest sumą skończenie wielu płatów danych jawnie, czyli płatów o równaniach $z = z(x, y)$ lub $x = x(y, z)$ lub $y = y(x, z)$, nazywamy *obszarem regularnym*, a jego domknięcie — *obszarem regularnym domkniętym*. Obszar regularny i jego domknięcie mają tę samą objętość.

Najprostsze obszary regularne domknięte to:

- *prostopadłościan* (*Zarys II*, s. 216, rys. 128.1)

$$(V) = \{a \leqslant x \leqslant b, \quad p \leqslant y \leqslant q, \quad g \leqslant z \leqslant h\} \tag{1}$$

gdzie $a < b$, $p < q$, $g < h$;

- *obszar normalny względem płaszczyzny Oxy* (*Zarys II*, s. 220, rys. 129.1)

$$(V) = \{(x, y) \in (G), \quad g(x, y) \leqslant z \leqslant h(x, y)\} \tag{2}$$

gdzie (G) jest obszarem regularnym domkniętym na płaszczyźnie Oxy, a funkcje g, h są ciągłe w (G) i $g(x, y) < h(x, y)$ wewnątrz (G); jeśli przy tym (G) jest obszarem normalnym względem Ox, to obszar (2) wyraża się wzorem

$$(V) = \{a \leqslant x \leqslant b, \quad p(x) \leqslant y \leqslant q(x), \quad g(x, y) \leqslant z \leqslant h(x, y)\} \tag{3}$$

- *obszary normalne względem płaszczyzny Oyz* lub Oxz określamy podobnie.

Prostopadłościan (1) jest obszarem normalnym względem wszystkich trzech płaszczyzn układu $Oxyz$.

Definicja całki potrójnej

Całka potrójna funkcji f w zbiorze (V), oznaczana symbolami

$$\iiint\limits_{(V)} f(P)dV \quad \text{lub} \quad \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dx\,dy\,dz \tag{4}$$

jest to liczba wyznaczona przez funkcję f i zbiór (V) według definicji (*Zarys II*, s. 216), którą w skrócie zapisujemy wzorem

$$\iiint\limits_{(V)} f(P)dV = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(P_j)\Delta V_j \tag{5}$$

gdzie: ΔV_j jest objętością elementu podziału, P_j jest argumentem należącym do elementu (ΔV_j), λ jest średnicą podziału.

Jeżeli granica (5) jest skończona i nie zależy ani od sposobu dzielenia zbioru (V) na elementy (ΔV_j), ani od wyboru argumentów P_j, to mówimy, że całka (5) istnieje, a funkcja f jest całkowalna w zbiorze (V). Warunkiem koniecznym istnienia całki (5) jest ograniczoność funkcji f w (V). Warunkiem wystarczającym istnienia tej całki jest ciągłość funkcji f w (V).

Obliczenie całki potrójnej w obszarze normalnym sprowadza się do obliczenia całki iterowanej (trzykrotnej), której postać zależy od nierówności (1), (2) lub (3), określających zbiór całkowania:

$$\iiint\limits_{\left\{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ p\leqslant y\leqslant q\\ g\leqslant z\leqslant h}\right\}} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int_a^b dx\int_p^q dy\int_g^h f(x,y,z)dz \tag{6}$$

$$\iiint\limits_{\left\{\substack{(x,y)\in(G)\\ g(x,y)\leqslant z\leqslant h(x,y)}\right\}} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(x,y)\in(G)} dx\,dy\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz \tag{7}$$

$$\iiint\limits_{\left\{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ p(x)\leqslant y\leqslant q(x)\\ g(x,y)\leqslant z\leqslant h(x,y)}\right\}} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int_a^b dx\int_{p(x)}^{q(x)} dy\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz \tag{8}$$

Reguły dotyczące kolejności całkowania są takie same, jak dla całki podwójnej.

20.1. Obliczyć całkę potrójną w prostopadłościanie

a) $\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)dx\,dy\,dz$,
$(V)=\{0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 2,\quad 0\leqslant z\leqslant 3\}$

b) $\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)^2dx\,dy\,dz$,
$(V)=\{-2\leqslant x\leqslant -1,\quad 0\leqslant y\leqslant 2,\quad -1\leqslant z\leqslant 1\}$

c) $\iiint\limits_{(V)} 2xe^{x^2+y+z}dx\,dy\,dz$,
$(V)=\{-1\leqslant x\leqslant 0,\quad -1\leqslant y\leqslant 0,\quad -1\leqslant z\leqslant 0\}$

d) $\iiint\limits_{(V)} y\cos(z+x)dx\,dy\,dz$,
$(V)=\left\{0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4},\quad 2\leqslant y\leqslant 4,\quad 0\leqslant z\leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$

e) $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz$,
$(V)=\{0\leqslant x\leqslant 1,\quad 1\leqslant y\leqslant 3,\quad 0\leqslant z\leqslant 1\}$

f) $\iiint\limits_{(V)} xyze^{x+y+z}dx\,dy\,dz$,
$(V)=\{0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\quad 0\leqslant z\leqslant 1\}$

20.2. Obliczyć całkę potrójną $\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz$ w obszarze normalnym

a) $(V)=\{\ 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant x,\quad 0\leqslant z\leqslant x+y\}$
b) $(V)=\{\ 0\leqslant x\leqslant 1,\quad x\leqslant y\leqslant 1,\quad x\leqslant z\leqslant y\}$
c) $(V)=\{-1\leqslant x\leqslant 0,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\quad x\leqslant z\leqslant 0\}$
d) $(V)=\{\ 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant x,\quad y\leqslant z\leqslant x\}$
e) $(V)=\{\ 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant x,\quad x-y\leqslant z\leqslant x+y\}$

W s k a z ó w k a. W zadaniach f)—k) zwrócić uwagę na kolejność całkowania.

f) $(V)=\{\ z\leqslant x\leqslant y,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\quad 0\leqslant z\leqslant y\}$
g) $(V)=\{\ z\leqslant x\leqslant y,\quad z\leqslant y\leqslant 1,\quad 0\leqslant z\leqslant 1\}$
h) $(V)=\{-1\leqslant x\leqslant 0,\quad x\leqslant y\leqslant 0,\quad 0\leqslant z\leqslant 1\}$
i) $(V)=\{\ z\leqslant x\leqslant y,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\quad 0\leqslant z\leqslant y\}$
j) $(V)=\{\ 0\leqslant x\leqslant z,\quad z-x\leqslant y\leqslant z+x,\quad 0\leqslant z\leqslant 1\}$
k) $(V)=\{\ 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant x,\quad 0\leqslant z\leqslant x\}$

20.3. Obliczyć całkę

$$\iiint\limits_{(V)} 2z\,dx\,dy\,dz, \quad (V) = \{(x,y)\in(G), \sqrt{2-x} \leqslant z \leqslant \sqrt{6+y}\}$$

gdzie (G) oznacza:

a) kwadrat o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$;
b) trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$;
c) trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(-2,2)$;
d) trójkąt o wierzchołkach $(2,0)$, $(2,-2)$, $(-2,2)$;

W s k a z ó w k a. W zadaniach e)—g) można stosować współrzędne biegunowe.

e) koło o środku $(0,0)$ i promieniu 1;
f) koło o środku $(0,1)$ i promieniu 1;
g) część wspólna koła e) i koła f).

20.4. Obliczyć całkę

$$\iiint\limits_{(V)} e^{x-y+z}\,dx\,dy\,dz, \quad (V) = \{(x,y)\in(G), -x \leqslant z \leqslant y\}$$

gdzie (G) oznacza:

a) kwadrat o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$;
b) trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$;
c) trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$.

20.5. Obliczyć całkę

$$\iiint\limits_{(V)} e^{z}\,dx\,dy\,dz, \quad (V) = \{(x,y)\in(G), \quad x^2+y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}\}$$

gdzie (G) oznacza koło o środku $(0,0)$ i promieniu 1.

20.6. Obliczyć całkę

$$\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz, \quad (V) = \{(x,y)\in(G), \quad 0 \leqslant z \leqslant 4-x^2-y^2\}$$

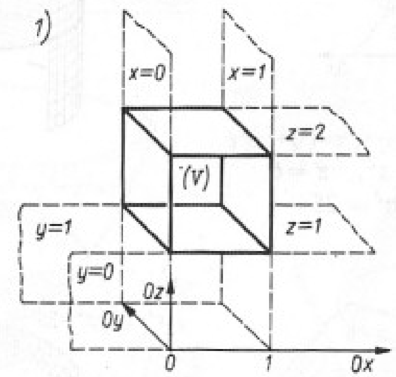
gdzie (G) oznacza:

a) kwadrat o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$;
b) trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$;

c) koło o środku $(0,0)$ i promieniu 1;
d) pierścień kołowy o środku $(0,0)$ i promieniach 1 i 2.

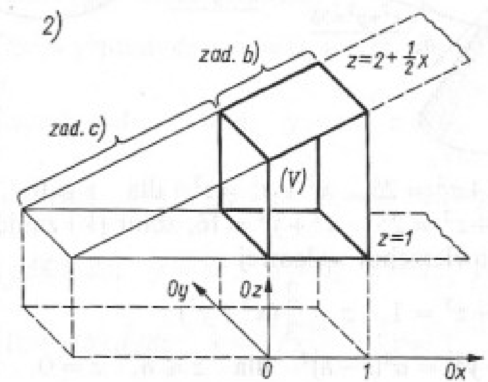
20.7. Napisać nierówności określające zakres zmienności zmiennych x, y, z w zbiorze (V), tj. nierówności (1) lub (3), jeśli wiadomo, że zbiór (V) jest ograniczony płaszczyznami, względnie powierzchniami o równaniach

a) $x=0, \quad x=1, \quad y=0, \quad y=1, \quad z=1, \quad z=2$ (rys. 1)



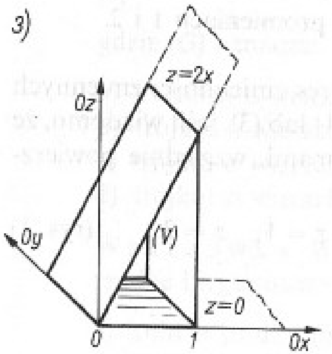
b) $x=0, \quad x=1, \quad y=0, \quad y=1, \quad z=1, \quad z=2+\frac{1}{2}x$ (rys. 2)

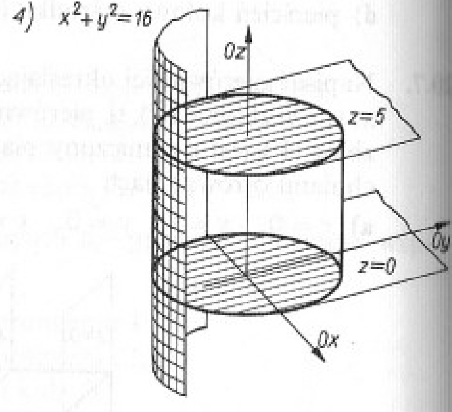
c) $x=0, \quad y=0, \quad y=1, \quad z=1, \quad z=2+\frac{1}{2}x$ (rys. 2)



d) $x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = 2x$ (rys. 3)

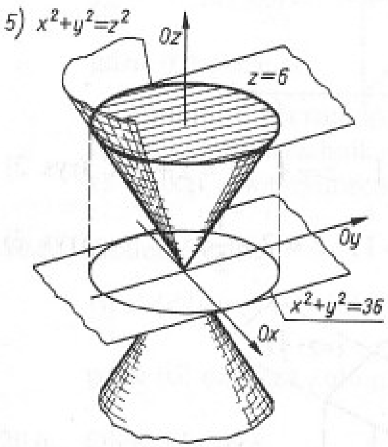
e) $x^2 + y^2 = 16, \quad z = 0, \quad z = 5$ (rys. 4)

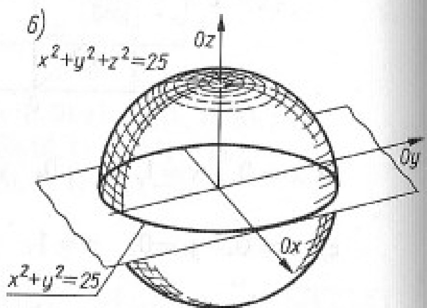




f) $x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 6$ (rys. 5)

g) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ (rys. 6)



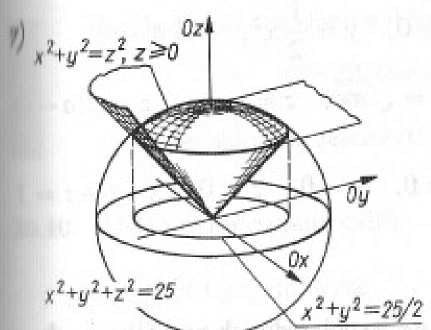


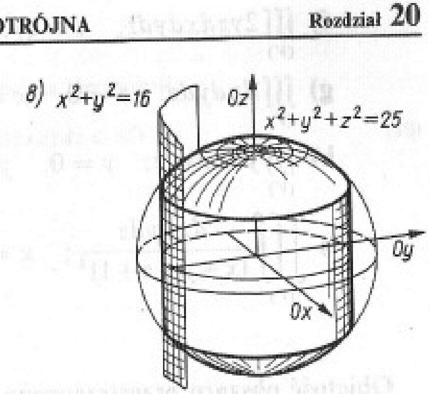
h) $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad x^2 + y^2 = z^2$ dla $z \geqslant 0$ (rys. 7)

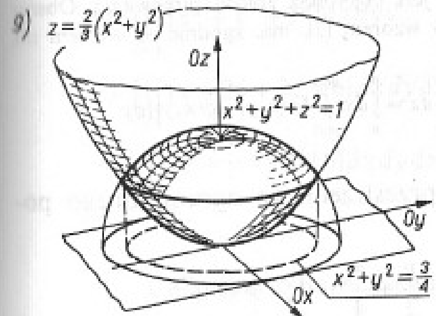
i) $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad x^2 + y^2 = 16$, zbiór (V) znajduje się wewnątrz powierzchni walcowej (rys. 8)

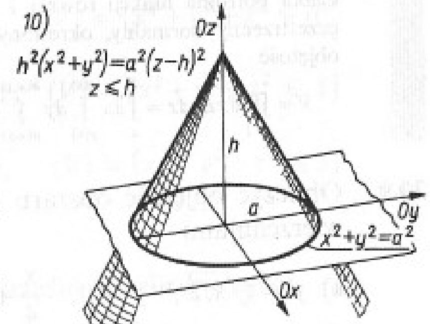
j) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z = \dfrac{2}{3}(x^2 + y^2)$ (rys. 9)

k) $h^2(x^2 + y^2) = a^2(z - h)^2$ dla $z \leqslant h, \quad z = 0$ (rys. 10)









20.8. Obliczyć całkę potrójną w obszarze normalnym ograniczonym przez płaszczyzny lub powierzchnie, których równania podano obok całki (a — stała dodatnia)

a) $\iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz; \quad x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ y = a,\ x + z = a$

b) $\iiint\limits_{(V)} xyz\,dx\,dy\,dz; \quad x = a, \quad y = x, \quad z = 0, \quad z = y$

c) $\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz; \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 2x + y = 4, \quad z = 4 - x^2$

d) $\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz; \quad y = x^2, \quad z = 0, \quad z = 1, \quad y = 1$

e) $\iiint\limits_{(V)} (x + y)\,dx\,dy\,dz; \quad y = \sqrt{x}, \quad x + z = 1, \quad y = 0, \quad z = 0$

f) $\iiint\limits_{(V)} 2yz\,dx\,dy\,dz;\quad y=\sqrt{x},\quad y=2\sqrt{x},\quad z=0,\quad x+z=6$

g) $\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz;\quad z=0,\quad x=0,\quad y=\frac{1}{2}x^2,\quad z=4-y^2$

h) $\iiint\limits_{(V)} y\,dx\,dy\,dz;\quad y=0,\quad y=\sqrt{ax},\quad z=a-x,\quad z=2(a-x)$

i) $\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3};\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y+z=1$

Objętość obszaru przestrzennego we współrzędnych prostokątnych

Całka potrójna funkcji równej 1 jest objętością zbioru całkowania. Obszar przestrzenny normalny, określony wzorem (3), ma, zgodnie ze wzorem (8), objętość

$$V=\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{p(x)}^{q(x)} dy\int\limits_{g(x,y)}^{h(x,y)} dz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{p(x)}^{q(x)}[h(x,y)-g(x,y)]\,dy$$

20.9. Obliczyć objętość obszaru przestrzennego ograniczonego powierzchniami

a) $y=\sqrt{x/2},\quad y=0,\quad \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\quad z=0$

b) $z=x^2+y^2,\quad 4z=x^2+y^2,\quad z=1$

c) $z=x^2+y^2,\quad 2z=1-x^2-y^2$

d) $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=9-y^2,\quad 3x+4y=12$

e) $2z=4-x^2-y^2,\quad z=0$

f) $z=x^2+y^2,\quad z^2=x^2+y^2$

g) $x=1,\quad y=0,\quad y=\sqrt{x},\quad z=0,\quad z=\sqrt{x}$

h) $x^2+y^2=z^2,\quad 4z=x^2+y^2,\quad z=1$

i) $z=x^2+y^2,\quad z=\sqrt{2-x^2-y^2}$

Oszacowanie całki potrójnej

Jeśli funkcja $f(x,y,z)$ jest w obszarze regularnym domkniętym (V) całkowalna i spełnia w tym obszarze nierówność

$$m\leqslant f(x,y,z)\leqslant M \tag{9}$$

to całka funkcji f po obszarze (V) spełnia nierówność

$$mV=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\leqslant MV \tag{10}$$

gdzie V jest objętością obszaru (V).

20.10. Podać oszacowanie całki

a) $\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz,$

$(V)=\{1\leqslant x\leqslant 3,\ 1\leqslant y\leqslant 3,\ 1\leqslant z\leqslant 3\}$

b) $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,\qquad (V)=\{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\}$

c) $\iiint\limits_{(V)}(x-2y+2z+6)\,dx\,dy\,dz,\quad (V)=\{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$

d) $\iiint\limits_{(V)}(x+y-z+10)\,dx\,dy\,dz,\quad (V)=\{x^2+y^2+z^2\leqslant 3\}$

Całka potrójna we współrzędnych cylindrycznych

Współrzędne cylindryczne r, φ, z i współrzędne prostokątne x, y, z punktu przestrzeni (*Zarys I*, s. 151; *Zadania I*, s. 66) są związane następującymi wzorami przejścia:

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,\qquad z=z \tag{11}$$

$$x^2+y^2=r^2,\qquad y/x=\operatorname{tg}\varphi \tag{12}$$

Różniczka objętości wyraża się we współrzędnych cylindrycznych wzorem

$$dV=r\,dr\,d\varphi\,dz \tag{13}$$

Całka potrójna wyraża się we współrzędnych cylindrycznych wzorem

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}=\iiint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)\Big|_{(11)}\,dV\Big|_{(13)} \tag{14}$$

w którym po prawej stronie należy wykonać podstawienie (11) i (13), a (Ω) jest zakresem zmienności zmiennych r, φ, z w zbiorze (V).

20.11. Rozpoznać figurę określoną we współrzędnych cylindrycznych i określić ją za pomocą współrzędnych prostokątnych

a) $0 \leqslant r \leqslant 1, \quad \varphi = 0, \quad z = 0$
b) $0 \leqslant r \leqslant 1, \quad \varphi = \pi/2, \quad z = 0$
c) $r = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1$
d) $r = 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad z = 0$
e) $r = 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant 10$
f) $0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant 10$
g) $1 \leqslant r \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant 10$
h) $0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad z = 1$
i) $0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad z = r$
j) $0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad r \leqslant z \leqslant 1$
k) $0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1-r$
l) $0 \leqslant r \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad |z| \leqslant \sqrt{4-r^2}$
m) $0 \leqslant r \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{4-r^2}$
n) $0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad \sqrt{3} \leqslant z \leqslant \sqrt{4-r^2}$
o) $0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad r\sqrt{3} \leqslant z \leqslant \sqrt{4-r^2}$

20.12. Figurę określoną we współrzędnych prostokątnych (a, b, m, h — stałe dodatnie, $a > b$) określić za pomocą współrzędnych cylindrycznych.

W s k a z ó w k a. Poniższe figury są figurami z rysunków 4)—10), przy czym dane liczbowe zamieniono na dane literowe; możemy więc korzystać z tych rysunków, pamiętając o zmianie danych. Aby wyznaczyć zakres zmienności zmiennych r, z, rozważamy przekrój figury płaszczyzną przechodzącą przez oś Oz.

a) Walec $x^2+y^2 \leqslant a^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant h$ (rys. 4).
b) Kula $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$ (rys. 6).
c) Figura wypukła (tzn. taka, że każdy odcinek, którego końce należą do tej figury, zawiera się w tej figurze), wycięta z kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$ powierzchnią walcową $x^2+y^2 = b^2$ (rys. 8).
d) Stożek o wierzchołku $(0, 0, 0)$ i podstawie $x^2+y^2 \leqslant a^2, \quad z = h$ (rys. 5).
e) Stożek o wierzchołku $(0, 0, h)$ i podstawie $x^2+y^2 \leqslant a^2, \quad z = 0$ (rys. 10).

f) Figura wypukła wycięta z kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$ powierzchnią stożkową $z = m\sqrt{x^2+y^2}$ (rys. 7).
g) Figura ograniczona paraboloidą obrotową $z = m(x^2+y^2)$ i płaszczyzną $z = h$.
h) Figura ograniczona paraboloidą obrotową $z = h - m(x^2+y^2)$ i płaszczyzną $z = -a$.
i) Figura wypukła wycięta z kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$ paraboloidą obrotową $z = m(x^2+y^2)$ (rys. 9).

Całka potrójna we współrzędnych sferycznych

Współrzędne sferyczne R, θ, φ i współrzędne prostokątne x, y, z punktu przestrzeni (*Zarys I*, s. 152; *Zadania I*, s. 66) są związane następującymi wzorami przejścia:

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = R\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = R\cos\theta \tag{15}$$

$$x^2+y^2+z^2 = R^2, \qquad z/R = \cos\theta, \qquad y/x = \operatorname{tg}\varphi \tag{16}$$

Różniczka objętości wyraża się we współrzędnych sferycznych wzorem

$$dV = R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dR \tag{17}$$

Całka potrójna wyraża się we współrzędnych sferycznych wzorem

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV} = \iiint_{(\Omega)} f(x,y,z)\Big|_{(15)} dV\Big|_{(17)} \tag{18}$$

w którym po prawej stronie należy wykonać podstawienia (15) i (17), a (Ω) jest zakresem zmienności zmiennych R, θ, φ w zbiorze (V).

20.13. Rozpoznać figurę określoną we współrzędnych sferycznych i określić ją za pomocą współrzędnych prostokątnych

a) $R = 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
b) $0 \leqslant R \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
c) $1/2 \leqslant R \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
d) $R = 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad \varphi = 0$
e) $R = 2, \quad \theta = \pi/3, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
f) $R = 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
g) $0 \leqslant R \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

h) $R = 1,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
i) $0 \leqslant R \leqslant 1,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
j) $R = 1/\cos\theta,\quad 0 \leqslant \theta < \pi/2,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
k) $1/\cos\theta \leqslant R \leqslant 2,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
l) $0 \leqslant R \leqslant 1/\cos\theta,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
m) $0 \leqslant R \leqslant 1,\quad \pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

20.14. Figurę określoną we współrzędnych prostokątnych (a, b, m — stałe dodatnie, $a > b$) określić za pomocą współrzędnych sferycznych.

a) Sfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$.
b) Kula $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$.
c) Półsfera $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2 \leqslant a^2$.
d) Półkula $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2 \leqslant a^2$.
e) Czasza $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2 \leqslant a^2/2$.
f) Wycinek kuli $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2 \leqslant a^2/2$.
g) Płaszczyzna $z = b$.
h) Odcinek kuli $b \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2 \leqslant a^2-b^2$.
i) Stożek $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant b$ dla $x^2+y^2 \leqslant b^2/m^2$.

Obliczanie całek we współrzędnych cylindrycznych i sferycznych

20.15. Obliczyć za pomocą współrzędnych cylindrycznych całkę (a, h — stałe dodatnie)

a) $\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$, $(V) = \text{walec}\,\{x^2+y^2 \leqslant a^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$
b) $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$,
$(V) = \text{stożek}\left\{x^2+y^2 \leqslant a^2,\ \frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant h\right\}$
c) $\iiint\limits_{(V)} z^2\, dx\, dy\, dz$, $(V) = \text{kula}\,\{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2\}$
d) $\iiint\limits_{(V)} z\, dx\, dy\, dz$, $(V) = \{x^2+y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}\}$

20.16. Obliczyć za pomocą współrzędnych sferycznych całkę (a, b — stałe dodatnie, $a > b$)

a) $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$, $(V) = \text{kula}\,\{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2\}$
b) $\iiint\limits_{(V)} z\, dx\, dy\, dz$, $(V) = \text{półkula}\,\{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2,\ z \geqslant 0\}$
c) $\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\, dy\, dz}{x^2+y^2+z^2}$, $(V) = \text{różnica kul}\,\{b^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2\}$
d) $\iiint\limits_{(V)} dx\, dy\, dz$, $(V) = \text{odcinek kuli}\,\{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2,\ z \geqslant b\}$
e) $\iiint\limits_{(V)} dx\, dy\, dz$, $(V) = \{b^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2,\ z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}\}$
f) $\iiint\limits_{(V)} dx\, dy\, dz$, $(V) = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 2az,\ z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}\}$

20.17. Obliczyć za pomocą współrzędnych cylindrycznych lub sferycznych całkę (a, h — stałe dodatnie)

a) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{h} dz$
b) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} dz$
c) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz$
d) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz$
e) $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz$

f) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^h dz$

g) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^h z\sqrt{x^2+y^2}\, dz$

20.18. Obliczyć za pomocą współrzędnych cylindrycznych lub sferycznych całkę w zbiorze (V) ograniczonym powierzchniami, których równania podano obok całki (a, b, h — stałe dodatnie, $a > b$, (V) jest zbiorem wypukłym)

a) $\iiint\limits_{(V)} y^2 dxdydz;\quad z=0,\quad z=h,\quad x^2+y^2=a^2$

b) $\iiint\limits_{(V)} z\,dxdydz;\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=h$

c) $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)dxdydz;\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2+z^2=a^2$

d) $\iiint\limits_{(V)} dxdydz;\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=6-x^2-y^2$

e) $\iiint\limits_{(V)} dxdydz;\quad z=x^2+y^2,\quad z=2-\sqrt{x^2+y^2}$

f) $\iiint\limits_{(V)} dxdydz;\quad x^2+y^2=b^2,\quad z=0,\quad z=h$

g) $\iiint\limits_{(V)} dxdydz;\quad x^2+y^2=b^2,\quad x^2+y^2+z^2=a^2$

Zmiana zmiennych w całce potrójnej

Jeśli obszar regularny domknięty (V) jest w przekształceniu

$$\Phi = \{x = x(u,v,w),\quad y = y(u,v,w),\quad z = z(u,v,w)\} \tag{19}$$

obrazem regularnego domkniętego obszaru (Ω) (rys. 11) przy czym:

1° Φ jest klasy C^1 w pewnym obszarze zawierającym zbiór (Ω),
2° różnym punktom wnętrza (Ω) odpowiadają różne punkty zbioru (V),
3° jakobian przekształcenia Φ

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \tag{20}$$

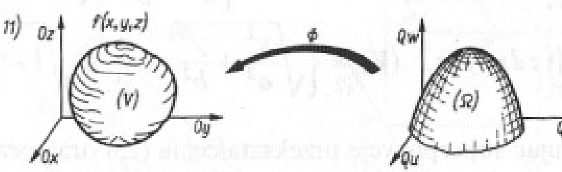
jest różny od 0 wewnątrz (Ω),

to zachodzi następujący wzór na zmianę zmiennych w całce potrójnej według przekształcenia Φ:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)\Big|_{(19)} |J|\,dudvdw \tag{21}$$

w której $f(x,y,z)\Big|_{(19)}$ oznacza superpozycję ciągłej funkcji f na funkcje (19), a $|J|$ jest bezwzględną wartością jakobianu (20).

11)



Współrzędne krzywoliniowe. Zmienne u, v, w występujące w przekształceniu (19) są nazywane *współrzędnymi krzywoliniowymi* punktu (x,y,z).

Przykłady współrzędnych krzywoliniowych:

1. We *współrzędnych cylindrycznych* walec $(V) = \{x^2+y^2 \leqslant a^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$ jest obrazem prostopadłościanu $(\Omega) = \{0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$.
2. We *współrzędnych sferycznych* kula $(V) = \{x^2+y^2+z^2 = a^2\}$ jest obrazem prostopadłościanu $(\Omega) = \{0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$.
3. *Powinowactwo prostokątne względem płaszczyzny Qvw* w skali a jest to przekształcenie
$$x = au,\quad y = v,\quad z = w;\quad J = a \tag{22}$$
w którym elipsoida obrotowa $(V) = \{x^2/a^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ jest obrazem kuli $(\Omega) = \{u^2+v^2+w^2 \leqslant 1\}$.
4. *Powinowactwo prostokątne względem trzech płaszczyzn* układu $Quvw$ w skalach a, b, c jest to przekształcenie
$$x = au,\quad y = bv,\quad z = cw;\quad J = abc \tag{23}$$
w którym elipsoida trójosiowa $(V) = \{x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 \leqslant 1\}$ jest obrazem kuli $(\Omega) = \{u^2+v^2+w^2 \leqslant 1\}$.

Superpozycja przekształceń. Jeśli w danej całce dokonano zmiany zmiennych wg Φ_1, a następnie w otrzymanej całce dokonano zmiany zmiennych wg Φ_2, to w rezultacie w danej całce dokonano zmiany zmiennych wg pewnego przekształcenia Φ, zwanego *superpozycją przekształceń* Φ_1 i Φ_2, przy czym Φ_1 i Φ_2 nazywamy przekształceniami *składowymi* tej superpozycji.

Jakobian superpozycji przekształceń jest równy iloczynowi jakobianów przekształceń składowych.

Na przykład

$$\Phi_1 = \begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases} \quad \Phi_2 = \begin{cases} u = R\sin\theta\cos\varphi \\ v = R\sin\theta\sin\varphi \\ w = R\cos\theta \end{cases} \quad \Phi = \begin{cases} x = aR\sin\theta\cos\varphi \\ y = bR\sin\theta\sin\varphi \\ z = cR\cos\theta \end{cases} \tag{24}$$

$$J_1 = abc \qquad J_2 = R^2\sin\theta \qquad J = J_1 J_2 = abcR^2\sin\theta$$

20.19. Stosując superpozycję przekształceń Φ_1 i Φ_2 z (24), obliczyć całkę

a) $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz, \quad (V) = \left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$

b) $\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz, \quad (V) = \left\{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} \leqslant \frac{z}{c} \leqslant \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right\}$

20.20. Stosując superpozycję przekształcenia (23) oraz przekształcenia (11), w którym litery x, y, z zmieniono na u, v, w, obliczyć całkę

a) $\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz, \quad (V) = \left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ 0 \leqslant \frac{z}{c} \leqslant \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right\}$

b) $\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz, \quad (V) = \left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant z \leqslant \cos\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right\}$

Współrzędne strefowe w przestrzeni

Oktant $(W) = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$ w przestrzeni $Oxyz$ jest w przekształceniu

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos^2\varphi\sin^2\theta \\ y &= \varrho\sin^2\varphi\sin^2\theta \qquad \varrho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ z &= \varrho\cos^2\theta \end{aligned} \tag{25}$$

obrazem półsłupa $(T) = \left\{\varrho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ w przestrzeni $O'\varrho\varphi\theta$ (rys. 12).

Ze wzorów (25) wynikają równości

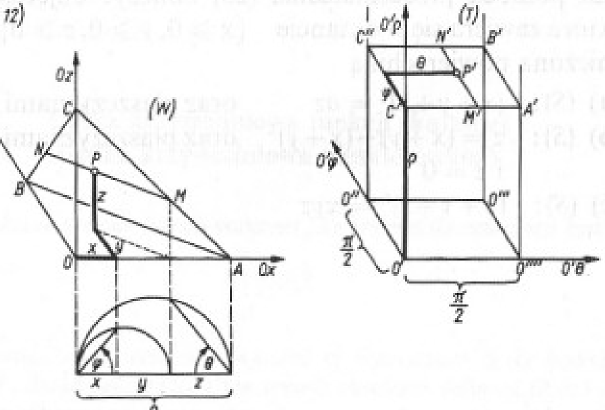
$$x+y+z = \varrho, \qquad \frac{y}{x} = \mathrm{tg}^2\varphi, \qquad \frac{x+y}{z} = \mathrm{tg}^2\theta \tag{26}$$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\varrho,\varphi,\theta)} = 4\varrho^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\sin^3\theta \tag{27}$$

oraz następujące własności przekształcenia (25):

1) przekształcenie (25) przekształca wnętrze (T) na wnętrze (W) i wewnątrz (T) jest odwracalne;
2) każdy punkt $P = (x, y, z)$, należący do (W) i nie leżący na osi Oz, jest obrazem pewnego punktu $P' = (\varrho, \varphi, \theta)$ półsłupa (T); liczby ϱ, φ i θ, zwane *współrzędnymi strefowymi* punktu P, można wyznaczyć geometrycznie, co przedstawiono na rys. 12;

12)



3) czworościan $OABC$, zwany *strefą*, jest obrazem prostopadłościanu $O'O''O'''O''''A'B'C'C''$, przy czym trójkąty OAB, OAC, OBC i ABC są odpowiednio obrazami prostokątów $O''''A'B'O'''$, $O''''A'C'O'$, $O'''B'C''O''$ i $A'B'C''C'$; nadto krawędź OC bez punktu O jest obrazem prostokąta $O'C'C''O''$ (bez boku $O'O''$), punkt O zaś jest obrazem kwadratu $O'O''O'''O''''$.

20.21. Za pomocą przekształcenia (25) obliczyć poniższą całkę po czworościanie (V) ograniczonym płaszczyznami: $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

W s k a z ó w k a. Czworościan (V) jest obrazem prostopadłościanu $(\Omega) = \{0 \leqslant \varrho \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}$.

a) $\iiint\limits_{(V)} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ b) $\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{x+y+z}$

c) $\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z)^2}$ d) $\iiint\limits_{(V)} \frac{1}{x+y+z} e^{(x+y+z)^2} dx\,dy\,dz$

20.22. Wyznaczyć figurę (Ω), której obrazem w przekształceniu (25) jest figura (V) ograniczona płaszczyznami

a) $x+y+z=1, \quad y=0, \quad y=x, \quad z=0$
b) $x+y+2z=2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$
c) $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad z=1, \quad x+y=1$

20.23. Za pomocą przekształcenia (25) obliczyć objętość figury (V), która zawiera się w oktancie $\{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$ i jest ograniczona powierzchnią

a) (S): $(x+y+z)^2 = az$ oraz płaszczyznami $x=0$ i $y=0$
b) (S): $z=(x+y)-(x+y)^2$ oraz płaszczyznami $x=0$, $y=0$ i $z=0$
c) (S): $(x+y+z)^6 = xyz$

Rozdział **21**

Całki krzywoliniowe i powierzchniowe

Całka krzywoliniowa funkcji skalarnej (całka krzywoliniowa nieskierowana)

Całka krzywoliniowa funkcji skalarnej f po krzywej (l) oznaczana symbolem

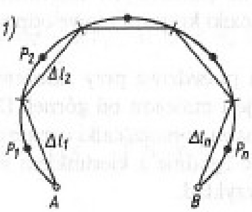
$$\int\limits_{(l)} f(P)\,dl \tag{1}$$

jest liczbą, której istnienie i wartość są wyznaczone przez funkcję podcałkową f i drogę całkowania (l) w sposób określony definicją (*Zarys II*, s. 235), którą w skrócie zapisujemy wzorem

$$\int\limits_{(l)} f(P)\,dl = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(P_j)\,\Delta l_j \tag{2}$$

gdzie: Δl_j jest długością cięciwy łączącej końce łuku częściowego (rys. 1), P_j jest punktem należącym do łuku częściowego Δl_j, $f(P_j)$ jest wartością funkcji f w punkcie P_j, liczba λ, zwana *średnicą podziału*, jest długością najdłuższego łuku częściowego w danym podziale, a krzywa (l) jest łukiem gładkim lub krzywą częściami gładką (*Zarys I*, s. 379).

1)



Obliczanie całki krzywoliniowej nieskierowanej

Całkę krzywoliniową nieskierowaną obliczamy za pomocą całki oznaczonej, której postać zależy od postaci równania krzywej.

Łuk na płaszczyźnie dany jawnie. Jeśli łuk (l) ma równanie

$$y = y(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

to

$$\int_{(l)} f(P)dl = \int_a^b f(x,y)\Big|_{y=y(x)} \sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{3}$$

Jeśli zamienimy role zmiennych i określimy łuk (l) równaniem

$$x = x(y), \quad g \leqslant y \leqslant h$$

to

$$\int_{(l)} f(P)dl = \int_g^h f(x,y)\Big|_{x=x(y)} \sqrt{1+x'^2}\,dy \tag{4}$$

Łuk na płaszczyźnie dany parametrycznie. Jeśli łuk (l) ma równania

$$x = x(t), \quad y = y(t); \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

to

$$\int_{(l)} f(P)dl = \int_\alpha^\beta f(x,y)\Big|_{\substack{x=x(t)\\ y=y(t)}} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \tag{5}$$

Łuk w przestrzeni. Jeśli łuk (l) ma równania parametryczne

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

to

$$\int_{(l)} f(P)dl = \int_\alpha^\beta f(x,y,z)\Big|_{\substack{x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)}} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt \tag{6}$$

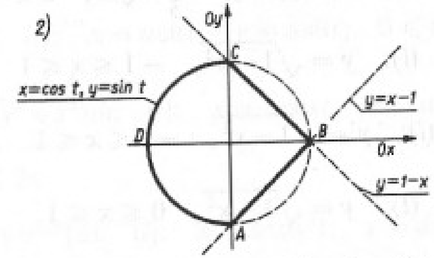
U w a g i

1. Całki występujące po prawej stronie powyższych czterech wzorów mogą być całkami niewłaściwymi. Kropki nad x, y, z we wzorach (5) i (6) oznaczają różniczkowanie względem parametru t.

2. Jeśli droga całkowania jest częściami gładka (np. gdy jest linią łamaną) lub jeśli droga całkowania lub funkcja podcałkowa jest na pewnej części drogi określona innym wzorem niż na pozostałych częściach, to dzielimy drogę całkowania na części, obliczamy całki krzywoliniowe odpowiadające tym częściom i dodajemy je.

3. Wzory (3)—(6) są prawdziwe przy założeniu, że w całce oznaczonej dolna granica całkowania jest mniejsza od górnej. Dlatego, obliczając całkę krzywoliniową nieskierowaną za pomocą całki oznaczonej, należy na każdej części drogi całkowania całkować zgodnie z kierunkiem wzrostu zmiennej całkowania, co wyjaśnia poniższy przykład.

Obliczymy całkę $\int_{(l)} f(P)dl$, w której $f(P) = x+y$, a droga całkowania (l) jest sumą odcinków $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ oraz półokręgu CDA (rys. 2).



Obliczamy całki odpowiadające trzem częściom drogi i dodajemy je.

1. $\overline{AB} = \{y = x-1, \quad x \in \langle 0;1\rangle\}, \quad dl = \sqrt{2}\,dx, \quad f(P) = x+(x-1) = 2x-1$

$$\int_{\overline{AB}} f(P)\,dl = \int_0^1 (2x-1)\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\,(x^2-x)\Big|_0^1 = 0$$

2. $\overline{BC} = \{y = 1-x, \quad x \in \langle 0;1\rangle\}, \quad dl = \sqrt{2}\,dx, \quad f(P) = x+(1-x) = 1$

$$\int_{\overline{BC}} f(P)\,dl = \int_{\overline{CB}} f(P)\,dl = \int_0^1 \sqrt{2}\,dx = x\sqrt{2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}$$

3. $CDA = \{x = \cos t, \quad y = \sin t; \quad t \in \langle \pi/2; 3\pi/2\rangle\}, \quad dl = dt, \quad f(P) = \cos t+\sin t$

$$\int_{CDA} f(P)\,dl = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\cos t+\sin t)dt = (\sin t-\cos t)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -2$$

Odpowiedź: $\sqrt{2}-2$.

21.1. Obliczyć całkę krzywoliniową funkcji skalarnej po krzywej określonej na płaszczyźnie Oxy równaniem jawnym

a) $\displaystyle\int_{(l)} \frac{6y}{x}\,dl; \quad (l)\colon \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

b) $\displaystyle\int_{(l)} \frac{x}{y^4}\,dl; \quad (l)\colon \quad y = 1/x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

c) $\int\limits_{(l)} 2y\cos x\,dl$; (l): $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant \pi/2$

d) $\int\limits_{(l)} y\,dl$; (l): $y=2\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$

e) $\int\limits_{(l)} y^2\sqrt{1+x}\,dl$; (l): $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 3$

f) $\int\limits_{(l)} y\,dl$; (l): $y=\sqrt{1-x^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$

g) $\int\limits_{(l)} dl$; (l): $y=\sqrt{1-x^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$

h) $\int\limits_{(l)} x\,dl$; (l): $y=\sqrt{1-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant 1$

i) $\int\limits_{(l)} |x+y|\,dl$; (l): $y=x$, $-1\leqslant x\leqslant 1$

j) $\int\limits_{(l)} |x+y|\,dl$; (l): $y=|x|$, $-1\leqslant x\leqslant 1$

k) $\int\limits_{(l)} 3y\mathrm{e}^x\,dl$; (l): $y=\mathrm{e}^x$, $0\leqslant x\leqslant \ln 3$

l) $\int\limits_{(l)} \mathrm{sh}\,x\,dl$; (l): $y=\mathrm{ch}\,x$, $0\leqslant x\leqslant \ln 3$

m) $\int\limits_{(l)} dl$; (l): $y=\mathrm{ch}\,x$, $a\leqslant x\leqslant b$

n) $\int\limits_{(l)} dl$; (l): $y=\mathrm{e}^x$, $a\leqslant x\leqslant b$ (podstawić $\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}=s$)

o) $\int\limits_{(l)} \frac{1}{y^2}\,dl$; (l): $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$, $-a\leqslant x\leqslant a$

p) $\int\limits_{(l)} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dl$; (l): $y=x\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 4$

r) $\int\limits_{(l)} xy^2\,dl$; (l): $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$, $0\leqslant x\leqslant a$

s) $\int\limits_{(l)} \exp\sqrt{x^2+y^2}\,dl$; (l): $y=\sqrt{1-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant 1$

(symbol $\exp z$ oznacza e^z).

21.2. Obliczyć całkę krzywoliniową funkcji skalarnej po krzywej określonej na płaszczyźnie Oxy lub w przestrzeni $Oxyz$ równaniami parametrycznymi

a) $\int\limits_{(l)} xy\,dl$; (l): $x=a\,\mathrm{ch}\,t$, $y=a\,\mathrm{sh}\,t$; $0\leqslant t\leqslant 1$

b) $\int\limits_{(l)} (x^2+y^2+z^2)\,dl$; (l): $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$; $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

c) $\int\limits_{(l)} (x^{4/3}+y^{4/3})\,dl$; (l): $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$; $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

d) $\int\limits_{(l)} \frac{xz}{1+2y}\,dl$; (l): $x=t$, $y=t^2$, $z=\frac{2}{3}t^3$; $0\leqslant t\leqslant 1$

e) $\int\limits_{(l)} y^2\,dl$; (l): $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

f) $\int\limits_{(l)} xyz\,dl$; (l): $x=\mathrm{e}^t$, $y=\mathrm{e}^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$; $0\leqslant t\leqslant 1$

g) $\int\limits_{(l)} z\,dl$; (l): $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $z=4t$; $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

h) $\int\limits_{(l)} |y|\,dl$; (l): $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

i) $\int\limits_{(l)} xy\,dl$; (l): $x=t$, $y=t^2/2$; $0\leqslant t\leqslant 1$

j) $\int\limits_{(l)} \frac{1}{2}y\,dl$; (l): $x=\cos t$, $y=2\sin t$; $0\leqslant t\leqslant \pi/2$

k) $\int\limits_{(l)} \sqrt{\frac{2}{a}y}\,dl$; (l): $x=at$, $y=\frac{a}{2}t^2$, $z=\frac{a}{3}t^3$; $0\leqslant t\leqslant 1$

l) $\int\limits_{(l)} 4xyz\,dl$; (l): $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ct$; $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

21.3. Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_{(l)} (x+y)\,dl$$

gdzie (l) jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach: $A=(0,-1)$, $B=(2,0)$, $C=(0,2)$.

21.4. Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_{(l)} f(x,y)\,dl$$

gdzie $f(x,y)$ jest odległością punktu (x,y) od początku układu, a (l) jest okręgiem $x^2+y^2=ax$, $a>0$.

Całkowanie po odcinku

Odcinek na płaszczyźnie Oxy o końcach $A=(x_A,y_A)$ i $B=(x_B,y_B)$ ma równania parametryczne

$$\overline{AB}=\begin{cases} x=x_A+(x_B-x_A)t \\ y=y_A+(y_B-y_A)t \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{7}$$

Odcinek w przestrzeni $Oxyz$ o końcach $A=(x_A,y_A,z_A)$ i $B=(x_B,y_B,z_B)$ ma równania parametryczne

$$\overline{AB}=\begin{cases} x=x_A+(x_B-x_A)t \\ y=y_A+(y_B-y_A)t \\ z=z_A+(z_B-z_A)t \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{8}$$

21.5. Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_{(l)} f(x,y)\,dl$$

gdzie $f(x,y)$ jest kwadratem odległości punktu (x,y) od początku układu, a (l) jest odcinkiem łączącym punkty $A=(3,2)$ i $B=(-1,1)$.

21.6. Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_{(l)} f(x,y,z)\,dl$$

gdzie $f(x,y,z)$ jest odwrotnością odległości punktu (x,y,z) od początku układu, a (l) jest odcinkiem łączącym punkty $A=(2,3,0)$ i $B=(1,1,2)$.

Całka powierzchniowa funkcji skalarnej (całka powierzchniowa niezorientowana)

Całka powierzchniowa funkcji skalarnej f po powierzchni (S), oznaczana symbolem

$$\iint_{(S)} f(P)\,dS \tag{9}$$

jest liczbą, której istnienie i wartość są wyznaczane przez funkcję podcałkową f i powierzchnię całkowania (S) w sposób określony definicją (*Zarys II*, s. 239), którą w skrócie zapisujemy wzorem

$$\iint_{(S)} f(P)\,dS=\lim_{\sigma\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(P_j)\,\Delta S_j \tag{10}$$

gdzie: ΔS_j jest polem elementu stycznego do powierzchni całkowania (S), P_j jest punktem styczności, $f(P_j)$ jest wartością funkcji f w punkcie P_j, liczba σ, zwana *średnicą podziału*, jest największą ze średnic elementów stycznych, a powierzchnia (S) jest powierzchnią gładką lub częściami gładką (*Zarys I*, s. 424).

Uwagi

1. Jeśli $f(P)=1$, to całka (9) jest polem płata (S), co wyrażamy wzorem

$$S=\iint_{(S)} dS \tag{11}$$

2. Jeśli funkcja f ma na płacie (S) wartość stałą równą k, to całka (9) jest iloczynem liczby k przez pole S płata (S).

Obliczanie całki powierzchniowej niezorientowanej

Płat dany jawnie. Jeśli $(S)=\{z=z(x,y),\,(x,y)\in(G)\}$, to

$$\iint_{(S)} f(P)\,dS=\iint_{(G)} f(x,y,z)\Big|_{z=z(x,y)}\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dx\,dy \tag{12}$$

Płat dany parametrycznie. Jeśli płat (S) ma równania parametryczne

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v); \quad (u,v) \in (\Omega)$$

przy czym są spełnione założenia 1°–4°, s. 116, to

$$\iint\limits_{(S)} f(P)\,dS = \iint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)\Big|_{\substack{x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)}} \sqrt{H}\,du\,dv \tag{13}$$

gdzie H jest wyrażeniem (31) z rozdz. 19 (s. 116).

Płat na sferze. Jeśli płat (S) leży na sferze $x^2+y^2+z^2 = R^2$ i jest wyznaczony przez zbiór (Ω) par (θ, φ) współrzędnych sferycznych, to

$$\iint\limits_{(S)} f(P)\,dS = \iint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)\Big|_{\substack{x=R\sin\theta\cos\varphi\\ y=R\sin\theta\sin\varphi\\ z=R\cos\theta}} R^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi \tag{14}$$

Płat na walcu. Jeśli płat (S) leży na walcu $x^2+y^2 = r^2$ i jest wyznaczony przez zbiór (Ω) par (φ, z) współrzędnych cylindrycznych, to

$$\iint\limits_{(S)} f(P)\,dS = \iint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)\Big|_{\substack{x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z}} r\,d\varphi\,dz \tag{15}$$

U w a g i

1. Całki występujące po prawych stronach wzorów (12)—(15) mogą być całkami podwójnymi niewłaściwymi (s. 118).
2. Jeśli powierzchnia całkowania jest częściami gładka (np. powierzchnia wielościanu), to obliczamy całki odpowiadające poszczególnym częściom gładkim i sumujemy te całki.

21.7. Za pomocą wzoru (12) obliczyć całkę powierzchniową

a) $\iint\limits_{(S)} (z-x-y)\,dS, \quad (S) = \{z = 2x+2y;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

b) $\iint\limits_{(S)} xy^2\sqrt{1+4x^2}\,dS, \quad (S) = \{z = 1-x^2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$ $0 \leqslant y \leqslant 1\}$

c) $\iint\limits_{(S)} xyz\,dS, \quad (S) = \{z = 1-x-y;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x\}$

d) $\iint\limits_{(S)} 2y\,dS, \quad (S) = \{z = x^2+y\sqrt{3};\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$

e) $\iint\limits_{(S)} dS, \quad (S) = \{z = \sqrt{x^2+y^2};\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant x\}$

f) $\iint\limits_{(S)} z\,dS, \quad (S) = \{z = \sqrt{x^2+y^2}\quad \text{dla}\quad x^2+y^2 \leqslant a^2\}, \quad a > 0$

21.8. Za pomocą wzoru (11) obliczyć pole płata (S) określonego poniżej.

W s k a z ó w k a. Korzystać ze współrzędnych biegunowych.

a) $(S) = \{z = 2xy \quad \text{dla} \quad x^2+y^2 \leqslant a^2\}$

b) $(S) = \{z = x^2+y^2 \quad \text{dla} \quad x^2+y^2 \leqslant a^2\}$

c) $(S) = \{z = x^2-y^2 \quad \text{dla} \quad x^2+y^2 \leqslant a^2\}$

d) $(S) = \{z = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{dla} \quad x^2+y^2 \leqslant a^2\}$

e) $(S) = \{z = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \text{dla} \quad x^2+y^2 \leqslant 1\}$

21.9. Obliczyć całkę powierzchniową

a) $\iint\limits_{(S)} z\,dS, \quad (S) = \{z = xy;\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

b) $\iint\limits_{(S)} dS, \quad (S) = \{z = xy;\quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

c) $\iint\limits_{(S)} dS, \quad (S) = \{z = 1-x^2-y^2;\quad x^2+y^2 \leqslant 1\}$

d) $\iint\limits_{(S)} z\,dS, \quad (S) = \{z = \sqrt{2xy};\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

e) $\iint\limits_{(S)} dS, \quad (S) = \{z = \sqrt{2xy};\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

21.10. Obliczyć całkę powierzchniową $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, gdzie (S) jest płatem powierzchni śrubowej

$$\left\{\begin{array}{ll} x = u\cos v & 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ y = u\sin v & 0 \leqslant v \leqslant 1 \\ z = v & \end{array}\right\} \tag{16}$$

21.11. Obliczyć całkę powierzchniową

$$\iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)\,dS, \quad (S) = \left\{\begin{array}{ll} x = (2+\cos\alpha)\cos\varphi & 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi \\ y = (2+\cos\alpha)\sin\varphi & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ z = \sin\alpha & \end{array}\right\}$$

21.12. Obliczyć całkę powierzchniową

a) $\iint\limits_{(S)} \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$ b) $\iint\limits_{(S)} dS$

c) $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2+y^2}\, dS$ d) $\iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)\, dS$

w której powierzchnią całkowania jest torus

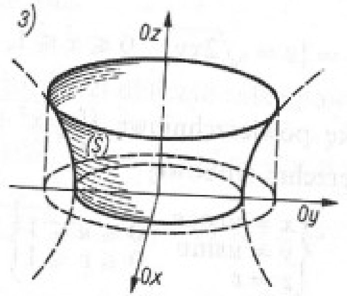
$$(S) = \left\{\begin{array}{l} x = (A+a\cos\alpha)\cos\varphi \\ y = (A+a\cos\alpha)\sin\varphi \\ z = a\sin\alpha \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{array}\right\}, \quad A > a > 0 \tag{17}$$

21.13. Obliczyć pole płata (S) wyciętego z paraboloidy hiperbolicznej $x^2-y^2 = 2z$ walcem $x^2+y^2 = 2$. Płat ten ma równania parametryczne

$$(S) = \left\{\begin{array}{l} x = u+v \\ y = u-v \\ z = 2uv \end{array} \quad \text{dla} \quad u^2+v^2 \leqslant 1\right\} \tag{18}$$

21.14. Z hiperboloidy jednopowłokowej obrotowej $x^2+y^2-z^2 = 1$ wycięto pas płaszczyznami $z = 0$ i $z = 1$ (rys. 3), który można przedstawić równaniem jawnym

$$(S) = \{z = \sqrt{x^2+y^2-1} \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\} \tag{19}$$



a także równaniami parametrycznymi

$$(S) = \left\{\begin{array}{l} x = \cos\varphi - t\sin\varphi \\ y = \sin\varphi + t\cos\varphi \\ z = t \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{array}\right\} \tag{20}$$

Obliczyć całkę powierzchniową

a) $\iint\limits_{(S)} z\, dS$ b) $\iint\limits_{(S)} dS$

Całkowanie po sferze i po powierzchni walcowej

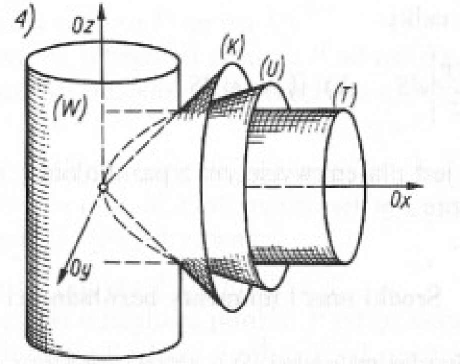
21.15. Za pomocą wzoru (14) obliczyć całkę, w której powierzchnią całkowania jest półsfera $(S) = \{x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \geqslant 0\}$

a) $\iint\limits_{(S)} x\, dS$ b) $\iint\limits_{(S)} y\, dS$ c) $\iint\limits_{(S)} z\, dS$

d) $\iint\limits_{(S)} x^2y^2\, dS$ e) $\iint\limits_{(S)} (x+y+z)\, dS$ f) $\iint\limits_{(S)} (x^2+y^2+z^2)\, dS$

g) $(x^2+y^2)\, dS$

21.16. Za pomocą wzoru (15) wyznaczyć pole płata wyciętego z powierzchni walcowej $(W) = \{x^2+y^2 = a^2\}$ (rys. 4)



przez:

a) powierzchnię walcową $(T) = \{y^2+z^2 = a^2,\quad x \geqslant 0\}$,
b) powierzchnię stożkową $(K) = \{y^2+z^2 = x^2,\quad x \geqslant 0\}$,
c) paraboloidę obrotową $(U) = \{y^2+z^2 = ax\}$.

(W zadaniach b) i c) występują całki nieelementarne).

21.17. Obliczyć całkę
$$\iint\limits_{(S)} \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dS$$
w której (S) jest powierzchnią czworościanu o wierzchołkach: $O=(0,0,0)$, $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$.

21.18. Obliczyć całkę
$$\iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)\,dS$$
w której (S) jest całkowitą powierzchnią stożka o powierzchni bocznej spełniającej równanie $z=\sqrt{x^2+y^2}$ i o podstawie leżącej w płaszczyźnie $z=1$.

21.19. Obliczyć całkę $\iint\limits_{(S)} z\,dS$, gdzie (S) jest całkowitą powierzchnią figury ograniczonej powierzchnią stożkową $z=\sqrt{x^2+y^2}$ i paraboloidą obrotową $z=2-x^2-y^2$.

21.20. Obliczyć całkę

a) $\iint\limits_{(S)} \left|\frac{xy}{z}\right| dS$ **b)** $\iint\limits_{(S)} |xyz|\,dS$

gdzie (S) jest płatem wyciętym z paraboloidy $z=x^2+y^2$ przez płaszczyznę $z=1$.

Środki mas i momenty bezwładności

Masa powierzchni materialnej (S) o gęstości *powierzchniowej* $f(P)$ dla $P\in(S)$, wyraża się wzorem
$$m=\iint\limits_{(S)} f(P)\,dS \tag{21}$$
Masa linii materialnej (l) o gęstości *liniowej* $f(P)$ dla $P\in(l)$ wyraża się wzorem
$$m=\int\limits_{(l)} f(P)\,dl \tag{22}$$

21.21. Obliczyć masę sfery $(S)=\{x^2+y^2+z^2=R^2\}$, zakładając, że gęstość $f(P)$ tej sfery jest równa:

a) odległości punktu P od osi Oz,
b) kwadratowi odległości punktu P od osi Oz,
c) odwrotności odległości punktu P od osi Oz,
d) odwrotności kwadratu odległości punktu P od osi Oz.

21.22. Dana jest sfera $(S)=\{x^2+y^2+z^2=R^2\}$ i na niej punkt $A=(0,0,-R)$. Obliczyć masę tej sfery, zakładając, że gęstość $f(P)$ tej sfery jest równa:

a) odległości punktu P od punktu A,
b) kwadratowi odległości punktu P od punktu A,
c) odwrotności odległości punktu P od punktu A,
d) kwadratowi odwrotności odległości punktu P od punktu A.

21.23. Na płaszczyźnie Oxy dany jest okrąg $(l)=\{x^2+y^2=r^2\}$. Obliczyć masę tego okręgu, zakładając, że jego gęstość $f(P)$ jest równa:

a) odległości punktu P od osi Oy,
b) kwadratowi odległości punktu P od osi Oy,
c) odwrotności odległości punktu P od osi Oy.

21.24. Na płaszczyźnie Oxy jest dany okrąg $(l)=\{x^2+y^2=r^2\}$, a na nim punkt $A=(-r,0)$. Obliczyć masę tego okręgu, zakładając, że jego gęstość $f(P)$ jest równa:

a) odległości punktu P od punktu A,
b) kwadratowi odległości punktu P od punktu A,
c) odwrotności odległości punktu P od punktu A.

Środki mas. Środek masy ciała rozciągłego o gęstości $\mu=\mu(P)=\mu(x,y,z)$ jest dany wzorami
$$x_0=\frac{1}{m}\int x\,dm,\quad y_0=\frac{1}{m}\int y\,dm,\quad z_0=\frac{1}{m}\int z\,dm \tag{23}$$

gdzie $m = \int dm$ jest ogólną masą ciała, a symbole całki $\int$ i różniczki masy dm mają sens zależny od rodzaju ciała, co przedstawiono w poniższej tabeli.

Rodzaj ciała	Całka	Różniczka masy
Odcinek na Ox	pojedyncza	$dm = \mu dx$
Łuk	krzywoliniowa	$dm = \mu dl$
Obszar płaski na Oxy	podwójna	$dm = \mu dx dy$
Płat	powierzchniowa	$dm = \mu dS$
Bryła	potrójna	$dm = \mu dx dy dz$

Liczby $\int x\,dm$, $\int y\,dm$, $\int z\,dm$ nazywamy *momentami statycznymi* ciała *na osiach* Ox, Oy, Oz.

Ciało nazywamy *jednorodnym*, gdy jego gęstość jest stała.

Ciało jednorodne *symetryczne* (środkowo, osiowo lub płaszczyznowo) ma środek masy w środku symetrii, względnie na osi lub płaszczyźnie symetrii. Masa ciała jednorodnego jest iloczynem gęstości i miary ciała.

21.25. Na płaszczyźnie Oxy obrano trzy punkty $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (0,3)$. Znaleźć środek masy:

a) trzech punktów materialnych, każdy o masie równej 1, umieszczonych w punktach A, B i C;

b) trzech odcinków materialnych (prętów) AB, BC i CA, każdy o gęstości liniowej stałej i równej 1;
(w s k a z ó w k a: każdy z odcinków zastępujemy jego środkiem, koncentrując w nim masę całego odcinka, i dla otrzymanych w ten sposób 3 punktów materialnych wyznaczamy środek masy wg wzorów

$$x_0 = \frac{1}{m}\sum x_j m_j, \quad y_0 = \frac{1}{m}\sum y_j m_j, \quad z_0 = \frac{1}{m}\sum z_j m_j$$

gdzie j jest wskaźnikiem sumowania);

c) płaskiego obszaru (płyty) o kształcie trójkąta ABC o gęstości powierzchniowej stałej i równej 1.

21.26. Znaleźć środek masy:

a) jednorodnego półokręgu $(l) = \{x^2+y^2 = a^2, \quad y \geqslant 0\}$,

b) jednorodnego półkola $(G) = \{x^2+y^2 \leqslant a^2, \quad y \geqslant 0\}$,

c) jednorodnej półsfery $(S) = \{x^2+y^2+z^2 = a^2, \quad z \geqslant 0\}$,

d) jednorodnej półkuli $(V) = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2, \quad z \geqslant 0\}$.

Momenty bezwładności

Moment bezwładności względem prostej d jest to liczba, która
— dla punktu materialnego P o masie m jest dana wzorem

$$\varrho^2(P)\,m \tag{24}$$

gdzie $\varrho(P)$ jest odległością punktu P od prostej d;
— dla zbioru punktów materialnych P_j o masach m_j jest dana wzorem

$$\sum \varrho^2(P_j)\,m_j \tag{25}$$

— dla ciała rozciągłego o gęstości μ jest dana wzorem

$$\int \varrho^2(P)\,dm \tag{26}$$

gdzie symbol całki i różniczki masy dm mają sens podany w tabeli na s. 158.

21.27. Obliczyć momenty bezwładności następujących ciał jednorodnych, przyjmując, że ich gęstość jest równa 1:

a) odcinka o długości l względem prostej prostopadłej przechodzącej przez koniec tego odcinka,

b) odcinka o długości l względem prostej zawierającej ten odcinek,

c) okręgu o promieniu a względem osi symetrii okręgu prostopadłej do płaszczyzny tego okręgu,

d) okręgu o promieniu a względem średnicy tego okręgu,

e) kwadratu o boku a względem jednego z jego boków,

f) kwadratu o boku a względem przekątnej tego kwadratu,

g) koła o promieniu a względem osi symetrii koła prostopadłej do płaszczyzny tego koła,

h) koła o promieniu a względem średnicy tego koła,

i) półsfery o promieniu a względem osi symetrii tej półsfery,

j) półsfery o promieniu a względem średnicy tej półsfery,

k) półkuli o promieniu a względem osi symetrii tej półkuli,

l) półkuli o promieniu a względem średnicy tej półkuli,

m) sześcianu o krawędzi a względem jednej z krawędzi tego sześcianu,

n) sześcianu o krawędzi a względem przekątnej ściany tego sześcianu,

o) powierzchni bocznej walca o promieniu a i wysokości h względem osi tego walca,

p) powierzchni bocznej walca o promieniu a i wysokości h względem średnicy podstawy tego walca,

q) walca o promieniu a i wysokości h względem osi tego walca,

r) walca o promieniu a i wysokości h względem średnicy podstawy tego walca,

s) stożka o promieniu a i wysokości h względem osi symetrii tego stożka,

t) stożka o promieniu a i wysokości h względem średnicy podstawy tego stożka,

u) powierzchni bocznej stożka o promieniu a i wysokości h względem osi symetrii tego stożka,

v) powierzchni bocznej stożka o promieniu a i wysokości h względem średnicy podstawy tego stożka.

Całka krzywoliniowa składowej stycznej wektora (całka krzywoliniowa skierowana, praca)

Całka krzywoliniowa składowej stycznej wektora $\boldsymbol{F}$ *po krzywej skierowanej* (l), zwana także *całką krzywoliniową skierowaną* lub *pracą wektora* $\boldsymbol{F}$ *na drodze* (l), jest oznaczana symbolami

$$\int_{(l)} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{l} = \int_{(l)} F_l\,dl = \int_{(l)} F\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{l})\,dl = \int_{(l)} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz \tag{27}$$

przy czym przyjmuje się następujące ustalenia:

— krzywa skierowana (l), zwana *drogą całkowania*, jest łukiem gładkim lub krzywą częściami gładką;

— jeśli krzywa (l) jest zamknięta, to całkę (27) nazywamy *cyrkulacją* wektora $\boldsymbol{F}$ po krzywej (l) i oznaczamy symbolem $\oint$; jeśli zaś jest to krzywa niezamknięta o końcach A i B, to pod znakiem całki zamiast (l) piszemy AB lub BA zależnie od zwrotu krzywej;

— *wektor podcałkowy* $\boldsymbol{F} = [X,\ Y,\ Z]$ jest funkcją, która każdemu punktowi $P = (x,y,z)$ krzywej (l) przyporządkowuje wektor

$$\boldsymbol{F}(P) = [X(P), Y(P), Z(P)] = [X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)]$$

— oś l styczna do krzywej (l) jest skierowana zgodnie ze zwrotem (l);

— liczba F_l, zwana składową styczną wektora $\boldsymbol{F}$, jest miarą prostokątnego rzutu wektora $\boldsymbol{F}$ na oś l;

— wektorowa różniczka łuku $d\boldsymbol{l} = [dx, dy, dz]$ oraz zwykła różniczka łuku dl są to symbole, które przy obliczaniu całki zastępujemy odpowiednimi wyrażeniami, zależnie od postaci równania krzywej (l).

Całka krzywoliniowa (27) jest liczbą wyznaczoną przez wektor podcałkowy $\boldsymbol{F}$ i krzywą (l), według definicji (*Zarys II*, s. 247), którą w skrócie zapisujemy wzorem wektorowym

$$\int_{(l)} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{l} = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}(P_j)\Delta \boldsymbol{l}_j \tag{28}$$

lub wzorem analitycznym

$$\int_{(l)} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{j=1}^{n} (X(P_j)\Delta x_j + Y(P_j)\Delta y_j + Z(P_j)\Delta z_j) \tag{29}$$

gdzie: $\Delta \boldsymbol{l}_j = [\Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j]$ jest wektorem cięciwy łączącej końce łuku częściowego, P_j jest obranym punktem łuku częściowego, $\boldsymbol{F}(P_j)$ jest wektorem podcałkowym w punkcie P_j, liczba λ, zwana *średnicą podziału*, jest długością najdłuższego łuku częściowego.

Uwagi

1. Jeśli wektor $\boldsymbol{F}$ jest w każdym punkcie łuku (l) prostopadły do łuku lub równy 0, to praca wektora $\boldsymbol{F}$ po łuku (l) jest równa 0.

2. Jeśli wektor $\boldsymbol{F}$ ma na łuku (l) składową styczną o wartości F_l stałej, to praca wektora $\boldsymbol{F}$ po łuku (l) jest iloczynem wartości F_l i długości łuku (l).

Obliczanie całki krzywoliniowej skierowanej

Łuk w przestrzeni dany parametrycznie. Jeśli łuk AB ma równania

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t);\quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \tag{30}$$

gdzie punkt A odpowiada wartości α, a punkt B wartości β, to

$$\int_{(AB)} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} [X(x,y,z)\dot{x} + Y(x,y,z)\dot{y} + Z(x,y,z)\dot{z}\,]\Big|_{\substack{x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)}} dt \tag{31}$$

gdzie kropka nad znakiem funkcji oznacza różniczkowanie względem t.

Łuk na płaszczyźnie dany parametrycznie. Jeśli łuk AB ma równania

$$x = x(t),\quad y = y(t);\quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \tag{32}$$

to

$$\int\limits_{(AB)} X\,dx+Y\,dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}[X(x,y)\dot{x}+Y(x,y)\dot{y}]\Bigg|_{\substack{x=x(t)\\ y=y(t)}} dt \tag{33}$$

Łuk na płaszczyźnie dany jawnie. Jeśli łuk AB ma równanie

$$y=y(x),\quad \alpha\leqslant x\leqslant\beta \tag{34}$$

to

$$\int\limits_{(AB)} X\,dx+Y\,dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}[X(x,y)+Y(x,y)y']\Big|_{y=y(x)} dx \tag{35}$$

Uwaga. Wzory (31), (33) i (35) pozostają prawdziwe, jeśli w nich AB zmienimy na BA, a jednocześnie przestawimy granice całkowania. Prawe strony wzorów (31), (33) i (35) mogą być całkami niewłaściwymi.

21.28. Za pomocą wzoru (31) obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną

a) $\int\limits_{(l)} x\,dx+y\,dy+z\,dz$ b) $\int\limits_{(l)} y\,dx+z\,dy+x\,dz$

po krzywej $(l)=\{x=2t, y=t^2, z=1-t;\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$, skierowanej zgodnie ze wzrostem parametru t.

21.29. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną

a) $\int\limits_{(l)} z\,dx+x\,dy+y\,dz$ b) $\int\limits_{(l)} y\,dx+z\,dy-x\,dz$

po krzywej $(l)=\{x=t^2,\ y=t^3,\ z=t;\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$, skierowanej zgodnie ze wzrostem parametru t.

21.30. Za pomocą wzoru (33) obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną

a) $\int\limits_{(l)} x\,dx+y\,dy$ b) $\int\limits_{(l)} x\,dy-y\,dx$

po łuku elipsy $(l)=\{x=2\cos t,\ y=\sin t;\ 0\leqslant t\leqslant \pi/2\}$, skierowanym zgodnie ze wzrostem parametru t.

21.31. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną

a) $\int\limits_{(l)} 2x\,dx+y^2\,dy$ b) $\int\limits_{(l)} 2x\,dy-y\,dx$

po ćwiartce okręgu $(l)=\{x=\cos t,\ y=\sin t;\ 0\leqslant t\leqslant \pi/2\}$, skierowanej zgodnie ze wzrostem parametru t.

21.32. Za pomocą wzoru (35) obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną

a) $\int\limits_{(l)} xy\,dx-x^2\,dy$ b) $\int\limits_{(l)} xy\,dy+x^2\,dx$

po łuku hiperboli $(l)=\{y=1/x,\ 1\leqslant x\leqslant 4\}$, skierowanym zgodnie ze wzrostem zmiennej x.

21.33. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną

a) $\displaystyle\int\limits_{(l)} \frac{y}{x}\,dx+\frac{x}{y}\,dy$ b) $\displaystyle\int\limits_{(l)} \frac{y}{x}\,dy-\frac{x}{y}\,dx$

po łuku paraboli $(l)=\{y=x^2,\ -1\leqslant x\leqslant 1\}$, skierowanym zgodnie ze wzrostem zmiennej x.

21.34. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną

a) $\int\limits_{(l)} yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$

po łuku $(l)=\{x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t;\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$, skierowanym zgodnie ze wzrostem parametru t;

b) $\displaystyle\int\limits_{(l)} \frac{yz}{x}\,dx+\frac{xz}{y}\,dy+\frac{xy}{z}\,dz$

po łuku $(l)=\{x=t,\ y=t^2,\ z=t^3;\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$, skierowanym zgodnie ze wzrostem parametru t;

c) $\int\limits_{\overline{AB}} x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz$

po odcinku $\overline{AB}$ o końcach $A=(1,1,1)$ i $B=(2,3,4)$, skierowanym od A do B. (Równania parametryczne odcinka — s. 150).

21.35. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną

a) $\int\limits_{\overline{AB}} -x\cos y\,dx+y\sin x\,dy$

po odcinku skierowanym od $A=(0,0)$ do $B=(\pi,2\pi)$;

b) $\int\limits_{(l)} (2a-y)\,dx-(a-y)\,dy$

po łuku cykloidy: $(l)=\{x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$, skierowanym zgodnie ze wzrostem t;

c) $\int\limits_{(l)} (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$

po łuku paraboli $(l)=\{y=x^2,\ -1\leqslant x\leqslant 1\}$, skierowanym zgodnie ze wzrostem zmiennej x.

Całkowanie po krzywej częściami gładkiej. Moduł pod całką

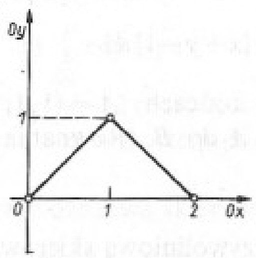
Całkę po krzywej częściami gładkiej, np. po łamanej, obliczamy w ten sposób, że obliczamy całki po poszczególnych częściach gładkich danej krzywej i dodajemy te całki.

Podobnie postępujemy, gdy na poszczególnych częściach drogi funkcja podcałkowa jest określona różnymi wzorami, np. na skutek występowania znaku modułu w funkcji podcałkowej.

21.36. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną

$$\int\limits_{(l)} (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$$

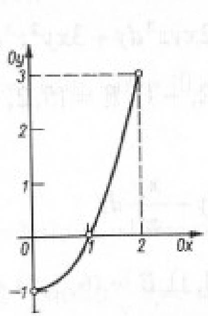
po łamanej $(l)=\{y=1-|1-x|,\ \ 0\leqslant x\leqslant 2\}$ skierowanej zgodnie ze wzrostem zmiennej x (rys. 5).

5)


21.37. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną

$$\int\limits_{(l)} |y|\,dx+x\,dy$$

po łuku paraboli $(l)=\{y=x^2-1,\ \ 0\leqslant x\leqslant 2\}$ skierowanym zgodnie ze wzrostem zmiennej x (rys. 6).

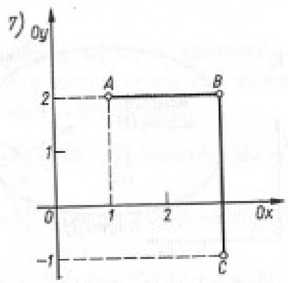
6)


Całkowanie po odcinku równoległym do osi układu

Obliczymy dla przykładu całkę krzywoliniową skierowaną

$$\int\limits_{ABC} xy\,dx+xy^2\,dy$$

po łamanej ABC o wierzchołkach $A=(1,2)$, $B=(3,2)$, $C=(3,-1)$ (rys. 7).

7)


Na odcinku $\overline{AB}$ jest $y=\text{const}=2$, $dy=0$, więc na tym odcinku drugi człon całki odpada. Na odcinku $\overline{BC}$ jest $x=\text{const}=3$, $dx=0$, więc na tym odcinku pierwszy człon całki odpada

$$\int\limits_{ABC} xy\,dx+xy^2\,dy=\int\limits_{\overline{AB}} xy\,dx+\int\limits_{\overline{BC}} xy^2\,dy=\int_1^3 2x\,dx+\int_2^{-1} 3y^2\,dy=-1$$

21.38. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną po łamanej ABC

$$\int\limits_{ABC} 2y\,dx-x\,dy$$

gdzie: $A=(1,1)$, $B=(4,1)$, $C=(4,3)$.

21.39. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną po łamanej $ABCD$

a) $\int\limits_{ABCD} y\,dx+x\,dy+2z\,dz$

gdzie: $A=(1,1,1), B=(3,1,1), C=(3,4,1), D=(3,4,2)$;

b) $\int\limits_{ABCD} y^2z^3\,dx+2xyz^3\,dy+3xy^2z^2\,dz$

gdzie: $A=(3,2,-1), B=(5,2,-1), C=(5,4,-1),$
$D=(5,4,1)$;

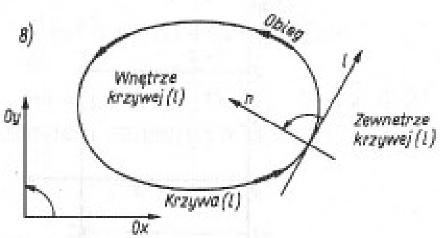
c) $\int\limits_{ABCD} \frac{y}{z}dx+\frac{x}{z}dy-\frac{xy}{z^2}dz$

gdzie: $A=(4,3,1), B=(6,3,1), C=(6,5,1), D=(6,5,2)$.

Obieg i cyrkulacja na płaszczyźnie

Obieg po krzywej zamkniętej zwykłej (l) (rys. 8) nazywamy *dodatnim* (względem wnętrza tej krzywej), jeśli oś styczna l, skierowana zgodnie z obiegiem po (l), tworzy z osią normalną n, skierowaną ku wnętrzu krzywej (l), kąt skierowany (l,n) o takim zwrocie jak kąt skierowany (Ox, Oy).

8)



Przez cyrkulację po krzywej zamkniętej zwykłej (l) (o ile nie podano dodatkowych określeń) rozumiemy cyrkulację po krzywej (l) z obiegiem dodatnim.

21.40. Obliczyć cyrkulację

$$\oint\limits_{(l)} y\,dx-x\,dy$$

a) po okręgu $(l)=\{x^2+y^2=a^2\}$,
b) po elipsie $(l)=\{x=a\cos t,\ y=b\sin t;\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$,
c) po łamanej $(l)=OABO$; $O=(0,0),\ A=(2,0),\ B=(0,3)$.

21.41. Obliczyć cyrkulację po łamanej

a) $\int\limits_{ABCA} x\,dy$; $A=(0,0),\ B=(2,0),\ C=(0,3)$

b) $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$; $A=(1,0),\ B=(0,1),\ C=(-1,0),$
$D=(0,-1)$

21.42. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną

a) $\int\limits_{(l)} (x^2-y^2)\,dx$ **b)** $\int\limits_{(l)} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dy-dx$

po łuku paraboli $(l)=\{y=x^2,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$, skierowanym przeciwnie do wzrostu zmiennej x.

Całka powierzchniowa składowej normalnej wektora (całka powierzchniowa zorientowana, strumień)

Całka powierzchniowa składowej normalnej wektora F po powierzchni (S), zwana także *całką powierzchniową zorientowaną* lub *strumieniem wektora* F *przez powierzchnię* (S), jest oznaczana symbolami

$$\iint\limits_{(S)} F\,dS=\iint\limits_{(S)} F_n\,dS=\iint\limits_{(S)} F\cos(F,n)\,dS= \tag{36}$$

$$=\iint\limits_{(S)} (X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma)\,dS= \tag{36a}$$

$$=\iint\limits_{(S)} X\,dy\,dz+Y\,dz\,dx+Z\,dx\,dy \tag{36b}$$

gdzie:

powierzchnia całkowania (S) jest zorientowana (*Zarys II*, s. 253), zamknięta lub niezamknięta, jeśli jest zamknięta, to używamy symbolu $\oiint$;

wektor podcałkowy $F=[X,Y,Z]$ jest funkcją, która każdemu punktowi $P=(x,y,z)$ na (S) przyporządkowuje wektor

$$F(P)=[X(x,y,z),\quad Y(x,y,z),\quad Z(x,y,z)]$$

oś normalna n do (S) w punkcie P jest skierowana zgodnie z orientacją (S); α,β,γ są kątami między osią n a osiami Ox, Oy i Oz;

liczba F_n, zwana *składową normalną* wektora $\boldsymbol{F}$, jest miarą rzutu prostokątnego wektora $\boldsymbol{F}$ na oś n;

znak dS, zwany *różniczką pola płata*, przy obliczaniu całki zastępuje się wyrażeniem zależnym od równania płata;

znak $d\boldsymbol{S} = [dydz, dzdx, dxdy] = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]\, dS$ jest nazywany *wektorową różniczką płata*.

Symbol (36b) jest innym zapisem całki (36a) (*Zarys II*, s. 257).

Całka oznaczana symbolami (36), (36a), (36b) jest liczbą wyznaczoną przez wektor $\boldsymbol{F}$ i powierzchnię (S) według definicji (*Zarys II*, s. 258), którą w skrócie zapisujemy wzorem

$$\iint\limits_{(S)} F_n\, dS = \lim_{\sigma \to 0} \sum_{j=1}^{k} F_n(P_j)\, \Delta S_j \tag{37}$$

gdzie: ΔS_j oznacza pole elementu stycznego, P_j jest punktem styczności, $F_n(P_j)$ jest składową normalną wektora podcałkowego w punkcie P_j, liczba σ, zwana *średnicą podziału*, jest największą ze średnic elementów stycznych.

Uwagi

1. Jeśli wektor $\boldsymbol{F}$ jest w każdym punkcie płata (S) styczny do płata lub równy 0, to strumień wektora $\boldsymbol{F}$ przez ten płat jest równy 0.

2. Jeśli wektor $\boldsymbol{F}$ ma na płacie (S) składową normalną o wartości F_n stałej, to strumień wektora $\boldsymbol{F}$ przez ten płat jest iloczynem wartości F_n przez pole płata.

Obliczanie całki powierzchniowej zorientowanej (strumienia)

Płat dany jawnie. Jeśli $(S) = \{z = z(x,y),\ (x,y) \in (G)\}$, to $\boldsymbol{N} = [-z_x, -z_y, 1]$ jest wektorem normalnym do (S) skierowanym zgodnie z osią Oz i zachodzi równość

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} = \varepsilon \iint\limits_{(G)} \boldsymbol{F}\boldsymbol{N}\, dx\, dy =$$

$$= \varepsilon \iint\limits_{(G)} [-X(x,y,z)z_x - Y(x,y,z)z_y + Z(x,y,z)]\, dx\, dy \tag{38}$$

gdzie za zmienną z w funkcjach X, Y, Z podstawiamy funkcję $z = z(x,y)$ określającą płat, a za z_x i z_y odpowiednie pochodne cząstkowe tej funkcji; przy czym $\varepsilon = +1$, gdy płat (S) jest zorientowany zgodnie z osią Oz, natomiast $\varepsilon = -1$, gdy płat (S) jest zorientowany przeciwnie.

Płat dany parametrycznie. Jeśli

$$(S) = \{x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ z = z(u,v);\ \ (u,v) \in (\Omega)\}$$

przy czym są spełnione założenia 1°—4° ze s. 116, to wektor

$$\boldsymbol{h} = [x_u, y_u, z_u] \times [x_v, y_v, z_v] = \left[\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\right]$$

jest wektorem normalnym do płata (S) i zachodzi równość

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} = \varepsilon \iint\limits_{(\Omega)} \boldsymbol{F}\boldsymbol{h}\, du\, dv = \varepsilon \iint\limits_{(\Omega)} \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du\, dv \tag{39}$$

gdzie za zmienne x, y, z w funkcjach X, Y, Z podstawiamy funkcje $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ określające płat, za x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v odpowiednie pochodne cząstkowe tych funkcji, natomiast (Ω) jest zbiorem całkowania; za ε podstawiamy $+1$, gdy płat (S) jest zorientowany zgodnie z wektorem $\boldsymbol{h}$, natomiast $\varepsilon = -1$, gdy (S) jest zorientowany przeciwnie.

Płat na sferze. Jeśli powierzchnia zorientowana (S) jest sferą

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad R = \text{const}$$

lub częścią tej sfery wyznaczoną przez zbiór (Ω) par (θ, φ) współrzędnych sferycznych, to

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} = \varepsilon \iint\limits_{(\Omega)} \boldsymbol{F}\boldsymbol{N} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \varepsilon \iint\limits_{(\Omega)} (X \sin\theta \cos\varphi + Y \sin\theta \sin\varphi + Z \cos\theta)\, R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{40}$$

gdzie do funkcji X, Y, Z wprowadzamy współrzędne sferyczne (zob. wzór (14)), (Ω) jest zbiorem całkowania, $\varepsilon = +1$ dla orientacji zewnętrznej, $\varepsilon = -1$ dla orientacji wewnętrznej powierzchni (S), natomiast $\boldsymbol{N} = [\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta]$ jest wektorem normalnym zewnętrznym.

Płat na walcu. Jeśli płat zorientowany (S) jest częścią powierzchni walcowej

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad r = \text{const}$$

wyznaczoną przez zbiór (Ω) par (φ, z) współrzędnych cylindrycznych, to

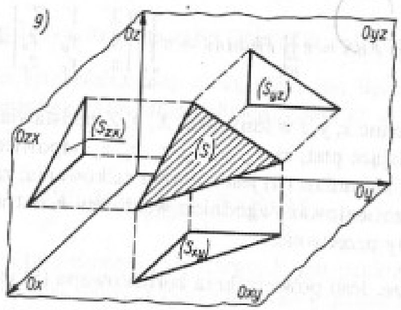
$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} = \varepsilon \iint\limits_{(\Omega)} \boldsymbol{F}\boldsymbol{N} r\, d\varphi\, dz = \varepsilon \iint\limits_{(\Omega)} (X\cos\varphi + Y\sin\varphi)\, r\, d\varphi\, dz \tag{41}$$

gdzie do funkcji X i Y wprowadzamy współrzędne cylindryczne (zob. wzór (15)), (Ω) jest zbiorem całkowania, $\varepsilon = +1$ dla orientacji zewnętrznej, $\varepsilon = -1$ dla orientacji wewnętrznej płata (S), $\boldsymbol{N} = [\cos\varphi, \sin\varphi, 0]$ jest wektorem normalnym zewnętrznym.

Uwaga. Prawe strony wzorów (38), (39), (40) i (41) mogą być całkami niewłaściwymi.

Obliczenie całki $\iint\limits_{(S)} X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy$

Niech (S) będzie płatem (*Zarys I*, s. 421) i załóżmy, że jego trzy rzuty (S_{yz}), (S_{zx}), (S_{xy}) na płaszczyzny Oyz, Ozx, Oxy (rys. 9) są wzajemnie jednoznaczne, tzn. że w każdym rzucie różnym punktom płata odpowiadają różne rzuty tych punktów.



Wówczas płat (S) może być przedstawiony równaniem jawnym względem każdej z trzech płaszczyzn układu

$$(S) = \begin{Bmatrix} x = x(y,z) \\ (y,z)\in(S_{yz}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y = y(z,x) \\ (z,x)\in(S_{zx}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z = z(x,y) \\ (x,y)\in(S_{xy}) \end{Bmatrix} \tag{42}$$

a strumień wektora $F = [X, Y, Z]$ przez płat (S) wyraża się wzorem

$$\iint\limits_{(S)} X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy =$$
$$= \varepsilon_x \iint\limits_{(S_{yz})} X\big(x(y,z), y, z\big)\,dy\,dz + \varepsilon_y \iint\limits_{(S_{zx})} Y\big(x, y(z,x), z\big)\,dz\,dx +$$
$$+ \varepsilon_z \iint\limits_{(S_{xy})} Z\big(x, y, z(x,y)\big)\,dx\,dy \tag{43}$$

gdzie każda z liczb ε_x, ε_y, ε_z jest równa 1 lub -1, zależnie od tego, czy orientacja płata (S) jest zgodna czy niezgodna z odpowiednią osią układu.

Jeśli płat (S) dany równaniem $z = z(x, y)$ jest zorientowany zgodnie z osią Oz, to przyjmujemy $\varepsilon_z = 1$ oraz

$$\varepsilon_x = \begin{cases} 1 & \text{gdy } z_x < 0 \text{ na } D \\ -1 & \text{gdy } z_x > 0 \text{ na } D \end{cases} \qquad \varepsilon_y = \begin{cases} 1 & \text{gdy } z_y < 0 \text{ na } D \\ -1 & \text{gdy } z_y > 0 \text{ na } D \end{cases}$$

gdzie D oznacza wnętrze rzutu (S_{xy}) płata (S).

Uwagi

1. Jeśli jeden z rzutów płata (S) ma pole równe 0, to całka po tym rzucie jest zerem i jeśli przy tym pozostałe rzuty spełniają założenie o wzajemnej jednoznaczności, to wzór (43) jest prawdziwy, a jego prawa strona redukuje się do dwóch całek.

Podobnie jest, gdy dwa rzuty płata (S) mają pola równe 0. Wówczas prawa strona wzoru (43) redukuje się do jednej całki.

Powyższe przypadki mogą się zdarzyć, gdy płat (S) jest częścią płaszczyzny lub powierzchni walcowej.

2. Wzór (43) pozostaje prawdziwy, gdy założenie o wzajemnej jednoznaczności rzutów ograniczymy do punktów wewnętrznych płata (S).

3. Jeśli (S) jest powierzchnią, którą można podzielić na skończenie wiele płatów rzutujących się jednoznacznie na płaszczyzny układu, to za pomocą wzoru (43) obliczamy strumienie wektora F przez te płaty i suma tych strumieni jest strumieniem przez powierzchnię (S).

21.43. Obliczyć strumień wektora $F = [X, Y, Z]$ przez powierzchnię zorientowaną (S), mając dane:

a) $F = [3x, -y, z]$, $(S) =$ płat $\{z = 9 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 9\}$ zorientowany zgodnie z osią Oz;

b) $F = [y, -2x, -z]$, $(S) =$ półsfera $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ zorientowana ku górze;

c) $F = [x, y, z]$, $(S) =$ część powierzchni walcowej $\{x^2 + y^2 = r^2, 0 \leqslant z \leqslant h\}$ zorientowanej na zewnątrz;

d) $F = [x, y, z]$, $(S) =$ część powierzchni stożkowej $z = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ dla $x^2 + y^2 \leqslant 4$ zorientowanej zgodnie z osią Oz;

e) $F = [xz, yz, xy]$, $(S) =$ część sfery $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1; x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$ zorientowanej na zewnątrz;

f) $F = [y - z, z - x, x - y]$, $(S) =$ część powierzchni stożkowej $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dla $x^2 + y^2 \leqslant h^2$, zorientowanej przeciwnie do osi Oz;

g) $F = [xz, xy, yz]$, $(S) =$ część powierzchni walcowej $\{(x^2 + y^2 = r^2;\ 0 \leqslant z \leqslant h, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ zorientowanej na zewnątrz;

h) $F = [0, 0, x^2y^2z]$, $(S) =$ dolna półsfera $\{z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, dla $x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ zorientowana przeciwnie do osi Oz.

21.44. Korzystając z uwag na s. 168 obliczyć strumień wektora F przez powierzchnię (S) wg poniższych danych:

a) $F = [x, y, z]$, (S) = całkowita powierzchnia sześcianu $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$, zorientowana na zewnątrz;

b) $F = [x, y, z]$, (S) = sfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$ zorientowana na zewnątrz;

c) $F = [xy, yz, xz]$, (S) = powierzchnia czworościanu o wierzchołkach: $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, zorientowana na zewnątrz;

d) $F = [-y, x, 0]$, (S) = sfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$ zorientowana na zewnątrz.

21.45. Płat paraboloidy hiperbolicznej, dany równaniem jawnym

$$(S) = \left\{ z = \frac{1}{2}(x^2-y^2) \quad \text{dla} \quad x^2+y^2 \leqslant 2 \right\}$$

zorientowany zgodnie z osią Oz, może być przedstawiony parametrycznie

$$(S) = \left\{ \begin{array}{l} x = u+v \\ y = u-v \\ z = 2uv \end{array} \quad \text{dla} \quad u^2+v^2 \leqslant 1 \right\}$$

i wtedy ma orientację przeciwną do wektora $\boldsymbol{h}$ (zob. objaśnienie wzoru (39)).

Za pomocą równania jawnego i wzoru (38) albo za pomocą równań parametrycznych i wzoru (39) obliczyć strumień wektora $F = [x, y, z^2]$ przez ten płat.

21.46. Płat wyznaczony przez skrzyżowanie dwóch walców

$$(S) = \{ z = \sqrt{a^2-y^2} \quad \text{dla} \quad x^2+y^2 \leqslant a^2 \}$$

zorientowany w górę, może być przedstawiony parametrycznie

$$(S) = \left\{ \begin{array}{ll} x = u & |u| \leqslant a\sin v \\ y = a\cos v & 0 \leqslant v \leqslant \pi \\ z = a\sin v & \end{array} \right\}$$

i wtedy ma orientację przeciwną do wektora $\boldsymbol{h}$. Obliczyć strumień wektora $F = [x, y, z]$ przez ten płat.

21.47. Płat powierzchni śrubowej, dany równaniem jawnym

$$(S) = \left\{ z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad \text{dla} \quad x^2+y^2 \leqslant 1, \ x > 0 \right\}$$

i zorientowany zgodnie z osią Oz, może być przedstawiony parametrycznie

$$(S) = \left\{ \begin{array}{ll} x = u\cos v & 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ y = u\sin v & |v| < \pi/2 \\ z = v & \end{array} \right\}$$

i wtedy ma orientację zgodną z wektorem $\boldsymbol{h}$. Obliczyć strumień wektora $F = [-y, \ x, \ 1+z^2]$ przez ten płat.

21.48. Płat Vivianiego, wycięty walcem $x^2+y^2 = ax$ z półsfery $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ i zorientowany zgodnie z osią Oz może być przedstawiony jako płat na sferze

$$(S) = \left\{ \begin{array}{ll} x = a\sin\theta\cos\varphi & |\varphi| \leqslant \pi/2-\theta \\ y = a\sin\theta\sin\varphi & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \\ z = a\cos\theta & \end{array} \right\}$$

zorientowanej na zewnątrz. Za pomocą wzoru (40) obliczyć strumień wektora $F = [x, y, z]$ przez ten płat.

21.49. Torus (rys. 7, s. 118) dany równaniami parametrycznymi

$$(S) = \left\{ \begin{array}{ll} x = (A+a\cos\alpha)\cos\varphi & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ y = (A+a\cos\alpha)\sin\varphi & 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi \\ z = a\sin\alpha & \end{array} \right\}, \quad A > a > 0$$

orientujemy na zewnątrz. Za pomocą wzoru (39) obliczyć strumień wektora F przez torus (S):

a) $F = [x, 0, 0]$ b) $F = [0, y, 0]$ c) $F = [0, 0, z]$
d) $F = [x, y, z]$ e) $F = [x/(x^2+y^2), \ y/(x^2+y^2), 0]$

Rozdział **22**

Pole wektorowe

Zakładamy, że funkcje występujące w tym rozdziale są dostatecznie regularne, tzn. że są klasy C^1, C^2 lub wyższej, zależnie od potrzeb danego zagadnienia.

Pole wektorowe i potencjał na płaszczyźnie Oxy

Pole wektorowe na płaszczyźnie (*Zarys II*, s. 262) jest dane wzorem

$$F(P) = [X(x, y), Y(x, y)], \quad (x, y) \in (G) \tag{1}$$

Potencjałem pola wektorowego $F = [X, Y]$ w obszarze (G) nazywamy funkcję

$$u = u(P) = u(x, y), \quad (x, y) \in (G) \tag{2}$$

która w obszarze (G) ma pochodne cząstkowe równe współrzędnym wektora F

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y, \quad (x, y) \in (G) \tag{3}$$

U w a g i

1. Jeśli u jest potencjałem pola F w obszarze (G), to u + const jest też potencjałem tego pola w tym obszarze.
2. Nie każde pole wektorowe ma potencjał.
3. Pole wektorowe, które ma potencjał, nazywamy *polem potencjalnym*.

Obliczenie całki krzywoliniowej za pomocą potencjału. Jeśli pole wektorowe $F = [X, Y]$ ma potencjał u w obszarze (G), a krzywa AB zawiera się w (G), to całka krzywoliniowa wektora F po krzywej AB jest równa różnicy wartości potencjału u w punkcie B i w punkcie A

$$\int_{AB} F dl = \int_{AB} X dx + Y dy = u(B) - u(A) \tag{4}$$

Niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania w polu potencjalnym. Jeśli pole F jest potencjalne w obszarze (G) i dwie krzywe (l_1) i (l_2) o wspólnym początku i wspólnym końcu zawierają się w (G), to

$$\int_{(l_1)} F dl = \int_{(l_2)} F dl \tag{5}$$

Zerowanie się cyrkulacji w polu potencjalnym. Jeśli pole F ma potencjał w obszarze (G) i krzywa zamknięta (l) zawiera się w (G), to

$$\oint_{(l)} F dl = 0 \tag{6}$$

Warunek istnienia potencjału. Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia potencjału pola wektorowego $F = [X, Y]$ w obszarze jednospójnym (tzn. takim, że każda krzywa zamknięta zawarta w (G) zawiera w swym wnętrzu wyłącznie punkty należące do (G)) jest, aby w każdym punkcie tego obszaru zachodziła równość

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \tag{7}$$

W obszarze niejednospójnym równość ta nie jest warunkiem wystarczającym.

Wyznaczenie potencjału. Jeśli pole wektorowe $F = [X, Y]$ spełnia w jednospójnym obszarze (G) warunek (7), to potencjał $u(P)$ tego pola w tym obszarze istnieje i można go wyznaczyć jako całkę krzywoliniową skierowaną lub za pomocą całek nieoznaczonych (*Zarys II*, s. 274).

S p o s ó b 1. Całkowanie po odcinku $\overline{AP}$ danym równaniami parametrycznymi

$$x = x_A + t(x_P - x_A), \quad y = y_A + t(y_P - y_A), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{8}$$

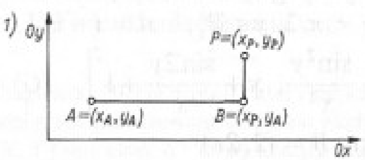
wyraża się wzorem

$$u(P) = \int_{\overline{AP}} X dx + Y dy = \int_0^1 [X(x, y)\Big|_{(8)} (x_P - x_A) + Y(x, y)\Big|_{(8)} (y_P - y_A)] dt \tag{9}$$

gdzie po wykonaniu obliczeń wskaźnik P przy x i y pomijamy.

S p o s ó b 2. Całkowanie po łamanej ABP (rys. 1)

1)



wyraża się wzorem

$$u(P) = \int\limits_{ABP} X\,dx + Y\,dy = \int\limits_{AB} X\,dx + \int\limits_{BP} Y\,dy =$$
$$= \int\limits_{x_A}^{x_P} X(x, y_A)dx + \int\limits_{y_A}^{y_P} Y(x_P, y)dy \qquad (10)$$

gdzie po wykonaniu obliczeń wskaźnik P przy x i y pomijamy.

S p o s ó b 3 (za pomocą całek nieoznaczonych). Szukamy funkcji $u = u(x, y)$ spełniającej dwa równania

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y(x, y) \qquad (11), (12)$$

Całkując równanie (11) względem x, otrzymujemy

$$u = \int X(x, y)dx = g(x, y) + f(y)$$

gdzie g jest funkcją pierwotną funkcji X względem x (otrzymaną w wyniku całkowania), a f jest funkcją niewiadomą (spełniającą rolę stałej całkowania). Aby obliczyć $f(y)$, wstawiamy sumę $g(x, y) + f(y)$ do (12) w miejsce u i obliczamy $\partial f/\partial y$. Całkując $\partial f/\partial y$ względem y, otrzymujemy $f(y)$. Szukanym potencjałem jest $u = g(x, y) + f(y)$.

22.1. Upewnić się, że pole wektorowe $\boldsymbol{F}$ spełnia w obszarze (G) warunek wystarczający istnienia potencjału. Wyznaczyć ten potencjał i za pomocą potencjału obliczyć całkę krzywoliniową wektora $\boldsymbol{F}$ po drodze zawartej w (G) i prowadzącej od A do B.

a) $\boldsymbol{F} = [2x + y,\ x - 2y - 3]$, $(G) = \mathscr{R}^2$, $A = (0,0)$, $B = (1,1)$

b) $\boldsymbol{F} = [x\sin 2y,\ x^2\cos 2y]$, $(G) = \mathscr{R}^2$, $A = (0,0)$, $B = (1, \pi/4)$

c) $\boldsymbol{F} = \left[x + \ln y,\ \dfrac{x}{y} + \sin y\right]$, $(G) = \{y > 0, x \in \mathscr{R}\}$, $A = (1, 1)$, $B = (0, \pi)$

d) $\boldsymbol{F} = [y^2 - 1,\ 2xy + 3y]$, $(G) = \mathscr{R}^2$, $A = (1, -1)$, $B = (-1, 1)$

e) $\boldsymbol{F} = [xy^2 + 1,\ x^2y - 1]$, $(G) = \mathscr{R}^2$, $A = (0,0)$, $B = (1,2)$

f) $\boldsymbol{F} = [\sin 2y - y\,\mathrm{tg}\,x,\ 2x\cos 2y + \ln\cos x + 2y]$, $(G) = \{|x| < \pi/2,\ y \in \mathscr{R}\}$, $A = (-\pi/3, -\pi/3)$, $B = (\pi/3, \pi/3)$

g) $\boldsymbol{F} = \left[y - \dfrac{\sin^2 y}{x^2},\ x + \dfrac{\sin 2y}{x} + 1\right]$, $(G) = \{x > 0, y \in \mathscr{R}\}$, $A = (1, \pi)$, $B = (2, 2\pi)$

22.2. Korzystając z twierdzeń o potencjale, udowodnić, że poniższa równość zachodzi dla każdej krzywej zamkniętej (l) zawartej w obszarze (G).

a) $\oint\limits_{(l)} 2xy\,dx + x^2dy = 0$, $\quad (G) = \mathscr{R}^2$

b) $\oint\limits_{(l)} xy^2\,dx + x^2y\,dy = 0$, $\quad (G) = \mathscr{R}^2$

c) $\oint\limits_{(l)} yx^{y-1}dx + x^y\ln x\,dy = 0$, $\quad (G) = \{x > 0\}$

d) $\oint\limits_{(l)} \dfrac{(x + 2y)dx + y\,dy}{(x + y)^2} = 0$, $\quad (G) = \{x + y > 0\}$

e) $\oint\limits_{(l)} X(x)dx + Y(y)dy = 0$; zakładamy, że funkcje $X(x)$ i $Y(y)$ są klasy C^1 w pewnych przedziałach E_1 i E_2, a obszar (G) jest produktem tych przedziałów, tj.

$$(G) = E_1 \times E_2 = \{(x, y) : (x \in E_1) \wedge (y \in E_2)\}$$

22.3. Wykazać, że cyrkulacja po krzywej (l) (*Zarys II*, s. 266)

$$\oint\limits_{(l)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

1° jest równa 0, gdy (l) nie zawiera w swym wnętrzu początku układu;

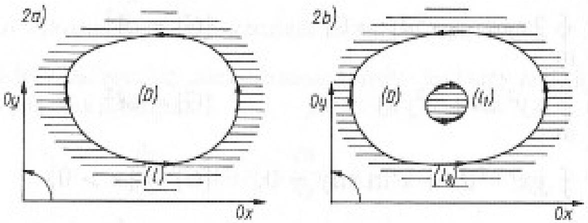
2° jest równa 2π, gdy początek układu leży wewnętrz (l).

Twierdzenie Greena

Jeśli obszar płaski regularny (D) ma brzeg (l), który jest krzywą zamkniętą zwykłą, gładką lub częściami gładką, skierowaną dodatnio względem (D) (rys. 2a), a pole wektorowe $\boldsymbol{F} = [X, Y]$ jest klasy C^1 w (D) i na (l), to zachodzi równość

$$\oint_{(l)} F_t\,dl = \oint_{(l)} X\,dx + Y\,dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (13)$$

zwana *twierdzeniem Greena* (*Zarys II*, s. 271).



Jeśli brzeg obszaru (D) składa się z dwóch krzywych zamkniętych (l_0) i (l_1) (rys. 2b), to równość (13) jest też prawdziwa, ale pod warunkiem, że przez całkę po (l) rozumiemy sumę całek po krzywych (l_0) i (l_1) skierowanych jak na rysunku.

Podobnie jest, gdy brzeg obszaru (D) składa się z wielu krzywych zamkniętych.

22.4. Stosując twierdzenie Greena, obliczyć poniższą cyrkulację za pomocą odpowiedniej całki podwójnej

a) $\int\limits_{OABO} (x+y)dx - 2x\,dy$; $O=(0,0)$, $A=(a,0)$, $B=(0,a)$

b) $\int\limits_{ACBA} y^2 dx + (x+y)^2 dy$; $A=(a,0)$, $B=(0,a)$, $C=(a,a)$

c) $\int\limits_{ABCA} \frac{1}{y}dx - \frac{1}{x}dy$; $A=(1,1)$, $B=(2,1)$, $C=(2,2)$

d) $\int\limits_{(l)} y\,dx - (x+y)dy$; (l) jest krzywą zamkniętą złożoną z łuku paraboli $y = x^2$ i odcinka prostej $y = 4$

e) $\int\limits_{(l)} (1-x^2)y\,dx + x(1+y^2)dy$, $(l) = \{x^2+y^2 = a^2\}$

f) $\int\limits_{(l)} xy(dx+dy)$, $(l) = \{x^2+y^2 = a^2\}$

g) $\int\limits_{(l)} xy(dx+dy)$, $(l) = \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right\}$

h) $\int\limits_{(l)} xy(dx+dy)$, $(l) = \{x^2+y^2 = ax\}$

Obliczenie pola obszaru za pomocą cyrkulacji po brzegu obszaru. Z twierdzenia Greena wynika, że obszar (D) ograniczony krzywą (l) ma pole

$$D = \frac{1}{2}\oint_{(l)} -y\,dx + x\,dy \qquad (14)$$

22.5. Obliczyć pole obszaru, którego brzegiem jest

a) elipsa: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

b) krzywa: $x = t^3 - t$, $y = 1 - t^2$; $|t| \leqslant 1$

c) krzywa: $x = \cos t$, $y = \cos t \sin t$; $|t| \leqslant \pi/2$

d) krzywa złożona z łuku cykloidy

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t; \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

i odcinka prostej $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Pole wektorowe i potencjał w przestrzeni $Oxyz$

Pole wektorowe w przestrzeni (*Zarys II*, s. 276) jest dane wzorem

$$F(P) = [X(x,y,z),\ Y(x,y,z),\ Z(x,y,z)], \quad (x,y,z) \in (\Omega) \qquad (15)$$

Potencjałem pola wektorowego $F = [X, Y, Z]$ w obszarze (Ω) nazywamy funkcję

$$u = u(P) = u(x,y,z), \quad (x,y,z) \in (\Omega) \qquad (16)$$

która w obszarze (Ω) ma pochodne cząstkowe równe współrzędnym wektora F

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = Z, \quad (x,y,z) \in (\Omega) \qquad (17)$$

Własności potencjału w przestrzeni są analogiczne do własności potencjału na płaszczyźnie:

- uwagi 1, 2, 3 ze s. 174 są prawdziwe także dla potencjału w przestrzeni;
- obliczenie całki krzywoliniowej za pomocą potencjału w przestrzeni wyraża się wzorem analogicznym do wzoru (4)

$$\int\limits_{AB} F\,dl = \int\limits_{AB} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = u(B) - u(A) \qquad (18)$$

- niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania (zob. wzór (5));
- zerowanie się cyrkulacji w polu potencjalnym (zob. wzór (6)).

Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia potencjału pola wektorowego $\boldsymbol{F} = [X, Y, Z]$ w obszarze (Ω) powierzchniowo *jednospójnym* (*Zarys II*, s. 290), tzn. takim, że na każdej krzywej zamkniętej zawartej w (Ω) można napiąć płat zawarty w (Ω), jest, aby w każdym punkcie tego obszaru zachodziły równości

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z} \tag{19}$$

W obszarze powierzchniowo niejednospójnym powyższe równości nie są warunkiem wystarczającym.

Wyznaczenie potencjału. Jeśli pole $\boldsymbol{F} = [X, Y, Z]$ spełnia warunek wystarczający (19), to potencjał tego pola można wyznaczyć na 3 sposoby: sposób 1 i 2 — jak na płaszczyźnie, sposób 3 — przedstawiamy.

Wyznaczenie potencjału za pomocą całek nieoznaczonych. Szukamy funkcji $u = u(x, y, z)$ spełniającej trzy równania

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = Z(x, y, z) \qquad (20), (21), (22)$$

Całkując równanie (20) względem x, otrzymujemy

$$u = \int X(x, y, z)dx = g(x, y, z) + f(y, z)$$

gdzie g jest funkcją pierwotną funkcji X względem x, a f — niewiadomą. Wstawiamy sumę $g + f$ do (21) w miejsce u i obliczamy $\partial f/\partial y$. Całkujemy $\partial f/\partial y$ względem y i otrzymujemy

$$f(y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \varphi(y, z) + \psi(z)$$

gdzie φ jest funkcją pierwotną pochodnej $\partial f/\partial y$, a ψ — niewiadomą. Wstawiamy sumę $g + \varphi + \psi$ do (22) w miejsce u i obliczamy $\partial \psi/\partial z$. Całkujemy $\partial \psi/\partial z$ względem z i obliczamy ψ. Potencjałem jest suma

$$u = g(x, y, z) + \varphi(y, z) + \psi(z) \tag{23}$$

22.6. Zbadać, czy pole wektorowe $\boldsymbol{F}$ spełnia warunek wystarczający istnienia potencjału i wyznaczyć ten potencjał

a) $\boldsymbol{F} = [2x + y + 3,\ 4y + x + 2,\ 6z - 6]$

b) $\boldsymbol{F} = [3x^2 - 3yz,\ 3y^2 - 3xz,\ 3z^2 - 3xy]$

c) $\boldsymbol{F} = [yz(2x + y + z),\ xz(x + 2y + z),\ xy(x + y + 2z)]$

d) $\boldsymbol{F} = [1/x + yz,\ 1/y + xz,\ 1/z + xy]$

e) $\boldsymbol{F} = \left[\dfrac{-y}{x^2 + y^2},\ \dfrac{x}{x^2 + y^2},\ \dfrac{1}{1 + z^2}\right]$

Pole centralne, pole płaskie, pole skalarne

Pole wektorowe centralne. Pole wektorowe $\boldsymbol{F}$ w przestrzeni $Oxyz$ nazywamy *polem centralnym o środku O*, jeśli w każdym punkcie P, różnym od O, wektor pola $\boldsymbol{F}(P)$ leży na osi OP i ma na niej miarę $F(r)$ zależną wyłącznie od odległości punktu P od środka pola

$$r = OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{24}$$

W środku pola wektor pola jest nieokreślony. Każde pole centralne ma potencjał. Pole centralne o środku O i jego potencjał wyrażają się wzorami

$$\boldsymbol{F}(P) = F(r)\frac{\overrightarrow{OP}}{OP} = F(r)\left[\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r}\right], \quad u = \int F(r)dr \tag{25}$$

22.7. Wyznaczyć potencjał pola wektorowego centralnego

a) $\boldsymbol{F} = \left[\dfrac{x}{r},\ \dfrac{y}{r}, \dfrac{z}{r}\right]$ **b)** $\boldsymbol{F} = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{x}{r},\ \dfrac{y}{r},\ \dfrac{z}{r}\right]$

c) $\boldsymbol{F} = \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{x}{r},\ \dfrac{y}{r},\ \dfrac{z}{r}\right]$

i obliczyć pracę L wektora $\boldsymbol{F}$ na drodze od punktu $A = (0, 0, 1)$ do punktu $B = (0, 0, h)$ oraz granicę tej pracy, gdy $h \to \infty$.

Pole wektorowe płaskie. Pole wektorowe $\boldsymbol{F}$ w przestrzeni $Oxyz$ nazywamy *polem płaskim*, jeśli istnieje płaszczyzna Γ, zwana *płaszczyzną pola*, taka, że każdy wektor pola jest do niej równoległy, przy czym na każdej prostej prostopadłej do Γ pole jest albo stałe, albo nieokreślone. Jeśli płaszczyzną pola jest płaszczyzna Oxy, to pole wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{F}(P) = [X(x, y), Y(x, y), 0] \tag{26}$$

22.8. Zbadać czy istnieje i wyznaczyć potencjał pola wektorowego

a) $\boldsymbol{F} = [x, y, 0]$ **b)** $\boldsymbol{F} = [y, x, 0]$ **c)** $\boldsymbol{F} = [-y, x, 0]$

22.9. Zbadać czy istnieje i wyznaczyć potencjał pola wektorowego

a) $\boldsymbol{F} = \left[\dfrac{-y}{\varrho},\ \dfrac{x}{\varrho},\ 0\right]$ **b)** $\boldsymbol{F} = \dfrac{1}{\varrho}\left[\dfrac{-y}{\varrho},\ \dfrac{x}{\varrho},\ 0\right]$

c) $F = \frac{1}{\varrho^2}\left[\frac{-y}{\varrho},\ \frac{x}{\varrho},\ 0\right]$

gdzie $\varrho = \sqrt{x^2+y^2} > 0$ jest odległością punktu P od osi Oz.

Pole skalarne. *Polem skalarnym* nazywamy funkcję, oznaczaną zwykle literą u, która każdemu punktowi $P = (x, y, z)$ przestrzeni $Oxyz$ lub pewnego obszaru tej przestrzeni przyporządkowuje pewną liczbę

$$u(P) = u(x, y, z) \tag{27}$$

Operacje różniczkowe na polach wektorowych i skalarnych

Nabla (operator różniczkowy Hamiltona) jest to wektorowy symbol różniczkowania

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right] \tag{28}$$

Za pomocą nabli definiujemy cztery operacje różniczkowe:

Nazwa operacji	Symbol	Definicja operacji. Operacja jest działaniem nabli
dywergencja (źródłowość)	div	na pole wektorowe skalarnie
rotacja (wirowość)	rot	na pole wektorowe wektorowo
gradient	grad	na pole skalarne
laplasjan	lapl	na pole skalarne dwukrotnie

$$\operatorname{div} F = \nabla F = \left[\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right][X,\ Y,\ Z] = \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z} \tag{29}$$

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \left[\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right]\times[X,\ Y,\ Z] =$$

$$= \left[\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\ \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\ \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right] \tag{30}$$

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left[\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right]u = \left[\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right] \tag{31}$$

$$\operatorname{lapl} u = \nabla\nabla u = \left[\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{32}$$

Dzięki tym operacjom można zapisać krótko niektóre zależności, np. $\operatorname{rot} F = 0$ jest warunkiem (19), a $\operatorname{grad} u = F$ wyraża związki (17).

22.10. Obliczyć gradient funkcji

a) x^3y^2z b) $ax+by+cz+d$ c) $(x+y+z)^2$

d) $(ax+by+cz+d)^2$ e) $\ln(xyz)$ f) e^{x+y+z}

22.11. Obliczyć gradient funkcji $u = x^3+y^2z$ w punktach $A = (1,1,1)$ i $B = (3,2,0)$. Wyznaczyć punkty, w których gradient tej funkcji jest równy 0.

22.12. Przyjmując oznaczenie $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, obliczyć

a) $\operatorname{grad} r$ b) $\operatorname{grad}\ln r$ c) $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$

22.13. Znaleźć punkty (x, y, z), w których $\operatorname{grad}(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ jest

a) równy 0 b) niezerowy i prostopadły do osi Oz.

22.14. Dana jest funkcja $u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$. Obliczyć cosinus kąta między gradientem funkcji u w punkcie $A = (1,2,2)$ a gradientem tej funkcji w punkcie $B = (-3,1,0)$.

22.15. Wykazać, że dla dowolnych pól wektorowych F, F_1, F_2 i skalarnych u, u_1, u_2 i dowolnej funkcji f jednej zmiennej są prawdziwe tożsamości

a) $\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0$

b) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$

c) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \operatorname{lapl} u$

d) $\operatorname{grad}(u_1u_2) = u_1\operatorname{grad}u_2 + u_2\operatorname{grad}u_1$

e) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u)\operatorname{grad} u$

f) $\operatorname{div}(uF) = F\operatorname{grad}u + u\operatorname{div}F$

g) $\operatorname{div}(F_1\times F_2) = F_2\operatorname{rot}F_1 - F_1\operatorname{rot}F_2$

h) $\operatorname{rot}(uF) = u\operatorname{rot}F + (\operatorname{grad}u)\times F$

i) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}F = \operatorname{grad}\operatorname{div}F - [\operatorname{lapl}X,\ \operatorname{lapl}Y,\ \operatorname{lapl}Z]$

j) $\operatorname{lapl}(u_1u_2) = u_1\operatorname{lapl}u_2 + u_2\operatorname{lapl}u_1 + 2\operatorname{grad}u_1\operatorname{grad}u_2$

22.16. Obliczyć dywergencję pola wektorowego $\boldsymbol{F}$

a) $\boldsymbol{F}=[x,y,z]$ b) $\boldsymbol{F}=[y^2+z^2,\ z^2+x^2,\ x^2+y^2]$

c) $\boldsymbol{F}=[x^2yz,\ xy^2z, xyz^2]$ d) $\boldsymbol{F}=\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2)$

22.17. Obliczyć

a) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)$ b) $\operatorname{div}(u_1\operatorname{grad}u_2)$ c) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{F})$

22.18. Przyjmując oznaczenia $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, f— dowolna funkcja jednej zmiennej, obliczyć

a) $\operatorname{div}[x/r,\ y/r,\ z/r]$ b) $\operatorname{div}\operatorname{grad}f(r)$

c) $\operatorname{div}\{f(r)[x,y,z]\}$ d) $\operatorname{grad}\operatorname{div}[-y/r^2,\ x/r^2, f(z)]$

22.19. Obliczyć rotację pola wektorowego $\boldsymbol{F}$, gdzie $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, a f jest dowolną funkcją jednej zmiennej

a) $\boldsymbol{F}=[x,y,z]$ b) $\boldsymbol{F}=[z,x,y]$

c) $\boldsymbol{F}=[y,z,x]$ d) $\boldsymbol{F}=[y,x,z]$

e) $\boldsymbol{F}=[-y,\ x,\ f(z)]$ f) $\boldsymbol{F}=[-y/r,\ x/r,\ f(z)]$

g) $\boldsymbol{F}=[-y/r^2, x/r^2,\ f(z)]$ h) $\boldsymbol{F}=f(r)[x,y,z]$

22.20. W poniższych tabelkach przedstawiono kilka pól skalarnych będących funkcjami odległości r od początku układu, względnie odległości ϱ od prostej Oz oraz laplasjany tych funkcji.

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	
$u(r)$	$\operatorname{lapl}u$
r^2	6
r	$2/r$
$\ln r$	$2/r^2$
$1/r$	0
$1/r^2$	$2/r^4$

$\varrho=\sqrt{x^2+y^2}$	
$u(\varrho)$	$\operatorname{lapl}u$
ϱ^2	4
ϱ	$1/\varrho$
$\ln\varrho$	0
$1/\varrho$	$1/\varrho^3$
$1/\varrho^2$	$4/\varrho^4$

Sprawdzić, czy laplasjany zostały obliczone prawidłowo.

Twierdzenie Gaussa

Jeśli obszar przestrzenny regularny (B) ma brzeg (S), który jest powierzchnią regularną zamkniętą zorientowaną na zewnątrz (B), a pole wektorowe $\boldsymbol{F}=[X,Y,Z]$ jest klasy C^1 w (B) i na (S), to strumień wektora $\boldsymbol{F}$ przez powierzchnię (S) jest równy całce dywergencji wektora $\boldsymbol{F}$ w obszarze (B), czyli zachodzi równość

$$\iint\limits_{(S)}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;\bigcirc\ \boldsymbol{F}d\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{(B)}\operatorname{div}\boldsymbol{F}dB \tag{33}$$

zwana *twierdzeniem Gaussa* (*Zarys II*, s. 287).

Jeśli brzeg obszaru (B) składa się z dwóch powierzchni zamkniętych (S_0) i (S_1) (np. z dwóch sfer współśrodkowych), to równość (33) jest też prawdziwa, ale pod warunkiem, że przez całkę po (S) rozumiemy sumę całek po (S_0) i (S_1) zorientowanych na zewnątrz (B).

Podobnie jest, gdy brzeg obszaru (B) składa się z wielu powierzchni zamkniętych.

22.21. Korzystając z twierdzenia Gaussa, obliczyć strumienie występujące w zad. 21.44 a, b, c, d.

22.22. Korzystając z twierdzenia Gaussa, obliczyć strumień wektora $\boldsymbol{F}$ przez powierzchnię zamkniętą (S) będącą brzegiem obszaru (B) i zorientowaną na zewnątrz (B)

a) $\boldsymbol{F}=[0,2y,3z]$, (B) — ostrosłup o wierzchołkach $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,2)$

b) $\boldsymbol{F}=[0,2y,xz]$, (B) — ostrosłup o wierzchołkach $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

c) $\boldsymbol{F}=[x+y,\ y+z,\ z+x]$, $(B)=\text{kula}\{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\}$

d) $\boldsymbol{F}=[xy,yz,xz]$,
$(B)=\frac{1}{8}\text{kuli}\{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0\}$

e) $\boldsymbol{F}=[x,y,z]$, $(B)=\text{stożek}\{0\leqslant z\leqslant 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$

f) $\boldsymbol{F}=[x^2,y^2,z^2]$,
$(B)=\frac{1}{8}\text{kuli}\{x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0\}$

g) $\boldsymbol{F}=[z^2,y^2,x^2]$, $(B)=\{0\leqslant z\leqslant 1-x^2-y^2\}$

h) $F = [x+z,\ x+y, y+z]$,
$(B) = \text{półkula}\{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2,\quad z \geqslant 0\}$

i) $F = [x^3, y^3, z^3]$, $\quad (B) = \text{kula}\{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2\}$

j) $F = [x+z, x+y, y+z]$,
$(B) = \text{walec}\{x^2+y^2 \leqslant a^2,\quad 0 \leqslant z \leqslant h\}$

k) $F = [x^3, y^3, z^3]$,
$(B) = \text{walec}\{x^2+y^2 \leqslant a^2,\quad 0 \leqslant z \leqslant h\}$

l) $F = [x^2, y^2, z^2]$,
$(B) = \text{bryła}\{0 \leqslant 2az \leqslant a^2-x^2-y^2,\quad x \geqslant 0,\quad y \geqslant 0\}$

Przypadek powierzchni niezamkniętej. Jeśli (S) jest powierzchnią niezamkniętą, ale istnieje płat (T) taki, że $(S) \cup (T)$ jest brzegiem pewnego obszaru (B) i zachodzi równość

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} + \iint\limits_{(T)} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} = \iiint\limits_{(B)} \operatorname{div} \boldsymbol{F} dB \tag{34}$$

to obliczając całki po (B) i po (T), możemy wyznaczyć całkę po (S). Jest to korzystne, jeśli obliczenie całek po (B) i po (T) jest łatwiejsze od obliczenia całki po (S).

22.23. Obliczyć strumień wektora F przez niezamkniętą powierzchnię (S)

a) $F = [z^2, xz, y^2]$, $\quad (S) = \{z = 4-x^2-y^2,\ z \geqslant 0\}$
(płat paraboloidy obrotowej)

b) $F = [y, z, x]$, $\quad (S) = \{x^2+y^2 = a^2 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant z \leqslant h\}$
(powierzchnia boczna walca)

Twierdzenie Stokesa

Jeśli płat (S) i będąca jego brzegiem krzywa zamknięta (K) mają orientację i skierowanie dostosowane do skrętności układu $Oxyz$ (*Zarys II*, s. 289, rys. 141.3) i jeśli płat (S) wraz ze swym brzegiem (K) zawiera się w obszarze określoności pola wektorowego F, to cyrkulacja wektora F po krzywej (K) jest równa strumieniowi rotacji wektora F przez płat (S), czyli zachodzi równość

$$\oint\limits_{(K)} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{l} = \iint\limits_{(S)} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} \tag{35}$$

zwana *twierdzeniem Stokesa*.
Dzięki twierdzeniu Stokesa można obliczanie cyrkulacji po krzywej zastąpić całkowaniem rotacji po dowolnym płacie napiętym na krzywej.

22.24. Korzystając z twierdzenia Stokesa, obliczyć cyrkulację wektora F po krzywej zamkniętej (K)

a) $F = [yz, xz, xy]$, $\quad (K)$ — łamana $OABO$ o wierzchołkach $O = (0,0,0)$, $\quad A = (1,1,0)$, $\quad B = (2,3,5)$

b) $F = [z-y,\ x-z,\ y-x]$, $\quad (K)$ — łamana $ABCA$ o wierzchołkach $A = (a,0,0)$, $\quad (B) = (0,a,0)$, $\quad C = (0,0,a)$

c) $F = [x(y-z),\ y(x-z),\ z(y-x)]$, $\quad (K)$ — łamana $ABCA$ o wierzchołkach $A = (a,0,0)$, $(B) = (0,a,0)$, $C = (0,0,a)$

d) $F = [-y, x, c]$, $\quad (K) = \{x^2+y^2 = 1,\quad z = 0\}$

e) $F = [y, -x, c]$, $\quad (K) = \{(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2,\quad z = 0\}$

f) $F = [y^2+z^2,\ x^2+z^2,\ x^2+y^2]$, $\quad (K)$ — łamana $ABCA$ o wierzchołkach $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$

g) $F = [x^2y^3, 1, z]$, $\quad (K) = \{x^2+y^2 = a^2,\ z = 0\}$; jako płat napięty na okręgu (K) można przyjąć koło albo półsferę

h) $F = [yz,\ z\sqrt{c^2-y^2},\ xy]$, $(K) = \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,\ z = 0\right\}$, $c > b$

i) $F = [x, y, x+y-1]$, $\quad (K) = \{x^2+y^2 = a^2,\ x+y+z = a\}$

j) $F = [y, (x-1)^2, z]$, $\quad (K)$ — krzywa przecięcia się walca $\{x^2+y^2-2x = 0\}$ z półsferą $\{x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geqslant 0\}$

Rozdział 23

Ciągi i szeregi funkcyjne

Zbieżność zwyczajna i zbieżność jednostajna

Ciąg funkcyjny (*Zarys II*, s. 293) oznaczamy symbolem (u_n) lub zapisujemy wzorem

$$u_n(x), \quad n \in \mathcal{N}, \quad x \in E \tag{1}$$

Funkcja graniczna ciągu (1), zwana także *granicą* ciągu (1)

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x), \quad x \in E \tag{2}$$

może być wyznaczona za pomocą znanych twierdzeń (*Zarys I*, s. 184—200) i istnieje, jeśli ciąg (1) jest zbieżny. Zbieżność ta może być *zwyczajna* (*punktowa*)

$$\bigwedge_{x\in E} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n>\delta} |u_n(x)-u(x)| < \varepsilon \tag{3}$$

lub *jednostajna*

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{x\in E} \bigwedge_{n>\delta} |u_n(x)-u(x)| < \varepsilon \tag{4}$$

Ciąg zbieżny w E jednostajnie jest zarazem zbieżny w E zwyczajnie.

Ciąg zbieżny w E zwyczajnie może nie być zbieżny w E jednostajnie i wówczas mówimy o nim, że jest zbieżny w E *niejednostajnie*.

Ciąg zbieżny w E jednostajnie jest zarazem zbieżny jednostajnie w każdym podprzedziale przedziału E.

Ciąg zbieżny jednostajnie w każdym domkniętym podprzedziale otwartego przedziału E jest zbieżny w E, ale zbieżność ta może być w E niejednostajna.

Badanie zbieżności ciągu funkcyjnego

Badanie zbieżności ciągu funkcyjnego opieramy na następującym *warunku koniecznym i wystarczającym zbieżności jednostajnej*:

Ciąg funkcyjny $u_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale E do funkcji $u(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w_n = \sup_{x\in E} |u_n(x) - u(x)| \to 0 \tag{5}$$

Jeśli warunek (5) nie jest spełniony, to ciąg $u_n(x)$
— albo nie jest zbieżny w przedziale E do funkcji $u(x)$,
— albo jest zbieżny w przedziale E do funkcji $u(x)$ niejednostajnie.

Kres górny funkcji f w zbiorze E, oznaczany symbolem

$$\sup_{x\in E} f(x) \qquad \text{(czyt. supremum } f \text{ na } E)$$

jest to liczba określona przez następujące dwa warunki:

1° w każdym punkcie x zbioru E zachodzi nierówność $f(x) \leqslant \sup_{x\in E} f(x)$,

2° jeśli $c < \sup_{x\in E} f(x)$, to w E istnieje punkt x, taki że $f(x) > c$.

Rozważmy ciąg funkcyjny

$$u_n(x) = x^n, \quad n \in \mathcal{N}, \quad x \in \mathcal{R} \tag{6}$$

Ciąg ten jest zbieżny w przedziale $(-1; 1)$ do funkcji granicznej (rys.)

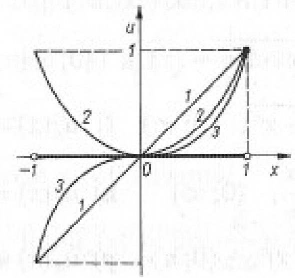
$$u(x) = 0, \quad |x| < 1 \tag{6'}$$

natomiast w punkcie $x = 1$ jest stały i ma granicę 1, a poza tym jest rozbieżny.

Na rysunku linie cienkie z numerami przedstawiają wyrazy początkowe

$$u_1(x) = x, \quad u_2(x) = x^2, \quad u_3(x) = x^3$$

linia gruba i punkt zaczerniony przedstawiają funkcję graniczną.



Twierdzimy, że ciąg funkcyjny (6) jest zbieżny do funkcji (6'), przy czym zbieżność ta jest:

1° *jednostajna* w każdym przedziale $\langle -q; q\rangle$, gdzie $0 < q < 1$;

2° *niejednostajna* w przedziale $(-1; 1)$.

Dowód tezy 1°. Stosując warunek (5) do przedziału $\langle -q; q\rangle$, mamy

$$w_n = \sup_{|x| \leqslant q} |u_n(x) - u(x)| = \sup_{|x| \leqslant q} |x^n - 0| = q^n \to 0$$

Warunek (5) jest spełniony, więc teza 1° została udowodniona.

Dowód tezy 2°. Stosując warunek (5) do przedziału $(-1; 1)$, mamy

$$w_n = \sup_{|x| < 1} |u_n(x) - u(x)| = \sup_{|x| < 1} |x^n - 0| = 1^n \to 1$$

Warunek (5) nie jest spełniony, zatem w przedziale $(-1; 1)$ nie ma zbieżności jednostajnej. Ale w tym przedziale jest na podstawie tezy 1° zbieżność zwyczajna, więc jest to zbieżność niejednostajna. Teza 2° została udowodniona.

23.1. Wyznaczyć funkcję graniczną ciągu funkcyjnego $u_n(x)$ w podanym przedziale i zbadać zbieżność tego ciągu w tym przedziale lub w pewnych jego częściach.

a) $u_n(x) = \dfrac{1}{n+x}$, $\langle 0; \infty)$ **b)** $u_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$, $\langle 0; \infty)$

c) $u_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $\langle 0; 1\rangle$ **d)** $u_n(x) = x^n - x^{2n}$, $\langle 0; 1\rangle$

e) $u_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $\langle 0; \infty)$ **f)** $u_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, $\langle 0; \infty)$

g) $u_n(x) = e^{-nx}$, $\langle 0; \infty)$ **h)** $u_n(x) = e^{x-n}$, $(-\infty; \infty)$

i) $u_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$, $(-\infty; \infty)$

j) $u_n(x) = n(\sqrt{x + 1/n} - \sqrt{x})$, $(0; \infty)$

k) $u_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$, $\langle 0; \infty)$ **l)** $u_n(x) = \sqrt[n]{1 + 1/x^n}$, $(0; \infty)$

m) $u_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$, $(0; \infty)$ **n)** $u_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx$, $(0; \infty)$

o) $u_n(x) = (\cos^2 x)^n$, $\langle 0; \pi\rangle$ **p)** $u_n(x) = (\cos^2 3x)^n$, $(-\infty; \infty)$

Własności ciągu funkcyjnego

Jeśli ciąg funkcyjny o wyrazach

$$u_n(x),\ n \in \mathcal{N},\quad x \in E \tag{7}$$

ciągłych w E jest w E jednostajnie zbieżny, to

1° funkcja graniczna $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ jest w E ciągła,

2° całka funkcji granicznej jest równa granicy całki n-tego wyrazu

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} u_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx, \quad a, b \in E \tag{8}$$

Jeśli nadto każdy wyraz $u_n(x)$ ma w E pochodną $\dfrac{d}{dx}u_n(x)$ i ciąg tych pochodnych jest w E jednostajnie zbieżny, to

3° pochodna funkcji granicznej jest równa granicy pochodnej n-tego wyrazu

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} u_n(x), \quad x \in E \tag{8'}$$

23.2. Zbadać, czy dla ciągu funkcyjnego

a) $u_n(x) = \begin{cases} nx(1-nx) & \text{dla } 0 \leqslant x < 1/n \\ 0 & \text{dla } 1/n \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

b) $u_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{dla } 0 \leqslant x < 1/n \\ 0 & \text{dla } 1/n \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

zachodzi równość

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} u_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(x)\,dx$$

23.3. Zbadać, czy dla ciągu funkcyjnego

a) $u_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ **b)** $u_n(x) = \dfrac{1}{n}\operatorname{arctg} nx$

c) $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\operatorname{arctg} nx$

zachodzi w punkcie $x = 0$ równość

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} u_n(x)$$

Ciąg funkcyjny dwuwskaźnikowy. Funkcja Dirichleta

Ciąg dwuwskaźnikowy, którego wyrazami są funkcje

$$u_{m,n}(x), \quad m,n \in \mathcal{N}, \quad x \in E \tag{9}$$

określone w pewnym przedziale E i zależne od dwóch wskaźników m, n, przedstawiamy w postaci tabeli

$$\begin{array}{ccccc} u_{1,1}(x) & u_{1,2}(x) & \dots & u_{1,n}(x) & \dots \\ u_{2,1}(x) & u_{2,2}(x) & \dots & u_{2,n}(x) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m,1}(x) & u_{m,2}(x) & \dots & u_{m,n}(x) & \dots \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \to f(x) & \text{dla } x \in E \end{array}$$

Jeśli dla każdego ustalonego n (tj. w każdej kolumnie) istnieje funkcja graniczna

$$f_n(x) = \lim_{m\to\infty} u_{m,n}(x) \tag{10}$$

i jeśli dla ciągu $f_1(x), f_2(x), \dots$ istnieje funkcja graniczna

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} u_{m,n}(x) \text{ dla } x \in E \tag{11}$$

to funkcję $f(x)$ nazywamy *podwójną granicą* dwuwskaźnikowego ciągu (9).

U w a g a. Jeśli będziemy wyznaczać te granice w przeciwnej kolejności (tj. najpierw względem n, a potem względem m), to podwójna granica może mieć inną wartość lub nie istnieć.

23.4. Udowodnić, że *funkcja Dirichleta* określona za pomocą podwójnej granicy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} [\cos^2(n!\pi x)]^m \tag{12}$$

przyjmuje wartość 1, gdy x jest liczbą wymierną, oraz wartość 0, gdy x jest liczbą niewymierną.

W s k a z ó w k a: zob. zad. 23.1 o), p).

23.5. Naśladując funkcję Dirichleta (12), określić za pomocą podwójnej granicy funkcję $f(x)$, która przyjmuje wartość 1, gdy x jest ułamkiem dziesiętnym skończonym (zob. *Zarys I*, s. 29) i wartość 0 dla pozostałych x.

Szereg funkcyjny

Szereg funkcyjny (*Zarys II*, s. 300) o wyrazach $u_n(x)$, oznaczamy symbolami

$$u_1(x)+\dots+u_n(x)\dots \text{ lub } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in E \tag{13}$$

Suma tego szeregu jest granicą ciągu sum częściowych

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} [u_1(x)+\dots+u_n(x)], \quad x \in E \tag{14}$$

i istnieje, jeśli ten ciąg jest zbieżny. Zbieżność ta może być *zwyczajna* lub *jednostajna*.

23.6. Wyznaczyć dla podanego szeregu sumę częściową $s_n(x)$, sumę $s(x)$, przedział zbieżności i rodzaj zbieżności ciągu sum częściowych w tym przedziale

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$; wskazówka: skorzystać z tożsamości

$$1+z+\dots+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} \text{ dla } z \neq 1.$$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$; wskazówka jak w zad. a).

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n+1}}\right)$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{nx^n} - \frac{1}{(n+1)x^{n+1}}\right)$

Szereg geometryczny o *ilorazie* z i *wyrazie początkowym* c, $c \neq 0$, zapisujemy w następujących postaciach

$$c+cz+cz^2+\ldots = c(1+z+z^2+\ldots) = c\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{15}$$

Numeracja wyrazów szeregu może się zaczynać od 0. Przyjęto umowę, że w szeregach tego typu symbol z^0 oznacza 1 dla każdego z (także dla $z=0$).

Szereg (15) jest zbieżny dla $|z|<1$ i ma sumę $\frac{c}{1-z}$. Zbieżność w przedziale $(-1;1)$ jest niejednostajna, ale w każdym domkniętym podprzedziale tego przedziału jest jednostajna (*Zarys II*, s. 301). Podstawiając w miejsce z dowolną funkcję $z=z(x)$, otrzymujemy *szereg geometryczny funkcyjny*.

23.7. Wyznaczyć sumę i przedział zbieżności szeregu geometrycznego

a) $1+\ln x+\ln^2 x+\ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln^n x$

b) $1-\cos x+\cos^2 x-\ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-\cos x)^n$

c) $1+\frac{x-2}{3}+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+\ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n$

d) $8-4x^2+2x^4-\ldots = 8\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x^2/2)^n$

e) $1+\frac{1-x^2}{2}+\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^2+\ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^n$

f) $1+(1-x)+(1-x)^2+\ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$

g) $1+\frac{1}{x+1}+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2+\ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)^n$

h) $1+\frac{x-1}{x+1}+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$

Badanie zbieżności szeregu funkcyjnego

Badanie zbieżności szeregu funkcyjnego wykonujemy za pomocą kryterium ilorazowego lub pierwiastkowego (*Zarys I*, s. 208, 209, *Zadania I*, s. 89) lub za pomocą kryterium całkowego (s. 96), przy czym korzystamy z rachunku granic i niektórych równości, np.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1 \text{ dla } c>0, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Niekiedy korzystamy też z warunku koniecznego zbieżności szeregu (*Zarys I*, s. 204) i z kryterium Leibniza (*Zarys I*, s. 210).

23.8. Zbadać zbieżność szeregu funkcyjnego

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^n x}{n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cos^n x$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-x)^n$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(1-x)^n$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nx^n}$ i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+nx^2}{1+n}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+nx^2}$ k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2\ln n}{(x^2+1)n^2}$ l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$

Zbieżność zwyczajna i zbieżność jednostajna szeregu funkcyjnego

Ponieważ suma $s(x)$ szeregu jest zwykle nieznana, korzystamy z warunku Cauchy'ego (*Zarys I*, s. 198, 207), w którym występuje różnica dwóch sum częściowych

$$s_M(x)-s_N(x) = u_{N+1}(x)+\ldots+u_M(x) = \sum_{n=N+1}^{M} u_n(x), \quad M>N$$

zwana *odcinkiem sumowym szeregu*, i otrzymujemy dwa warunki konieczne i wystarczające zbieżności szeregu funkcyjnego.

Szereg (13) jest *zbieżny* (zwyczajnie) w E wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigwedge_{x\in E}\bigvee_{\delta}\bigwedge_{M>N>\delta}|s_M(x)-s_N(x)|<\varepsilon \tag{16}$$

Szereg (13) jest *zbieżny jednostajnie* w E wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta}\bigwedge_{x\in E}\bigwedge_{M>N>\delta}|s_M(x)-s_N(x)|<\varepsilon \tag{17}$$

Kryterium majoranty

Majorantą szeregu funkcyjnego

$$u_1(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,\quad n\in\mathcal{N},\quad x\in E \tag{18}$$

nazywamy każdy szereg liczbowy

$$A_1+\ldots+A_n+\ldots \tag{19}$$

którego wyrazy spełniają nierówności

$$|u_n(x)|\leqslant A_n,\quad n\in\mathcal{N},\quad x\in E \tag{20}$$

Uwaga. Zamiast $n\in\mathcal{N}$ wystarczy przyjąć $n\in\mathcal{N}$, $n>c$, gdzie c jest pewną liczbą.

Kryterium majoranty. Jeśli majoranta (19) szeregu funkcyjnego (18) jest zbieżna, to szereg funkcyjny (18) jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w zbiorze E.

Poszukiwanie majoranty (majoryzacja szeregu). Majorantą danego szeregu funkcyjnego może być szereg geometryczny (s. 194) lub harmoniczny (s. 96), lub inny znany szereg albo szereg własnego pomysłu. W każdym przypadku trzeba sprawdzić, czy jest to szereg zbieżny.

23.9. Znaleźć majorantę i wykazać jednostajną zbieżność szeregu funkcyjnego w podanym przedziale (zadania k), l), m) są trudniejsze)

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x+2^n},\quad \langle 0;\infty)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x+2^n},\quad \langle 0;\infty)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{x+2^n},\quad \langle 0;h\rangle,\quad h>0$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\quad (-\infty;\infty)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}},\quad (-\infty;\infty)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+x^2},\quad (-\infty;\infty)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x},\quad (0;\infty)$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^3x},\quad (0;\infty)$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2},\quad (-\infty;\infty)$

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2+n^2},\quad \langle -h;h\rangle,\quad h>0$

k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}),\quad \langle 1/2;2\rangle$

l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)},\quad \langle h;\infty),\quad h>0$

m) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)},\quad (0;\infty)$

Własności szeregu funkcyjnego

Jeśli szereg funkcyjny o wyrazach $u_n(x)$ ciągłych w przedziale E jest jednostajnie zbieżny w przedziale E (wystarczy, że jest jednostajnie zbieżny w każdym domkniętym podprzedziale przedziału E), to:

1° suma tego szeregu jest funkcją ciągłą w przedziale E,

2° całka sumy szeregu o wyrazach $u_n(x)$ jest równa sumie szeregu całek tych wyrazów

$$\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx,\quad a,b\in E \tag{21}$$

a jeśli nadto każdy wyraz $u_n(x)$ ma w E pochodną i szereg tych pochodnych jest jednostajnie zbieżny w E (wystarczy, że jest jednostajnie zbieżny w każdym domkniętym podprzedziale przedziału E), to

3° pochodna sumy szeregu o wyrazach $u_n(x)$ jest równa sumie szeregu pochodnych tych wyrazów

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x), \quad x \in E \tag{22}$$

Wzory (21) i (22) nazywamy wzorami na całkowanie i różniczkowanie szeregu funkcyjnego *wyraz po wyrazie.*

23.10. Sprawdzić, czy założenia umożliwiające całkowanie wyraz po wyrazie są spełnione i obliczyć całkę, całkując dany szereg wyraz po wyrazie.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}\right)dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\right)dx$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x^2}\right)dx$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+x^2)}\right)dx$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+n^2x^2)}\right)dx$ f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n-x^2}\right)dx$

23.11. Całkując wyraz po wyrazie, obliczyć całkę

a) $\displaystyle\int_0^{1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x+2^n}\right)dx$ b) $\displaystyle\int_0^{1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x+2^n}\right)dx$

c) $\displaystyle\int_0^{1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{x+2^n}\right)dx$

Szeregi wywodzące się z szeregu geometrycznego. Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego o ilorazie bezwzględnie mniejszym od 1

$$1+x+x^2+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1 \tag{23}$$

wyprowadzamy: za pomocą obustronnego całkowania od 0 do x wzory

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \ln\frac{1}{1-x}, \quad |x|<1 \tag{24}$$

$$\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\ldots = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)n} = x+(1-x)\ln(1-x), \quad |x|<1 \tag{25}$$

a za pomocą różniczkowania i mnożenia przez x — wzory

$$x+2x^2+3x^3+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x|<1 \tag{26}$$

$$x+4x^2+9x^3+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \quad |x|<1 \tag{27}$$

23.12. Obliczyć daną całkę dwoma sposobami:

1) całkując wyraz po wyrazie i sumując otrzymane całki,
2) sumując szereg podcałkowy i całkując jego sumę.

Można przy tym korzystać ze wzorów (23)—(27), zastępując w nich x odpowiednim wyrażeniem, np. e^{-1} lub e^{-x}.

a) $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\right)dx$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\right)dx$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}\right)dx$

23.13. Obliczyć podaną pochodną, różniczkując dany szereg wyraz po wyrazie (jeśli są spełnione założenia umożliwiające takie różniczkowanie w danym przedziale)

a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x+2^n}, \quad \langle 0;\infty)$

b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x+2^n}, \quad \langle 0;\infty)$

c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{x+2^n}, \quad \langle 0;\infty)$

d) $\dfrac{d}{dx}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}$ (zadanie to wymaga zastosowania kryterium Dirichleta)

e) $\dfrac{d}{dx}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^3}$, $(-\infty;\infty)$

f) $\dfrac{d}{dx}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n!}$, $(-\infty;\infty)$

g) $\dfrac{d}{dx}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2x^2}$, $(0;\infty)$

h) $\dfrac{d}{dx}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(1+x^2)}$, $(-\infty;\infty)$

Kryterium Dirichleta

Szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x), \quad x\in E \tag{28}$$

jest *zbieżny jednostajnie* w przedziale E, jeśli ciąg liczb a_n dąży monotonicznie do 0, a sumy

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x), \quad x\in E, \quad n\in\mathcal{N} \tag{29}$$

są *jednostajnie ograniczone*, tzn. istnieje liczba K, taka że

$$|u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)|\leqslant K, \quad x\in E, \quad n\in\mathcal{N} \tag{30}$$

W n i o s e k. Szeregi trygonometryczne

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^r}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^r} \tag{31), (32}$$

są jednostajnie zbieżne:

— dla $0<r\leqslant 1$ w każdym domkniętym podprzedziale przedziału $(0;2\pi)$, a także przedziałów $(2k\pi;\ 2(k+1)\pi)$, $k\in\mathcal{Z}$;

— dla $r>1$ w przedziale $(-\infty;\infty)$, na podstawie kryterium majoranty.

Szeregi potęgowe. Promień zbieżności

Szereg potęgowy zmiennej x o *współczynnikach* a_n i *środku* x_0

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{33}$$

ma *przedział zbieżności* $(x_0-R;x_0+R)$, gdzie liczba R, zwana *promieniem zbieżności* szeregu, jest określona wzorami

$$R=\frac{1}{\lambda} \tag{34}$$

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \tag{35}$$

Pierwsze dwie z tych granic mogą nie istnieć, trzecia zawsze istnieje. Jeśli pierwsza lub druga z tych granic istnieje, to jest równa trzeciej. Granica lim sup (czyt. limes superior) jest największą z granic ciągów wybranych z danego ciągu (*Zarys II*, s. 306).

Sens wzoru (34), gdy $\lambda=0$ lub $\lambda=\infty$, zob. *Zarys II*, s. 305, określamy umową: jeśli $\lambda=0$, to $R=\infty$, a jeśli $\lambda=\infty$, to $R=0$.

Własności szeregów potęgowych

1. Każdy szereg potęgowy jest:
   - zbieżny bezwzględnie wewnątrz przedziału zbieżności,
   - zbieżny jednostajnie w każdym domkniętym podprzedziale przedziału zbieżności,
   - rozbieżny zewnątrz przedziału zbieżności, jeśli przedział zbieżności jest ograniczony.
2. Suma szeregu potęgowego może być różniczkowana i całkowana wyraz po wyrazie (*Zarys II*, s. 307).
3. Dla zbieżności szeregu potęgowego w punktach końcowych przedziału zbieżności nie ma uniwersalnej reguły. Zbieżność w tych punktach jest własnością indywidualną każdego szeregu (zob. tw. Abela, *Zarys II*, s. 308).

U w a g a. Szereg jest określony, jeśli jest dany wzór na jego n-ty wyraz.

23.14. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^r x^n, \quad r \in \mathcal{R}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n}, \quad a > 0$ **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{2n}}, \quad a > 0$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n/2}}, \quad a > 0$ **j)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}, \quad a > 0$

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ **l)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ **n)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad a > b > 0$

23.15. Podany fragment szeregu potęgowego uzupełnić wzorem na n-ty wyraz (można to zrobić na wiele sposobów), następnie zapisać ten szereg za pomocą znaku $\sum$ i obliczyć jego promień zbieżności.

a) $10x + 100x^2 + 1000x^3 + \ldots$

b) $(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2 \cdot 10} + \frac{(x-1)^3}{3 \cdot 10^2} + \ldots$

c) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

d) $1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + \ldots$

e) $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots$

f) $(x+1) - \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(x+1)^5}{5 \cdot 5!} - \frac{(x+1)^7}{7 \cdot 7!} + \ldots$

g) $1 + 3x + 2 \cdot 3^2 x^2 + 3 \cdot 3^3 x^3 + \ldots$

h) $\frac{(x-2)}{1 \cdot 2} + \frac{(x-2)^2}{2 \cdot 3} + \frac{(x-2)^3}{3 \cdot 4} + \ldots$

i) $x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(4x)^4}{4!} + \ldots$

j) $x + (2x)^2 + (3x)^3 + \ldots$

23.16. Korzystając z szeregu geometrycznego (23) i szeregów wywodzących się z niego (24) — (27), rozwinąć funkcję w szereg potęgowy o danym środku x_0 i podać promień zbieżności tego szeregu.

a) $\frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0$ **b)** $\frac{1}{x}, \quad x_0 = 1$

c) $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2$ **d)** $\frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 2$

e) $\ln \frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0$ **f)** $\ln(1+x), \quad x_0 = 0$

g) $\ln x, \quad x_0 = 1$; wsk.: szereg z zad. b) scałkować od 1 do x;

h) $(1+x)\ln(1+x), \quad x_0 = 0$; wsk.: szereg z zad. f) pomnożyć przez $1+x$ albo skorzystać ze wzoru (25);

i) $\frac{1}{(1-x)^2}, \quad x_0 = 0$; wsk.: szereg (23) zróżniczkować albo szereg (26) podzielić przez x albo szereg (23) pomnożyć przez ten sam szereg (*Zarys I*, s. 214);

j) $\frac{5x-12}{x^2+5x-6}, \quad x_0 = 0$; wsk.: rozłożyć na ułamki proste;

k) $\frac{x}{(1-x)^2(1+x)}, \quad x_0 = 0$; wsk.: rozłożyć na ułamki proste albo szereg (26) pomnożyć przez szereg z zad. a).

Szeregi Maclaurina najważniejszych funkcji (*Zarys I*, s. 311—312)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathcal{R} \tag{36}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathcal{R} \tag{37}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathcal{R} \tag{38}$$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n,$$

$$p \in \mathcal{R}, \ |x| < 1 \tag{39}$$

23.17. Korzystając ze wzorów (36)—(39), rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję

a) e^{x^2} b) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

c) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ d) $\sqrt{1+x}$

e) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ f) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

g) $\frac{1}{1+x^2}$ oraz funkcję $\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ oraz funkcję $\arcsin x = \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

i) e^{-x^2} oraz funkcję $\operatorname{Erf} x = \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$

(Erf — funkcja błędu (error function), *Zarys II*, s. 310).

Całki nieelementarne

Całki nieelementarne (*Zarys II*, s. 14) obliczamy w ten sposób, że funkcję podcałkową rozwijamy w szereg potęgowy i otrzymany szereg całkujemy wyraz po wyrazie.

Jeśli funkcja podcałkowa jest ułamkiem postaci

$$\frac{e^x-1}{x},\quad \frac{1-\cos x}{x},\quad \frac{\sin x}{x},\quad \frac{\operatorname{arctg} x}{x},\quad \frac{\arcsin x}{x} \tag{40}$$

to jako ułamek jest w punkcie $x=0$ nieokreślona, ale ponieważ ma w tym punkcie granicę skończoną, to nadajemy jej w tym punkcie wartość równą granicy i otrzymujemy funkcję określoną i ciągłą w całym przedziale określoności licznika. Tak rozszerzoną funkcję oznaczamy nadal symbolem (40). W praktyce to rozszerzenie wykonujemy w ten sposób, że licznik ułamka (40) rozwijamy w szereg potęgowy i ten szereg dzielimy przez x.

23.18. Korzystając ze wzorów (36), (37), (38) i zad. 23.17 g), h), e), obliczyć całkę nieelementarną

a) $\int\limits_0^x \frac{e^t-1}{t}\,dt$ b) $\int\limits_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt$ c) $\operatorname{Si} x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$

(Si — sinus całkowy (sine integral), *Zarys II*, s. 310. Oprócz Si x istnieje si $x=$ Si $x-\pi/2$).

d) $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$ e) $\int\limits_0^x \frac{\arcsin t}{t}\,dt$ f) $\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$

Szeregi trygonometryczne

Szeregiem trygonometrycznym (*Zarys II*, s. 317, 318) nazywamy szereg

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{41}$$

Jeśli f jest funkcją całkowalną, to szeregiem Fouriera funkcji f w przedziale $\langle -\pi,\pi\rangle$ nazywamy szereg (41) o współczynnikach wyznaczonych przez *wzory Eulera–Fouriera* (wzory E–F)

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \tag{42}$$

dla $n=0,1,2,\ldots,$ dla $n=1,2,\ldots$

Jeśli funkcja f jest parzysta, to $b_1=b_2=\ldots=0$ oraz

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{43}$$

i wówczas szereg (41) składa się ze stałej i cosinusów i jest nazywany *szeregiem cosinusów*.

Jeśli funkcja f jest nieparzysta, to $a_0=a_1=a_2=\ldots=0$ oraz

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\quad n=1,2,\ldots \tag{44}$$

i wówczas szereg (41) składa się ze sinusów i jest nazywany *szeregiem sinusów*.

Suma szeregu Fouriera funkcji f może być różna od funkcji f.

Warunki Dirichleta dla szeregu Fouriera. Jeśli funkcja f spełnia w przedziale $\langle -\pi;\pi\rangle$ *warunki Dirichleta*, tzn. jest w tym przedziale 1° ograniczona, 2° *przedziałami ciągła i monotoniczna* (*Zarys I*, s. 227), to szereg Fouriera funkcji f jest w tym przedziale zbieżny i ma sumę $s(x)$, która
— wewnątrz tego przedziału przyjmuje wartości

$$s(x)=\begin{cases} f(x), \text{ jeśli } x \text{ jest punktem ciągłości funkcji } f,\\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, \text{ jeśli } x \text{ jest punktem nieciągłości funkcji } f\\ \qquad (\textit{Zarys II}, \text{ s. } 320, \text{ wzór } (146.9))\end{cases}$$

— w punktach końcowych tego przedziału przyjmuje wartość

$$s(\pi)=s(-\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

— na zewnątrz tego przedziału może być różna od f.

Rozwinięcie funkcji w szereg Fouriera polega na obliczeniu współczynników tego szeregu i napisaniu równości między daną funkcją a odpowiadającym jej szeregiem oraz dołączeniu informacji dla jakich wartości x w przedziale $\langle -\pi;\pi\rangle$ ta równość jest spełniona.

23.19. Rozwinąć w szereg Fouriera w przedziale $\langle -\pi;\pi\rangle$ funkcję

a) x **b)** $\frac{1}{4}x^2$ **c)** $\pi-|x|$ **d)** $|\sin x|$

e) e^x **f)** $\begin{cases} 0 \text{ dla } x\geqslant 0\\ -x \text{ dla } x<0\end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x^2 \text{ dla } x\geqslant 0\\ 0 \text{ dla } x<0\end{cases}$

Szereg Fouriera funkcji f w przedziale $\langle -h;h\rangle$, $h>0$, ma postać

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\frac{\pi}{h}x\right)+b_n\sin\left(n\frac{\pi}{h}x\right)\right] \tag{45}$$

wzory E–F dla tego przedziału mają postać

$$a_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{h}x\right)dx,\qquad b_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{h}x\right)dx \tag{46}$$

dla $n=0,1,\dots$ dla $n=1,2,\dots$

Jeśli funkcja f jest parzysta, to $b_1=b_2=\dots=0$ oraz

$$a_n=\frac{2}{h}\int_{0}^{h}f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{h}x\right)dx,\quad n=0,1,2,\dots \tag{47}$$

i szereg (45) redukuje się do *szeregu cosinusów*.

Jeśli funkcja f jest nieparzysta, to $a_0=a_1=a_2=\dots=0$ oraz

$$b_n=\frac{2}{h}\int_{0}^{h}f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{h}x\right)dx,\quad n=1,2,\dots \tag{48}$$

i szereg (45) redukuje się do *szeregu sinusów*.

Warunki Dirichleta dla szeregu Fouriera w przedziale $\langle -h;h\rangle$ są analogiczne jak w przedziale $\langle -\pi;\pi\rangle$.

23.20. Rozwinąć w szereg Fouriera w przedziale $\langle -2;2\rangle$ funkcję

a) x **b)** $\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1 & \text{dla } x>0\\ 0 & \text{dla } x=0\\ -1 & \text{dla } x<0\end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 0 & \text{dla } |x|<1\\ 1/2 & \text{dla } |x|=1\\ 1 & \text{dla } |x|>1\end{cases}$

23.21. Rozwinąć w szereg Fouriera w przedziale $\langle -1;1\rangle$ funkcję

a) $|x|$ **b)** x^2 **c)** $\begin{cases} 1-x & \text{dla} & 0<x\leqslant 1\\ 0 & \text{dla} & x=0\\ -1-x & \text{dla} & -1\leqslant x<0\end{cases}$

Szereg Fouriera w przedziale $\langle 0;h\rangle$. Jeśli funkcja f jest określona w przedziale $\langle 0;h\rangle$ i chcemy ją w tym przedziale rozwinąć w szereg Fouriera, to zmieniając lub uzupełniając jej określenia poza przedziałem $\langle 0;h\rangle$, możemy otrzymać następujące dwa rozszerzenia funkcji f na przedział $\langle -h;h\rangle$

$$\begin{cases} f(x) & \text{dla} & 0\leqslant x\leqslant h\\ f(-x) & \text{dla} & -h\leqslant x<0\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases} f(x) & \text{dla} & 0\leqslant x\leqslant h\\ -f(-x) & \text{dla} & -h\leqslant x<0\end{cases}$$

rozszerzenie parzyste rozszerzenie nieparzyste

Stosując do funkcji f wzory (47), względnie — wzory (48), otrzymamy dwa szeregi Fouriera funkcji f w przedziale $\langle 0;h\rangle$: szereg cosinusów i szereg sinusów. Oba te szeregi przedstawiają w przedziale $\langle 0;h\rangle$ funkcję f w sposób zgodny z twierdzeniem o szeregu Fouriera.

23.22. Rozwinąć w przedziale $\langle 0;2\rangle$ funkcję

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{dla } 0\leqslant x<1\\ 1/2 & \text{dla } \quad x=1\\ 0 & \text{dla } 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

a) w szereg cosinusów **b)** w szereg sinusów.

23.23. Rozwinąć w przedziale $\langle 0; 2\rangle$ funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant x < 1 \\ 3/2 & \text{dla } \quad\; x = 1 \\ 2 & \text{dla } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

a) w szereg cosinusów **b)** w szereg sinusów.

23.24. Rozwinąć w przedziale $\langle 0; 1\rangle$ funkcję e^x

a) w szereg cosinusów **b)** w szereg sinusów.

Odpowiedzi

Odpowiedzi do rozdziału 14

14.1. a) $bx+C,\quad x^2/2+C,\quad ax^2/2+C,\quad ax^2/2+bx+C$

b) $x^3/3+C,\quad ax^3/3+C,\quad ax^3/3+bx^2/2+cx+C$

c) $x^4/4+C,\quad ax^4/4+C,\quad 3x^4+3x^3-5x^2-x+C$

d) $\int x^{-2}dx = x^{-1}/(-1)+C = -1/x+C,\quad -1/(2x^2)+C,$
$-1/x+1/(2x^2)+C,\quad x^3/3+1/x+C$

e) $\int x^{1/2}dx = x^{3/2}/(3/2)+C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C,$

$\int x^{3/2}dx = x^{5/2}/(5/2)+C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C,$

$\int x^{-1/2}dx = x^{1/2}/(1/2)+C = 2\sqrt{x}+C,$

$\int (x^{1/2}-x^{-1/2})dx = x^{3/2}/(3/2)-x^{1/2}/(1/2)+C =$
$= \frac{2}{3}\sqrt{x}\,(x-3)+C$

f) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C,\quad \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C,\quad \frac{4}{7}x^{7/4}+C,\quad -\frac{4}{3}x^{-3/4}+C$

g) $\ln|x|+C = \ln|x|+\ln|A| = \ln|Ax|,\quad A\neq 0,$
$2\ln|x|+C = \ln(x^2)+C = \ln(Ax^2),\quad A>0,$
$\frac{1}{2}\ln|x|+C = \ln\sqrt{|x|}+C,\quad \ln|x|+1/x+C$

h) $e^x+C,\quad 5e^x+C,\quad e^{x+5}+C,\quad 5^x/\ln 5+C$

i) $\sin x+C,\quad -\cos x+C,\quad a\sin x-b\cos x+C,$
$-\cos(x+a)+C$

j) $\ln|\sin x|+C,\quad -\ln|\cos x|+C,\quad \ln|\operatorname{tg} x|+C,$
$\ln|\sin x\cos x|+C = \ln\left|\frac{1}{2}\sin 2x\right|+C =$
$= \ln\frac{1}{2}+\ln|\sin 2x|+C = \ln|\sin 2x|+C_1$

k) $\operatorname{tg} x+C,\quad \operatorname{tg} x-x+C,\quad -\operatorname{ctg} x+C,\quad -\operatorname{ctg} x-x+C$

l) $\arcsin x+C,\quad 4\arcsin x+C,\quad \frac{1}{2}\arcsin x+C,$
$\frac{1}{4}\arcsin x+C$

m) $\operatorname{arctg} x+C,\quad \frac{3}{4}\operatorname{arctg} x+C,\quad x+\operatorname{arctg} x+C,$
$x-\operatorname{arctg} x+C$

14.2. a) $\frac{1}{3}x^3+C,\quad \frac{1}{6}(2x+5)^3+C,\quad \frac{1}{3}(x+5)^3+C,\quad -\frac{1}{3}(1-x)^3+C$

b) $\frac{1}{4}x^4+C,\quad \frac{1}{4}(x-8)^4+C,\quad \frac{1}{32}(1+8x)^4+C,$
$-\frac{1}{32}(1-8x)^4+C$

c) $-\frac{1}{x}+C,\quad \frac{-1}{x-a}+C,\quad \frac{-1}{x+1}+C,\quad \frac{-1}{5(5x-8)}+C$

d) $\frac{-1}{2x^2}+C,\quad \frac{-1}{2(x-a)^2}+C,\quad \frac{-1}{14(7x+1)^2}+C,\quad \frac{1}{10(1-5x)^2}+C$

e) $2\sqrt{x}+C,\quad \frac{2}{3}\sqrt{3x+4}+C,\quad -\sqrt{1-2x}+C,$
$-2\sqrt{-x}+C$

f) $\frac{2}{3}x^{3/2}+C,\quad \frac{2}{3}(x+k)^{3/2}+C,\quad \frac{2}{9}(3x+7)^{3/2}+C,$
$-\frac{1}{3}(1-2x)^{3/2}+C$

g) $\ln|x|+C,\quad \ln|x+k|+C,\quad \frac{1}{3}\ln|3x+4|+C,$
$-\frac{1}{5}\ln|2-5x|+C$

h) $e^x+C,\quad \frac{1}{3}e^{3x}+C,\quad -\frac{1}{3}e^{-3x}+C,\quad -e^{3-x}+C$

i) $\frac{10^x}{\ln 10}+C,\quad \frac{10^{5x+1}}{5\ln 10}+C,\quad \frac{-10^{-x}}{\ln 10}+C,\quad \frac{2\cdot 10^{x/2}}{\ln 10}+C$

j) $\sin x+C,\quad \frac{1}{2}\sin 2x+C,\quad 2\sin\frac{x}{2}+C,\quad -6\sin\frac{\pi-x}{6}+C$

k) $-\cos x+C,\quad -\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C,\quad -2\cos\frac{x}{2}+C,$

$-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

l) $\operatorname{sh}x+C,\quad \frac{1}{a}\operatorname{sh}(ax+b)+C,\quad a\operatorname{sh}\frac{x}{a}+C,\quad -\operatorname{sh}(1-x)+C$

m) $\operatorname{ch}x+C,\quad 2\operatorname{ch}\frac{x-c}{2}+C,\quad \operatorname{ch}(1+x)+C,$

$\frac{1}{4}\operatorname{ch}2x+C_1=\frac{1}{2}\operatorname{sh}^2x+C_2=\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2x+C_3$

14.3. **a)** $\frac{3}{5}x^{5/3}+C,\quad \frac{3}{5}(x-c)^{5/3}+C,\quad \frac{2}{5}x^{5/2}+C,\quad -\frac{2}{5}(1-x)^{5/2}+C$

b) $\frac{3}{2}x^{2/3},\quad \frac{3}{2}(x+1)^{2/3},\quad -\frac{3}{4}(1-2x)^{2/3},\quad \frac{3}{2a}(ax+b)^{2/3}$

c) $a\ln|x|+C,\quad a\ln|x+k|+C,\quad -a/x+C,\quad -a/(x+k)+C$

d) $\ln|\sin x|+C,\quad \ln|\sin(x+k)|+C,\quad 2\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|+C,$

$-2\ln\left|\sin\frac{k-x}{2}\right|+C$

e) $-\ln|\cos x|+C,\quad -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C,\quad -2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C,$

$-3\ln\left|\cos\frac{x+k}{3}\right|+C$

f) $\operatorname{tg}x+C,\quad 2\operatorname{tg}(x/2)+C,\quad -\operatorname{ctg}x+C,\quad -2\operatorname{ctg}2x+C$

g) $\arcsin x+C,\quad \frac{1}{3}\arcsin 3x+C,\quad \arcsin\frac{x}{3}+C,$

$\frac{1}{5}\arcsin\frac{5x}{3}+C$

h) $\operatorname{arctg}x+C,\quad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x+C,\quad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C,$

$\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$

14.4. **a)** $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(bx/a)^2}}=\frac{1}{b}\arcsin(bx/a)+C$

b) $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$ **c)** $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{ax}{b}+C$

14.5. Zobacz *Zarys II*, s. 12.

14.6. **a)** $\frac{1}{3}x^3y^3+C,\quad \frac{1}{4}x^2y^4+C,\quad x^2y^3z+C$

b) $\frac{1}{r}e^{rx}+C$ dla $r\neq 0$, $\frac{1}{x}e^{rx}+C$ dla $x\neq 0$, $se^{rx}+C$

c) $\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C$ dla $r\neq -1$, $\frac{x^r}{\ln x}+C$ dla $0<x\neq 1$,

tx^r+C

d) $\frac{1}{p}\sin(px+s)+C$ dla $p\neq 0$, $\frac{1}{x}\sin(px+s)+C$

dla $x\neq 0$, $\sin(px+s)+C$, $t\cos(px+s)+C$

e) $\ln|x+\sqrt{x^2+y^2}|+C$ dla $y\neq 0$,

$\ln|y+\sqrt{x^2+y^2}|+C$ dla $x\neq 0$

f) $\ln|x+\sqrt{x^2-y^2}|+C$ dla $y\neq 0$,

$\arcsin(y/x)+C$ dla $x>0$

14.7. **a)** $\frac{x^{p+1}}{p+1}+C,\quad \frac{x^{2p+1}}{2p+1}+a\frac{x^{p+1}}{p+1}+C,\quad \frac{(ax+b)^{p+1}}{a(p+1)}+C,$

$\frac{(ax+b)^{p+2}}{a(p+2)}+\frac{(c-b)(ax+b)^{p+1}}{a(p+1)}+C$

b) $\ln|x|+C,\quad x+\ln|x|+C,\quad x+\ln|x+1|+C,$

$\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\ln|2x+1|+C$

c) $\ln|x|-\frac{1}{x}+C,\quad \ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+C,\quad \ln|x+1|-\frac{2}{x+1}+C$

$2\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$

d) $\frac{2}{3}[x^{3/2}+(x+1)^{3/2}]+C,\quad \frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+C,$

$\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C,\quad \frac{2}{5}(x+1)^{5/2}-\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C$

e) $\operatorname{arctg}x+C,\quad x-\operatorname{arctg}x+C,\quad ax+(b-a)\operatorname{arctg}x+C,$
$\operatorname{arctg}(x+1)+C$

f) $-2\sqrt{-x}+C,\quad -2\sqrt{-x+1}+C,\quad \arcsin x+C,$
$\arcsin(1+x)+C$

g) $x+\frac{1}{2}\cos 2x+C,\quad -\frac{1}{4}\operatorname{ctg}x+C,\quad \operatorname{tg}x-x+C,$
$-\operatorname{ctg}x-x+C$

h) $-e^{-x}+C,\quad e^{x}-e^{-x}+C,\quad -e^{-x}+C,\quad \operatorname{sh}x+C$

i) $x+2e^{x}+\frac{1}{2}e^{2x}+C,\quad \frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C,$

$\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{x}{2}+C,\quad \frac{1}{4}\operatorname{sh}2x-\frac{x}{2}+C$

j) $\operatorname{th}x+C$; ponieważ $\operatorname{th}^2x=1-1/\operatorname{ch}^2x$, więc $\int \operatorname{th}^2x\,dx=$
$=x-\operatorname{th}x+C;\quad -\operatorname{cth}x+x+C;\quad \frac{1}{2}\operatorname{ch}2x+C=\operatorname{sh}^2x+$
$+C_1=\operatorname{ch}^2x+C_2$

14.8. **a)** $\int x\sin x\,dx=x(-\cos x)-\int -\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C,$

$\int(1-x)\sin x\,dx=(1-x)(-\cos x)-\int-(-\cos x)dx=$
$=(x-1)\cos x-\sin x+C,$

$$\int x\cos 3x\,dx=x\frac{\sin 3x}{3}-\int\frac{\sin 3x}{3}dx=x\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}+C$$

b) $(x-1)e^{x}+C,\quad \frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C,\quad -(x+1)e^{-x}+C$

c) $\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C,\quad \frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)+C,$
$2\sqrt{x}\,(\ln x-2)+C$

d) $\int\ln x\,dx=\int 1\cdot\ln x\,dx=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C,$

$$\int\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)-\int x\frac{2x}{1+x^2}dx=$$
$$=x\ln(1+x^2)-2\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=$$
$$=x\ln(1+x^2)-2x+2\operatorname{arctg}x+C,$$

$$\int\ln\sqrt{x}\,dx=x\ln\sqrt{x}-\int x\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=x\ln x-\frac{1}{2}x+C$$

e) $\frac{2}{15}(3x-2)(x+1)^{3/2}+C,\quad x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x+C,$
$x\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x+C$

14.9. **a)** $(x^2-2x+2)e^{x}+C$
b) $(-x^2+2)\cos x+2x\sin x+C$
c) $(x^2+2)\operatorname{sh}x-2x\operatorname{ch}x+C$

14.10. **a)** Całkujemy dwukrotnie przez części i otrzymujemy równość

$$\int e^{x}\cos x\,dx=e^{x}(\cos x+\sin x)-\int e^{x}\cos x\,dx+\mathrm{Const}$$

w której można przyjąć, że symbole całki po jednej i po drugiej stronie równości zawierają tę samą stałą, a całka

$$J=\int e^{x}\cos x\,dx$$

jest niewiadomą. Mamy równanie o niewiadomej J

$$J=e^{x}(\cos x+\sin x)-J+\mathrm{Const}$$

i otrzymujemy

$$J=\frac{1}{2}e^{x}(\cos x+\sin x)+C$$

b) $\frac{1}{2}e^{x}(\sin x-\cos x)+C$

c) $\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+C$

d) $\frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x-3\cos 3x)+C$

14.11. a) $\int g^2(x)g'(x)dx = \int g^2 dg = \frac{1}{3}g^3 + C = \frac{1}{3}g^3(x) + C$

b) $\frac{1}{2}g^2(x)+C$ c) $\ln|g(x)|+C$ d) $-1/g(x)+C$

e) $2\sqrt{g(x)}+C$ f) $\frac{2}{3}[g(x)]^{3/2}+C$ g) $e^{g(x)}+C$

h) $\sin g(x)+C$ i) $\arcsin g(x)+C$ j) $\mathrm{arctg}\, g(x)+C$

14.12. a) Przyjmując $y = a+x^2$, $dy = 2xdx$, mamy

$$\int(a+x^2)^2 2xdx = \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 + C = \frac{1}{3}(a+x^2)^3 + C.$$

Przyjmując $y = \sin x$, $dy = \cos x dx$, mamy

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

Przyjmując $y = \ln x$, $dy = \frac{1}{x}dx$, mamy

$$\int \frac{1}{x}\ln^2 x dx = \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

b) $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$, $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2 x + C$, $\frac{1}{2}\arcsin^2 x + C$

c) $\ln|a+x^2|+C$, $\frac{1}{4}\ln|3+4\sin x|+C$, $\ln|\ln x|+C$

d) $-1/(a+\sin x)+C$, $-1/(1+e^x)+C$, $-1/(a+x^2)+C$

e) $2\sqrt{a+\sin x}+C$, $\sqrt{x^2-1}+C$, $-\frac{1}{3}\sqrt{2-3x^2}+C$

f) $\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}+C$, $-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}+C$, $\frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2}+C$

g) $e^{(x^2)}+C$, $e^{\sqrt{x}}+C$, $e^{\sin x}+C$

h) $\sin(x^2)+C$, $\sin\ln x+C$, $-\cos\sqrt{x}+C$

i) $\frac{1}{2}\ln|x^2+k|+C$, $-\frac{1}{2}\ln|k-x^2|+C$, $\ln(1+e^x)+C$

j) $\sqrt{x^2+k}+C$, $-\sqrt{a^2-x^2}+C$, $\mathrm{arctg}\, x^2+C$

k) $\mathrm{arctg}\, e^x+C$, $\mathrm{arctg}\sin x+C$, $\mathrm{arctg}\sqrt{x}+C$

l) $2\arcsin\sqrt{x}+C$, $2\ln|\sqrt{x}+\sqrt{x-1}|+C$, $\ln\left|\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right|+C$

m) $\frac{1}{2}\sin^2 x+C$, $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x+C$, $\ln|\mathrm{tg}\, x|+C$

14.13. a) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+C_1$ b) $-\sqrt{1-x^2}+C_2$

c) Wsk. $x^3 = x - x(1-x^2)$. Odp. $-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+C$

14.14. a) Z własności funkcji hiperbolicznych (s. 32) wynika, że

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$
$$\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}\, 2x$$

Całkujemy te równości i korzystając z równoważności(*) na s. 20, otrzymujemy

$$G = \int \mathrm{ch}^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\mathrm{sh}\, 2x\right) + C$$
$$H = \int \mathrm{sh}^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\mathrm{sh}\, 2x\right) + C'$$

b) Przekształcamy funkcję $\sqrt{1-x^2}$, a następnie całkujemy ją

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\sqrt{1-x^2}\, dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

i otrzymujemy równość

$$L = \arcsin x - M + C_1$$

Przekształcamy całkę M i całkujemy przez części

$$M = \int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$
$$= x(-\sqrt{1-x^2}) - \int -\sqrt{1-x^2}\, dx = -x\sqrt{1-x^2} + L + C_2$$

i otrzymujemy równość

$$M=-x\sqrt{1-x^2}+L+C_2$$

Mamy dwie równości

$$L+M=\arcsin x+C_1$$
$$L-M=x\sqrt{1-x^2}-C_2$$

Stąd otrzymujemy

$$L=\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})+C$$
$$M=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2})+C'$$

c) $$P=\int\frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}}dx=Q+\int\frac{k\,dx}{\sqrt{x^2+k}}=\left|\begin{array}{c}\text{zad.}\\ \text{14.30a}\end{array}\right|=$$
$$=Q+k\ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C_1$$
$$Q=\int x\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}dx=x\sqrt{x^2+k}-\int\sqrt{x^2+k}\,dx=$$
$$=x\sqrt{x^2+k}+C_2-P$$

Mamy dwie równości

$$P-Q=k\ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C_1$$
$$P+Q=x\sqrt{x^2+k}+C_2$$

Stąd otrzymujemy

$$P=\int\sqrt{x^2+k}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+k}+k\ln|x+\sqrt{x^2+k}|)+C$$
$$Q=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+k}-k\ln|x+\sqrt{x^2+k}|)+C'$$

14.15. a) $$\int\operatorname{arctg}x\,dx=x\operatorname{arctg}x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=\left|\text{zad. 14.12c}\right|=$$
$$=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

b) $$\int x\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=$$
$$=\left|x^2=-1+(1+x^2)\right|=\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+C$$

c) $$\int x^2\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=$$
$$=\left|\begin{array}{l}x^3=x+x^3-x=\\ =x(1+x^2)-x\end{array}\right|=\frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$$

d) $$\int\arcsin x\,dx=x\arcsin x-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\text{zad. 14.12j}\right|=$$
$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$$

e) $$\int x\arcsin x\,dx=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$
$$=\left|\text{zad. 14.14b}\right|=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}\right)\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$$

f) $$\int x^2\arcsin x\,dx=\frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$
$$=\left|\begin{array}{l}x^3=x-x+x^3=\\ =x-x(1-x^2)\end{array}\right|=\frac{1}{3}x^3\arcsin x+\frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+C$$

14.16. $$\int uv''\,dx=uv'-\int u'v'\,dx=uv'-(u'v-\int u''v\,dx)=$$
$$=uv'-u'v+\int u''v\,dx,$$
$$\int uv'''\,dx=uv''-\int u'v''\,dx=uv''-(u'v'-\int u''v'\,dx)=$$
$$=uv''-u'v'+u''v-\int u'''v\,dx$$

14.17. a) $(x^2-2x+2)e^x+C$
b) $2x\sin x-(x^2-2)\cos x+C$
c) $2x\cos x+(x^2-2)\sin x+C$

14.18. a) $$\left[\frac{P(x)}{r}-\frac{P'(x)}{r^2}+\frac{P''(x)}{r^3}\right]e^{rx}+C$$

b) $\frac{P'(x)}{r^2}\sin rx-\left[\frac{P(x)}{r}-\frac{P''(x)}{r^3}\right]\cos rx+C$

c) $\frac{P'(x)}{r^2}\cos rx+\left[\frac{P(x)}{r}-\frac{P''(x)}{r^3}\right]\sin rx+C$

14.19. a) Mamy $\sqrt{1+x}=t$, więc $x=t^2-1$, $dx=2t\,dt$;

$$\int\frac{3x\,dx}{2\sqrt{1+x}}=\int\frac{3(t^2-1)2t\,dt}{2t}=\int(3t^2-3)\,dt=t^3-3t+C=$$
$$=t(t^2-3)+C=\sqrt{1+x}\,(x-2)+C$$

b) $-\frac{2}{15}\sqrt{1-x}\,(3x^2+4x+8)+C$

c) Mamy $\ln x=t$, więc $x=e^t$, $dx=e^t dt$; $\int\sin\ln x\,dx=$

$=\int e^t\sin t\,dt=\left\|\begin{array}{c}\text{zad.}\\ \text{14.10b}\end{array}\right\|=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C=$

$=\frac{1}{2}x(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$

d) Mamy $\sqrt{x}=t$, więc $x=t^2$, $dx=2t\,dt$; $\int\ln\sqrt{x}\,dx=$

$=\int 2t\ln t\,dt=\left\|\begin{array}{c}\text{zad.}\\ \text{14.8c}\end{array}\right\|=t^2\left(\ln t-\frac{1}{2}\right)+C=$

$=x\left(\ln\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)+C$

e) $\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2te^t dt=\left\|\begin{array}{c}\text{zad.}\\ \text{14.8b}\end{array}\right\|=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$

f) $\frac{2}{15}\sqrt{x+1}\,(3x^2+x-2)+C$

g) $\frac{1}{5}\sqrt{2x+3}\,(4x^2+2x-6)+C$

h) Mamy $\sqrt{1+1/x}=t$, więc $1+1/x=t^2$, $x=1/(t^2-1)$,

$dx=\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}$; $\int\frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx=\int-2t^2dt=-\frac{2}{3}t^3+C=$

$=-\frac{2}{3}(1+1/x)^{3/2}+C$

i) Mamy $1+\ln x=t$, więc $x=e^{t-1}$, $dx=e^{t-1}dt$;

$$\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|1+\ln x|+C$$

j) $(x+1)\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

14.20. a) Wskazówka $1+\sin x=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

Odpowiedź: $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C$.

b) Wsk. $\sqrt{1+e^x}=t$. Odp. $x-2\ln(\sqrt{1+e^x}+1)+C$.

c) Wsk. $\sqrt{x}=t$ (zad. 14.15c). Odp. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\ln(1+x)+C$.

d) Wsk. $\sin x=y$. Odp. $\frac{1}{4}\sin^4x+C$.

e) Wsk. $\sin^2x\cos^3x=\sin^2x(1-\sin^2x)\cos x$, $\sin x=y$.
Odp. $\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{1}{5}\sin^5x+C$.

f) Wsk. $\sqrt{x}=y$ (zad. 14.15a). Odp. $2\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\ln(1+x)+C$.

g) Wsk. Całkować przez części (zad. 14.10b, 14.10a).
Odp. $\frac{1}{2}e^x[x(\sin x-\cos x)+\cos x]+C$.

h) Wsk. Całkować dwukrotnie przez części.
Odp. $x\arcsin^2x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$.

i) Wsk. $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$ (zad. 14.14b).
Odp. $\frac{1}{2}[\arcsin(x-1)+(x-1)\sqrt{2x-x^2}]+C$.

j) Wsk. $\frac{1}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$, $e^x=y$. Odp. $\mathrm{arctg}\,e^x+C$.

k) $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$

14.21. a) $2x(x+2)$, $2x(2x-1)$, $2(x^2+2)$, $2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
b) $(x-2)(x+3)$, $(x+4)^2$, $(3x-1)(x+1)$, $(2x+1)^2$
c) $x^2(x-5)$, $x^2(5x+1)$, $(x-1)(x^2+x+1)$, $(x+1)(x^2-x+1)$
d) $(x-1)(x+2)(x+3)$, $(x-5)(x+1)^2$
e) $(x-2)(x^2+1)$, $x(x^2+x+1)$

14.22. a) $x(4x+1)$, $4x(x-2)$, $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$, $x(x-3)$
b) $(x-1)(x-9)$, $(x+1)(x+9)$, $(4x-1)(4x+1)$, $(4x+1)^2$
c) $x(x-3)(x+3)$, $x(x-1)(x^2+x+1)$, $(x-2)(x^2+2x+4)$, $(2x+1)(4x^2-2x+1)$
d) $(x-1)(x+1)^2$, $(x-1)(x^2+x+2)$
e) $(x-1)(x^2+1)$, $(x+1)(x^2+1)$

14.23. a) Podstawiamy $x^2=u$ i otrzymujemy $x^4-3x^2+2=$ $=u^2-3u+2=(u-1)(u-2)=(x^2-1)(x^2-2)=$ $=(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. Podobnie otrzymujemy pozostałe rozkłady:
$(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$, $(x^2+1)(x^2+9)$, $(x-1)(x+1)(x^2+2)$
b) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1)$, $(x^2+1)(x^2+2)$, $(x^2+1)^2$, $(x-1)^2(x+1)^2$
c) $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=[(x^2+1)-x][(x^2+1)+x]=$ $=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$. Pozostałe rozkłady:
$(x^2-x\sqrt{3}+1)(x^2+x\sqrt{3}+1)$,
$(x^2-x\sqrt{3}+2)(x^2+x\sqrt{3}+2)$,
$(x^2-x\sqrt{5}+2)(x^2+x\sqrt{5}+2)$
d) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$, $(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$, $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, $(x^2+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)(x^2+x\sqrt{3}+1)$
e) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$,
$(x^2-x\sqrt{2+\sqrt{2}}+1)(x^2+x\sqrt{2+\sqrt{2}}+1)\times$
$\times(x^2-x\sqrt{2-\sqrt{2}}+1)(x^2+x\sqrt{2-\sqrt{2}}+1)$

14.24. a) $1-\dfrac{3}{x+1}$ b) $3x+\dfrac{2}{x-3}$ c) $x-2+\dfrac{2x+1}{x^2+2x+5}$

d) $x^4+3-\dfrac{1}{x^2+2}$ e) $x^7-x^4+x-\dfrac{x}{x^3+1}$

14.25. a) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$ b) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+3}$
c) $\dfrac{-1/5}{x-1}+\dfrac{1/5}{x+4}$ d) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x-1}$
e) $\dfrac{3/25}{x-1}+\dfrac{1/5}{(x-1)^2}-\dfrac{6/25}{2x+3}$ f) $\dfrac{x+1}{x^2+2x+5}-\dfrac{1}{x^2}$
g) $\dfrac{x}{x^2+3}-\dfrac{1}{x+1}$ h) $\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{2x^2+1}$
i) $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{x}{(x^2+1)^2}-\dfrac{2}{x^2+2}$ j) $\dfrac{1/2}{x-1}+\dfrac{-1/2}{x+1}$
k) $\dfrac{-1/4}{x-1}+\dfrac{1/4}{x+1}+\dfrac{1/4}{(x-1)^2}+\dfrac{1/4}{(x+1)^2}$

14.26. a) $\ln|x+a|+C$ b) $\dfrac{-1}{x+a}+C$
c) $\dfrac{-1}{2(x+a)^2}+C$ d) $\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C$
e) $\dfrac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\dfrac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C$
f) $\dfrac{3x^3+5a^2x}{8a^4(x^2+a^2)^2}+\dfrac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C$
g) $\dfrac{1}{4}\ln(2x^2+2x+1)-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+1)+C$
h) $\ln(x^2+2x+10)-3\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{3}+C$
i) $\dfrac{1}{54}\left(\dfrac{3x+3}{x^2+2x+10}+\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{3}\right)+C$

14.27. a) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$

b) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1/4}{x-1}-\frac{1/4}{x+1}+C$

c) $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1/4}{x-1}-\frac{1/4}{x+1}+C$

d) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$

e) $\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|2x+5|+C$

f) $\ln|x-3|+\ln|x+4|+C$

g) $\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+10)+2\operatorname{arctg}(x-3)+C$

h) $\frac{-2x^2+6x-5/3}{(x-1)^3}+\ln|x-1|+C$

i) $\frac{1}{2}(x^2-1)+3\ln|x|+2\ln|x-3|+C$

j) $\frac{1}{4}\ln\left|1+\frac{2}{x}\right|-\frac{x+5/2}{(x+2)^2}-\frac{1}{2x}+C$

k) $\frac{-1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{7}{25}\operatorname{arctg}(x+1)+C$

l) $\frac{x-3}{4(x^2-2x+3)}+\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$

m) $\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{4}\ln(x^2+3)+C$

n) $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3+C$

o) $-\frac{1}{2}\left[\frac{x+3}{x^2+4x+5}+\operatorname{arctg}(x+2)\right]+C$

p) $\frac{2x^6-3x^2}{4(x^4-1)}+\frac{3}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+C$

q) $\frac{x+1}{16(x^2+2x+5)^2}+\frac{3}{128}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+5}+\frac{3}{256}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$

r) $\frac{-57x^4+228x^3-445x^2+434x-192}{8(x-1)(x^2-2x+2)^2}-\frac{57}{8}\operatorname{arctg}(x-1)+C$

14.28. a) Przyjmujemy $y=\sqrt{\frac{2x+3}{x-1}}$, stąd $x=\frac{y^2+3}{y^2-2}$, $dx=\frac{-10y\,dy}{(y^2-2)^2}$,

$$\int\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{2x+3}{x-1}}\,dx=\int\frac{(y^2-2)^2}{25}\,y\,\frac{-10y\,dy}{(y^2-2)^2}=$$

$$=-\frac{2}{5}\int y^2\,dy=\frac{-2}{15}y^3+C=\frac{-2}{15}\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^{3/2}+C$$

b) $\frac{3}{28}\left(\frac{3x+4}{1-x}\right)^{4/3}+C$

c) $-\frac{2}{5}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{5/4}+C$

d) $\frac{6x+8}{27}\sqrt{3x-2}+C$

e) $\frac{1}{5}(x+1)\sqrt[3]{(3x-2)^2}+C$

f) $\frac{1}{12}(2x+3)(2\sqrt{2x+3}-3)+C$

g) $2\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-3}{2}}+C$

h) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}+\ln|\sqrt[3]{3x+1}-1|+C$

i) $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$

j) $2\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}+\ln|x+1-\sqrt{(x+3)(x-1)}|+C$

k) $2\sqrt{\dfrac{x+3}{1-x}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x+3}{1-x}}+C$

l) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}-\sqrt{1-x^2}+C.$

Inny sposób: $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx=$

$$=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C_1$$

m) $\dfrac{-3}{10}(2x+3)\sqrt[3]{(1-x)^2}+2$

n) $\dfrac{5}{4}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{4/5}-\dfrac{5}{9}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{9/5}+C$

o) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{2-x}{x}}-2\sqrt{\dfrac{2-x}{x}}+C$

14.29. Aby zrealizować podstawienie Eulera, należy:
1° napisać równanie określające to podstawienie,
2° wyznaczyć z tego równania t jako funkcję zmiennej x oraz x jako funkcję zmiennej t,
3° obliczyć dx,
4° obliczyć y jako funkcję zmiennej t,
5° przekształcić całkę.
Aby zastosować trzecie podstawienie Eulera, należy uprzednio wyznaczyć pierwiastki trójmianu i przedział całkowania.

a) $y=\sqrt{9x^2-10x+1}=3x-t,\quad t=3x-\sqrt{9x^2-10x+1}$

$$9x^2-10x+1=9x^2-6xt+t^2$$
$$-10x+1=-6xt+t^2$$
$$x(6t-10)=t^2-1$$
$$x=\frac{t^2-1}{6t-10},\quad dx=2\,\frac{3t^2-10t+3}{(6t-10)^2}\,dt,$$
$$y=3x-t=-\frac{3t^2-10t+3}{6t-10},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-10x+1}}=\int\frac{dx}{y}=\int\frac{-dt}{3t-5}=-\frac{1}{3}\ln|3t-5|+$$
$$+C=-\frac{1}{3}\ln\left|9x-5-3\sqrt{9x^2-10x+1}\right|+C$$

b) $y=\sqrt{9x^2-10x+1}=xt+1,\quad t=\dfrac{\sqrt{9x^2-10x+1}-1}{x}$

$$9x^2-10x+1=x^2t^2+2xt+1$$
$$9x^2-10x=x^2t^2+2xt$$
$$9x-10=xt^2+2t$$
$$x(t^2-9)=-2t-10$$
$$x=\frac{-2t-10}{t^2-9},\quad dx=2\,\frac{t^2+10t+9}{(t^2-9)^2}\,dt,$$
$$y=xt+1=\frac{t^2+10t+9}{(t^2-9)^2},$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-10x+1}}=\int\frac{-2dt}{t^2-9}=\left\|\begin{array}{c}\text{zad.}\\ \text{14.5b}\end{array}\right\|=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t+3}{t-3}\right|+$$
$$+C=\frac{1}{3}\ln\left|9x-5+3\sqrt{9x^2-10x+1}\right|+C$$

c) $9x^2-10x+1=0$; $x_1=1$, $x_2=1/9$; istnieją dwa przedziały całkowania: $(-\infty;1/9)$ i $(1;\infty)$; obieramy przedział $(1;\infty)$.

$$y=\sqrt{9x^2-10x+1}=\sqrt{9(x-1/9)(x-1)}=(x-1)t\ \ (t>0)$$
$$9(x-1/9)(x-1)=(x-1)^2t^2$$
$$9x-1=(x-1)t^2,\quad t=+\sqrt{\frac{9x-1}{x-1}}$$
$$x(t^2-9)=t^2-1$$
$$x=\frac{t^2-1}{t^2-9},\quad dx=\frac{-16t\,dt}{(t^2-9)^2},\quad y=(x-1)t=\frac{8t}{t^2-9},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-10x+1}} = \int \frac{-2dt}{t^2-9} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t+3}{t-3}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|9x-5+3\sqrt{9x^2-10x+1}\,| + C$$

14.30. Przyjmujemy $y = \sqrt{x^2+k} = x-t$. Stąd $t = x-\sqrt{x^2+k}$,

$$x = \frac{t^2-k}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+k}{2t^2}dt, \quad y = x-t = \frac{t^2+k}{-2t}$$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \int \frac{dt}{-t} = -\ln|t| + C = -\ln|x-\sqrt{x^2+k}\,| + C =$

$\displaystyle= \ln\frac{1}{|x-\sqrt{x^2+k}\,|} + C = \ln\frac{|x+\sqrt{x^2+k}\,|}{|x-\sqrt{x^2+k}\,||x+\sqrt{x^2+k}\,|} +$

$+C = \ln|x+\sqrt{x^2+k}\,| + C_1$, gdzie $C_1 = C - \ln|k|$

b) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \int \frac{(t^2+k)^2}{-4t^3}dt = \frac{1}{8}\left(\frac{k^2}{t^2}-t^2\right) - \frac{k}{2}\ln|t| + C =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} - k\ln|x-\sqrt{x^2+k}\,|\right) + C$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+k}} = \int \frac{(t^2-k)^2}{-4t^3}dt = \frac{1}{8}\left(\frac{k^2}{t^2}-t^2\right) + \frac{k}{2}\ln|t| + C =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k\ln|x-\sqrt{x^2+k}\,|\right) + C$

U w a g a. Funkcje otrzymane w b) i c) różnią się od funkcji występujących w rozwiązaniu zad. 14.14c o pewne stałe.

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C =$

$\displaystyle= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right| + C$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2\operatorname{arctg} t + C =$

$= 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1}-x) + C$

14.31. Przyjmujemy $y = \sqrt{1-x^2} = xt+1$. Stąd $t = (\sqrt{1-x^2}-1)/x$,

$$x = \frac{-2t}{t^2+1}, \quad dx = 2\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}dt, \quad y = xt+1 = -\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-2dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg}(-t) + C =$

$\displaystyle= 2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

Udowodnimy, że dla $|x| < 1$ zachodzi równość

$$\arcsin x = 2\operatorname{arctg}[(1-\sqrt{1-x^2})/x] \qquad (*)$$

Niech $0 < |x| < 1$ i niech $F = \arcsin x$. Wówczas $x = \sin F =$
$\displaystyle= \frac{2\sin F/2\cos F/2}{\cos^2 F/2+\sin^2 F/2} = \frac{2\operatorname{tg} F/2}{1+\operatorname{tg}^2 F/2}$, $x\operatorname{tg}^2 F/2 - 2\operatorname{tg} F/2 + x = 0$,
$\operatorname{tg} F/2 = (1-\sqrt{1-x^2}\,)/x$, $\quad F/2 = \operatorname{arctg}[(1-\sqrt{1-x^2})/x]$,
a stąd wynika równość (*) dla $0 < |x| < 1$.
Niech $x \to 0$. Wówczas $\varphi(x) = (1-\sqrt{1-x^2})/x \to 0$. Zgodnie z zasadą usuwania osobliwości pozornych (*Zarys II*, § 153) możemy przyjąć $\varphi(0) = 0$, a wówczas równość (*) jest prawdziwa także dla $x = 0$.

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right| + C$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{t^2+1}{-2t^2}dt = -\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) + C =$

$\displaystyle= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

14.32. a) $-x^2+3x-2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $1 < x < 2$,

$y = \sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{-(x-1)(x-2)} = (x-1)t$, $t > 0$,

$\displaystyle x = \frac{t^2+2}{t^2+1}, \quad dx = \frac{-2t\,dt}{(t^2+1)^2}, \quad y = \frac{t}{t^2+1}, \quad t = \sqrt{\frac{2-x}{x-1}},$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}=\int\frac{-2dt}{t^2+1}=-2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}+C$$

Inny sposób:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{zad.}\\ 14.4\text{a}\end{array}\right|=\arcsin(2x-3)+C_1$$

b) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{-x^2+3x-2}}=\int\frac{-2dt}{t^2+2}=\left|\begin{array}{c}\text{zad.}\\ 14.5\end{array}\right|=$$

$$=-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{2x-2}}+C$$

c) $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}=\int\frac{t^2+2}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{(t^2+1)+1}{(t^2+1)^2}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{wzór}\\ (19)\end{array}\right|=\frac{3}{2}\operatorname{arctg}t+\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}+\frac{1}{2}\sqrt{(2-x)(x-1)}+C$$

d) $1-x^2=0,\quad x_1=-1,\quad x_2=1,\quad -1<x<1,$

$$y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{(1-x)(1+x)}=(1+x)t,\quad t>0,$$

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{-4t\,dt}{(1+t^2)^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2},\quad t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{-2dt}{1+t^2}=$$

$$=-2\operatorname{arctg}t+C=-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$$

Uwaga. Otrzymana tu funkcja pierwotna różni się od funkcji $\arcsin x$ o pewną stałą.

e) $-x^2+x=0,\quad x_1=0,\quad x_2=1,\quad 0<x<1,$

$$y=\sqrt{-x^2+x}=\sqrt{x(1-x)}=xt,\quad t>0,$$

$$x=\frac{1}{t^2+1},\quad dx=\frac{-2t\,dt}{(t^2+1)^2},\quad y=\frac{t}{t^2+1},\quad t=\sqrt{\frac{1-x}{x}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+x}}=\int\frac{-2dt}{t^2+1}=-2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C$$

Inny sposób:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}=$$

$$=\int\frac{2dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=\arcsin(2x-1)+C_1$$

f) $-x^2-x=0,\quad x_1=0,\quad x_2=-1,\quad -1<x<0,$

$$\sqrt{x^2}=-x,$$

$$y=\sqrt{-x^2-x}=\sqrt{-x(x+1)}=xt,\quad t<0,$$

$$x=\frac{-1}{t^2+1},\quad dx=\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2},\quad y=xt=\frac{t}{t^2+1},$$

$$t=-\sqrt{\frac{x+1}{-x}},$$

$$\int\frac{dt}{\sqrt{-x^2-x}}=\int\frac{-2dt}{t^2+1}=2\operatorname{arctg}(-t)+C=$$

$$=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{-x}}+C$$

14.33. a) $-2\ln|8x+5-4\sqrt{4x^2+5x+1}\,|+C$

b) $-\ln\left|x+\frac{5}{2}-\sqrt{x^2+5x+4}\,\right|+C$

c) $2\operatorname{arctg}[(2-\sqrt{-x^2-x+4}\,)/x]+C$. Inny sposób:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-x+4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{4}}}=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\text{zad.}\\ \text{14.4a}\end{matrix}\right\|=\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{17}}+C_1$$

d) $-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}+C=\frac{1}{2}\arcsin(x-2)+C_1$

e) $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3x-2}{2-x}}+C$. Inny sposób: $\int\frac{dx}{x\sqrt{-3x^2+8x-4}}=$

$$=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-(2x-2)^2}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{2x-2}{x}\right)^2}}=$$

$$=\left\|s=\frac{2x-2}{x}\right\|=\int\frac{\frac{1}{2}ds}{\sqrt{1-s^2}}=\frac{1}{2}\arcsin s+C_1=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-2}{x}+C_1$$

f) $2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{3/2}{2t+1}+C,\quad t=x+\sqrt{x^2+x+1}$

g) Rozdzielamy całkę na dwie całki i korzystając z zadań 14.11f i 14.14c, otrzymujemy $\frac{1}{6}(2x^2+3x+2)\sqrt{x^2+1}+$ $+\frac{1}{2}\ln|x^2+\sqrt{x^2+1}\,|+C$

h) Podstawienie $y=\sqrt{-3x^2+5x-2}=(1-x)t$ daje wynik

$\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3x-2}{2-2x}}+C$. Sposobem wskazanym w e) otrzymujemy $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{5x-4}{x}+C_1$

i) $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2-8x+9}-3}{-x}+C=\arcsin\frac{x+4}{5}+C_1$

14.34. Jeśli $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\quad (n-1)\pi<x<(n+1)\pi,$ to $\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}t+n\pi,$

$x=2\operatorname{arctg}t+2n\pi,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2};\quad \sin x=\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=$

$$=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right):\cos^2\frac{x}{2}}{\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right):\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Podobnie wyprowadzamy równość $\cos x=(1-t^2)/(1+t^2)$.

14.35. Jeśli $s=\operatorname{tg}x$, to $\frac{ds}{dx}=\frac{1}{\cos^2x},\quad ds=\frac{dx}{\cos^2x};$

$$\sin^2x=\frac{\sin^2x:\cos^2x}{(\cos^2x+\sin^2x):\cos^2x}=\frac{\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{s^2}{1+s^2}.$$

Podobnie wyprowadzamy równość $\cos^2x=1/(1+s^2)$.

14.36. a) $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$

b) $\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}(x/2)}{1-\operatorname{tg}(x/2)}\right|+C$ c) $\frac{1}{3}\ln|3\operatorname{tg}(x/2)+2|+C$

d) $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{3+4\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{7}}+C$

14.37. a) $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int \sin^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{s^2}{1+s^2}\,ds = s - \mathrm{arctg}\,s + C =$
$= \mathrm{tg}\,x - x + C_1$

b) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,x\right)+C$ c) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2\,\mathrm{tg}\,x)+C$

14.38. a) $\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int (1-u^2)\,du = u - \frac{1}{3}u^3 + C =$
$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

b) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$ c) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+C$

14.39. a) $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 \sin x\,dx = \int (1-v^2)(-dv) =$
$= -v + \frac{1}{3}v^3 + C = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

b) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|+C$ c) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+C$

14.40. a) $\frac{2}{\sqrt{65}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{13}}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C$ b) $\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\,x + x + C$

c) $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + C_1$

d) $-x - 2\ln\left|1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

e) Podstawienie $\mathrm{tg}(x/2) = t$ prowadzi do żmudnych rachunków. Podstawiamy $\mathrm{tg}\,x = s$.

$$\int \frac{dx}{(\sin x - 3\cos x)^2} = \int \frac{dx}{(\mathrm{tg}\,x-3)^2\cos^2 x} = \int \frac{ds}{(s-3)^2} =$$
$$= \frac{-1}{s-3}+C = \frac{1}{3-\mathrm{tg}\,x}+C$$

Inny sposób: zgodnie z (27), mamy
$\sin x - 3\cos x = \sqrt{10}\cos(x-q)$, $\mathrm{tg}\,q = -1/3$, zatem

$$\int \frac{dx}{(\sin x - 3\cos x)^2} = \int \frac{dx}{10\cos^2(x-q)} = \frac{1}{10}\mathrm{tg}(x-q)+C_1 =$$
$$= \frac{1}{10}\frac{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,q}{1+\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,q}+C_1 = \frac{1}{10}\frac{\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}\mathrm{tg}\,x}+C_1$$

f) $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sin x + 4 - \sqrt{6}}{\sin x + 4 + \sqrt{6}}\right|+C$ g) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C$

h) Korzystamy z równości (27) i z zad. 14.36a; otrzymujemy
$\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x+\pi/3}{2}\right|+C$

14.41. a) $-\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x - \frac{2}{3}\cos x + C$

b) $\frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C$

c) $-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x + C$

d) $\frac{1}{4}\cos^3 x\sin x + \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x + C$

e) $\frac{1}{5}\cos^4 x\sin x + \frac{4}{15}\cos^4 x\sin x + \frac{8}{15}\sin x + C$

f) $\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{1}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{1}{16}\sin x\cos x + \frac{1}{16}x + C$

14.42. a) $\int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t - \sin t\cos t) + C = \frac{1}{2}(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}) + C$

b) $\int \frac{\mathrm{ctg}^4 t}{\sin^2 t}\,dt = -\frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5 t + C = -\frac{1}{5}(\sqrt{1-x^2}/x)^5 + C$

c) Podstawiamy $x = 1/\cos t$ dla $x > 1$ w ćwiartce $0 < t < \pi/2$ oraz dla $x < -1$ w ćwiartce $\pi/2 < t < \pi$ i sprowadzamy daną całkę do postaci

$$Y=\int\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}\sin t\,dt$$

Z definicji pierwiastka, bezwzględnej wartości i symbolu sgn wynika dla dowolnej liczby rzeczywistej z równość

$$\sqrt{z^2}=|z|=z\operatorname{sgn}z$$

Stosując tę równość do całki Y, stwierdzamy, że $\operatorname{sgn}\sin t=+1$ w obu wymienionych ćwiartkach, natomiast $\operatorname{sgn}\cos t=\operatorname{sgn}x=\varepsilon$, gdzie $\varepsilon=+1$ w pierwszej ćwiartce i $\varepsilon=-1$ w drugiej ćwiartce. Zatem $Y=\int\varepsilon\cos t\,dt=\varepsilon\sin t+C=\varepsilon\sqrt{1-1/x^2}+C=\varepsilon\sqrt{x^2-1}/(\varepsilon x)+C=\sqrt{x^2-1}/x+C$ dla $x>1$ oraz dla $x<-1$.

14.43. **a)** $\displaystyle\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\frac{-1}{\sin t}+C=\frac{-\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}/\cos t}{\sin t/\cos t}+C=$

$$=\frac{-\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

b) $\displaystyle\int\frac{dt}{\cos t}=\left\|\begin{matrix}\text{zad.}\\ 14.38\text{b}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+C=$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x/\sqrt{1+x^2}}{1-x/\sqrt{1+x^2}}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)^2+C=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$$

c) $\displaystyle\int\frac{1}{4}\cos t\,dt=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}x/\sqrt{4+x^2}+C$

14.44. **a)** $\displaystyle\arcsin\frac{x}{r}+C$ **b)** $\displaystyle 2\arcsin\sqrt{\frac{x+r}{2r}}+C_1$

14.45. **a)** Przekształcamy wyrażenie podpierwiastkowe

$$(x-a)(b-x)=-[x^2-(a+b)x+ab]=-\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]$$ i podstawiamy $s=x-(a+b)/2, r=(b-a)/2$,

$dx=ds$; otrzymujemy $\displaystyle\int\frac{ds}{\sqrt{r^2-s^2}}=\arcsin\frac{s}{r}+C=$

$$=\arcsin\frac{2x-a-b}{b-a}+C$$

b) $\displaystyle 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C_1$

14.46. Jeśli $x=\operatorname{sh}t$, to $t=\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $\operatorname{ch}t=\sqrt{1+x^2}$,

$dx=\operatorname{ch}t\,dt$. Ze związków tych otrzymujemy:

a) $\int dt=t+C=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$

b) $\displaystyle\int\operatorname{ch}^2 t\,dt=\left\|\begin{matrix}\text{zad.}\\ 14.7\text{i}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t+\frac{1}{2}t+C=$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$$

c) $\displaystyle\int\operatorname{sh}^2 t\,dt=\left\|\begin{matrix}\text{jak zad.}\\ 14.46\text{b}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$

14.47. Jeśli $x>1$, $x=\operatorname{ch}t$, $t>0$, to $t=\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})=$ $=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$. Jeśli $x<-1$, $x=-\operatorname{ch}t$, $t>0$, to $-t=$

$$=-\operatorname{arch}(-x)=-\ln(-x+\sqrt{x^2-1})=\ln\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\ln\frac{-x-\sqrt{x^2-1}}{(-x+\sqrt{x^2-1})(-x-\sqrt{x^2-1})}=\ln(-x-\sqrt{x^2-1})=$$

$$=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|.$$

Ze związków tych otrzymujemy:

a) dla $x>1$ $\int dt=t+C_1=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C_1$,

dla $x<-1$ $-\int dt=-t+C_2=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C_2$

b) dla $x>1$ $\int \mathrm{ch}^2 t\,dt = \left| \begin{array}{c} \text{zad.} \\ 14.7\text{i} \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C_1,$$

dla $x<-1$ $-\int \mathrm{ch}^2 t\,dt = -\frac{1}{2}(-x)\sqrt{x^2-1}+$

$$+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C_2$$

c) dla $x>1$ $\displaystyle\int \frac{dt}{\mathrm{ch}^2 t} = \mathrm{th}\,t + C_1 = \frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}\,t}+C_1 = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C_1,$

dla $x<-1$ $\displaystyle -\int \frac{dt}{\mathrm{ch}^2 t} = -\mathrm{th}\,t + C_2 = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{-x}+C_2$

14.48. a) Rozumujemy tak jak w zad. 14.47a i uwzględniając, że $\ln r$ jest stałą, otrzymujemy dla $x>r$ oraz dla $x<-r$ wynik $\ln|x+\sqrt{x^2-r^2}|+C$.

b) Otrzymujemy $2\,\mathrm{arsh}\sqrt{(x-r)/(2r)}+C_1$ dla $x>r$ oraz $-2\,\mathrm{arsh}\sqrt{(x+r)/(-2r)}+C_2$ dla $x<-r$. Każdy z tych wyników daje się sprowadzić do postaci podanej w a).

14.49. a) Rozumujemy tak jak w zad. 14.45a i otrzymujemy dla $x>b$ oraz dla $x<a$ wynik $\ln|x-(a+b)/2+\sqrt{(x-a)(x-b)}|+C$.

b) Otrzymujemy $2\,\mathrm{arsh}\sqrt{(x-b)/(b-a)}+C_1$ dla $x>b$ oraz $-2\,\mathrm{arsh}\sqrt{(x-a)/(a-b)}+C_2$ dla $x<a$. Każdy z tych wyników daje się sprowadzić do postaci podanej w a).

14.50. a) $\dfrac{1}{6(1-2x^3)}+C$

b) $\dfrac{2}{9}[(x+3)^{3/2}-x^{3/2}]+C$

c) $\dfrac{6}{5}t^5-4t^3+18t+3t/(1+t^2)-21\,\mathrm{arctg}\,t+C,\ t=\sqrt[6]{x}$

d) $\dfrac{-1}{e^x+1}+C$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}+C$

f) $\dfrac{(x^2-1)\,\mathrm{arctg}\,x+x}{4(1+x^2)}+C$

g) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}(\sqrt{3}\,e^{2x})+C$

h) $-\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{x}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{x^2-x+1}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

i) $-(\ln\sin x+1)\,\mathrm{ctg}\,x-x+C$

j) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{\mathrm{th}\,x}}{1-\sqrt{\mathrm{th}\,x}}-\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{th}\,x}+C$

k) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(1+t)^2}{1-t+t^2}-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}+C,\quad t=\sqrt[3]{-x/(1+x)}$

l) $\arcsin(\ln x)+C$

m) $-\dfrac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{6}\sqrt{(x^2+1)^3}\,\ln(x^2-1)-$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}+C$$

n) $\dfrac{1-6x}{12(2x+1)^3}+C$ o) $\dfrac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,x-\sqrt{5}}{2\,\mathrm{tg}\,x+\sqrt{5}}\right|+C$

p) $x-e^{-x}\arcsin e^x-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+C$

q) $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-1|-\ln|x|+C$ r) $-\ln|1-\sin x|+C$

s) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x+C$

t) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C=\begin{cases}\operatorname{arth}x+C & \text{dla} \quad |x|<1\\ \operatorname{arcth}x+C & \text{dla} \quad |x|>1\end{cases}$

u) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-x+C$

14.51. a) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}+C$

b) $3\ln|\sqrt[3]{x}|-\ln\left(1+\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}\right)-\arcsin\sqrt[3]{x}+C$

c) $2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+C, \quad t=\sqrt[6]{x}$

d) $-\frac{1}{2}(e^x+1)^{-2}+C$

e) $\sqrt{\sin^3 x}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{7}\sin^2 x\right)+C$

f) $-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)+C$

g) $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}+C$

h) $-\frac{1}{2}\ln|1-\ln^2 x|+C$

i) $\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$

j) $2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$

k) $\sqrt{2x+x^2}-2\ln|x+1+\sqrt{2x+x^2}|+C$

l) $\frac{1}{2}e^x(x\sin x-x\cos x+\cos x)+C$

m) $2\sqrt{1+\ln x}+C$

n) $\sqrt{x^4+1}+\ln|x^2+\sqrt{x^4+1}|+C$

o) $\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x}}{2}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})+C$

p) $x\arccos\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}+\sqrt{x+1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$

14.52. a) $-\frac{3}{14}(6+x-2x^2)(2-x)^{1/3}+C$

b) $2\sqrt{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C$

c) $2\sqrt{\frac{x}{1-x}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$

d) $\frac{3}{40}(5x^2-12x+36)\sqrt[3]{(x+2)^2}+C$

e) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$

f) $-\frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{3/2}+C$

14.53. a) $F(x)=\begin{cases}x & \text{dla} \quad x\leqslant -1\\ x^3/3-2/3 & \text{dla} \quad |x|\leqslant 1\\ x-4/3 & \text{dla} \quad x\geqslant 1\end{cases}$

b) $F(x)=\begin{cases}-x & \text{dla} \quad x\leqslant -1\\ x^2/2+1/2 & \text{dla} \quad |x|\leqslant 1\\ x & \text{dla} \quad x\geqslant 1\end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases}x^3/3-x & \text{dla} \quad x\leqslant -1\\ 2/3 & \text{dla} \quad |x|\leqslant 1\\ x^3/3-x+4/3 & \text{dla} \quad x\geqslant 1\end{cases}$

d) $F(x)=\begin{cases}-x^2-2x & \text{dla} \quad x\leqslant -1\\ 1 & \text{dla} \quad |x|\leqslant 1\\ x^2-2x+2 & \text{dla} \quad x\geqslant 1\end{cases}$

e) $F(x)=\begin{cases}x^2 & \text{dla} \quad x\leqslant 0\\ 0 & \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2-2x+1 & \text{dla} \quad x\geqslant 1\end{cases}$

f) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x\leqslant -1\\ x^2/2+x+1/2 & \text{dla} \quad -1\leqslant x\leqslant 0\\ -x^2/2+x+1/2 & \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & \text{dla} \quad x\geqslant 1\end{cases}$

14.54. a) $F(x)=\begin{cases}-x^2/2 & \text{dla } x\leqslant 0\\ x^2/2 & \text{dla } x\geqslant 0\end{cases}=\frac{1}{2}x|x|$

b) $F(x)=\begin{cases}e^x & \text{dla } x\leqslant 0\\ -e^{-x}+2 & \text{dla } x\geqslant 0\end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases}-x^2/2+x & \text{dla } x\leqslant 1\\ x^2/2-x+1 & \text{dla } x\geqslant 1\end{cases}$

d) $F(x)=\begin{cases}x^3/3-x & \text{dla } x\leqslant -1\\ -x^3/3+x+4/3 & \text{dla } |x|\leqslant 1\\ x^3/3-x+8/3 & \text{dla } x\geqslant 1\end{cases}$

e) $F(x)=\begin{cases}-x^2/2-x & \text{dla } x\leqslant -1\\ x^2/2+x+1 & \text{dla } -1\leqslant x\leqslant 0\\ -x^2/2+x+1 & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2/2-x+2 & \text{dla } x\geqslant 1\end{cases}$

f) $F(x)=\begin{cases}-x^3 & \text{dla } x\leqslant 0\\ x^3 & \text{dla } x\geqslant 0\end{cases}=|x^3|$

g) $F(x)=\begin{cases}\cos x & \text{dla } x\leqslant 0\\ -\cos x+2 & \text{dla } x\geqslant 0\end{cases}$

h) $F(x)=\begin{cases}\cos x+4k & \text{dla } (2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi\\ -\cos x+2+4k & \text{dla } 2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi, k\in\mathscr{Z}\end{cases}$

Odpowiedzi do rozdziału 15

15.1. Podstawiamy daną funkcję i jej pochodną do równania różniczkowego i otrzymujemy równanie liczbowe:

a) $0=1$; równanie to nie jest tożsamością; dana funkcja nie jest rozwiązaniem równania różniczkowego;
b) $2x=1+x^4$; równanie to nie jest tożsamością; dana funkcja nie jest rozwiązaniem;
c) $\cos x=1+\sin^2 x$; równanie to nie jest tożsamością; dana funkcja nie jest rozwiązaniem;
d) $1/\cos^2 x=1+\mathrm{tg}^2 x$; to równanie jest tożsamością; dana funkcja jest rozwiązaniem równania różniczkowego.

15.2. Postępujemy, jak w poprzednim zadaniu; otrzymujemy
a) $0=0$; dana funkcja jest rozwiązaniem;
b) $0=1$; dana funkcja nie jest rozwiązaniem;
c) $1=x^2$; dana funkcja nie jest rozwiązaniem;
d) $1/x^2=1/x^2$; dana funkcja jest rozwiązaniem.

15.5. 1° Funkcja $f(x,y)=2y/x$ oraz jej pochodna $f_y(x,y)=2/x$ są ciągłe dla $x\neq 0$, zatem obszarami jednoznaczności są półpłaszczyzna $x>0$ i półpłaszczyzna $x<0$;
2° wstawiamy dane wyrażenie do równania różniczkowego i otrzymujemy tożsamość; krzywymi całkowymi są: dla $C=0$ półprosta $y=0$, $x>0$ i półprosta $y=0$, $x<0$, a dla $C\neq 0$ półparabole $y=Cx^2$, $x\neq 0$;
3° podstawiamy w rozwiązaniu ogólnym $x=x_0=-2$, $y=y_0=3$, skąd otrzymujemy $C=3/4$; podstawiamy w rozwiązaniu ogólnym $C=3/4$, skąd otrzymujemy $y=\frac{3}{4}x^2$, $x<0$.

15.6. 1° Obszarami jednoznaczności są dwie półpłaszczyzny: $G_1=\{(x,y): y>0\}$ i $G_2=\{(x,y): y<0\}$;
2° wyrażenie I jest rozwiązaniem ogólnym w G_1; wyrażenie II jest rozwiązaniem ogólnym w G_2; krzywą całkową jest każdy półokrąg o środku $(0,0)$ i promieniu $\sqrt{C}$ zawarty w G_1 lub w G_2;
3° punkt $(3,-4)$ należy do G_2, więc należy skorzystać z wyrażenia II; otrzymujemy $y=-\sqrt{25-x^2}$, $|x|<5$.

15.7. 1° Obszarem jednoznaczności jest cała płaszczyzna Oxy;
2° dane wyrażenie jest rozwiązaniem ogólnym; krzywymi całkowymi są hiperbole, których wspólną asymptotą jest oś Ox;
3° podstawiamy w rozwiązaniu ogólnym $x=y=0$ i otrzymujemy $0=1/C$, czyli sprzeczność; natomiast rozwiązanie dodatkowe $y=0$, nie objęte rozwiązaniem ogólnym, spełnia dany warunek początkowy.

15.8. a) Równanie $y'=-2x/e^y$ jest określone i rozdzielenie zmiennych jest możliwe na całej płaszczyźnie Oxy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{e^y}$$

$$e^y dy = -2x\,dx$$

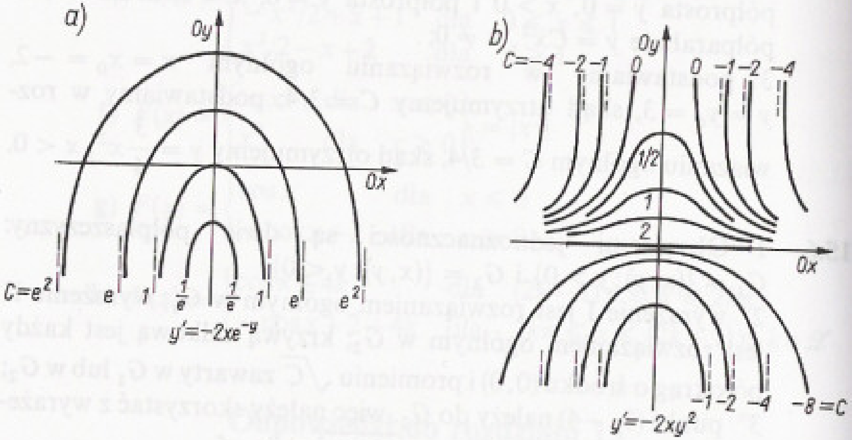
$$\int e^y dy = \int -2x\,dx$$

$$e^y = C - x^2 \quad \text{(CO) — całka ogólna} \quad (*)$$

Mamy $C = e^y + x^2$ dla każdego x i każdego y, więc zbiór wartości C jest przedziałem $(0; \infty)$, co wyrażamy nierównością $C > 0$. Rozwiązujemy równanie $(*)$ względem y i otrzymujemy rozwiązanie ogólne

$$y = \ln(C - x^2), \quad C > 0, \quad |x| < \sqrt{C} \quad \text{(RO)}$$

Krzywe całkowe przedstawiono na rys. 15.8a.



Rys. 15.8 a, b

b) Równanie $y' = -2xy^2$ jest określone na całej płaszczyźnie Oxy. Rozdzielenie zmiennych jest możliwe, jeśli $y \neq 0$. Otrzymujemy odpowiedź

$$y = \frac{1}{x^2 + C}, \quad C \in \mathscr{R} \quad \text{(RO)}$$

przy czym, jeśli $C > 0$, to $x \in \mathscr{R}$, a jeśli $C \leqslant 0$, to $x^2 \neq -C$; nadto

$$y = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathscr{R} \quad \text{(RD)}$$

Krzywe całkowe — na rys. 15.8b.

c) Równanie $y' = x/y$ jest określone i rozdz. zm. możliwe, jeśli $y \neq 0$. Rozdzielamy zmienne $y\,dy = x\,dx$, całkujemy i zgodnie z uwagą 3 piszemy $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}C$, czyli $y^2 = x^2 + C$. Zbiór wartości C jest przedziałem $(-\infty; \infty)$. Zakres zmienności x zależy od C. Odpowiedź

$$y = \pm\sqrt{x^2 + C}\,; \; C > 0, \; x \in \mathscr{R}; \; C \leqslant 0, |x| < \sqrt{-C} \quad \text{(RO)}$$

d) Równanie $y' = 2y/x$ jest określone dla $x \neq 0$ i jest spełnione przez funkcję $y = \text{const} = 0$, $x \neq 0$; rozdz. zm. możliwe, jeśli $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Otrzymujemy

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|, \quad C \neq 0, \quad xy \neq 0$$

$$|y| = |Cx^2|$$

$$y = Cx^2, \; C \neq 0, \; x \neq 0$$

Jeśli dopuścimy wartość $C = 0$, to ten wzór obejmie także rozwiązanie $y = 0$, wymienione na wstępie. Ostatecznie mamy

$$y = Cx^2, \quad C \in \mathscr{R}, \quad x \neq 0 \quad \text{(RO)}$$

e) Równanie $y' = 1/(2xy)$ jest określone i rozdz. zm. możliwe, jeśli $xy \neq 0$.

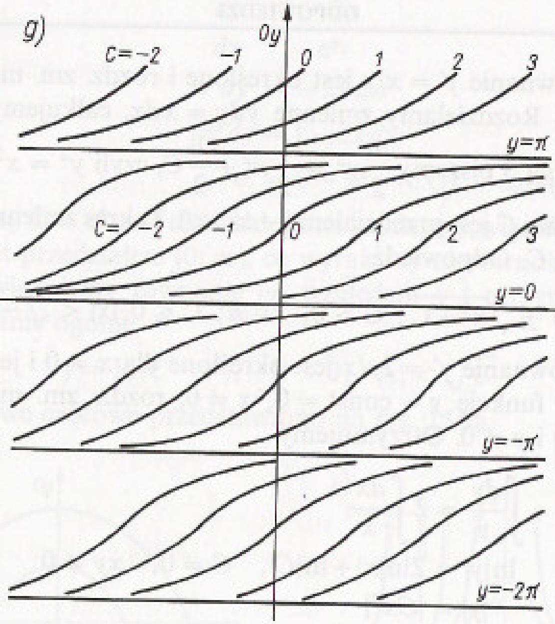
Odpowiedź: $y = \pm\sqrt{\ln|x| + C}\,, \quad C \in \mathscr{R}, \quad |x| > e^{-C}$ (RO)

f) Równanie $y' = y^2$ jest określone na całej płaszczyźnie Oxy i jest spełnione przez funkcję $y = 0$; rozdz. zm. możliwe, jeśli $y \neq 0$.

$$y = 1/(C - x), \quad C \in \mathscr{R}, \quad x \neq C \quad \text{(RO)}$$

$$y = 0, \quad x \in \mathscr{R} \quad \text{(RD)}$$

g) Równanie $y' = \sin^2 y$ jest określone na całej płaszczyźnie Oxy i jest spełnione przez każdą funkcję $y = \text{const} = y_0$, gdzie $\sin y_0 = 0$; rozdz. zm. możliwe, jeśli $\sin y \neq 0$. Stosując wieloznaczną funkcję arcctg (*Zarys II*, s. 58), otrzymujemy



Rys. 15.8 g

$$y = \operatorname{arcctg}(C-x)+k\pi, \quad C\in\mathscr{R}, \quad x\in\mathscr{R}, \quad k\in\mathscr{Z} \qquad \text{(RO)}$$
$$y = k\pi, \quad x\in\mathscr{R}, \quad k\in\mathscr{Z} \qquad \text{(RD)}$$

Krzywe całkowe — na rys. 15.8g.

h) RO: $y = \operatorname{tg}(x-C)$, $C\in\mathscr{R}$, $|x-C| < \pi/2$

i) Dla $y^2 \neq 1$ otrzymujemy równanie

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int dx$$

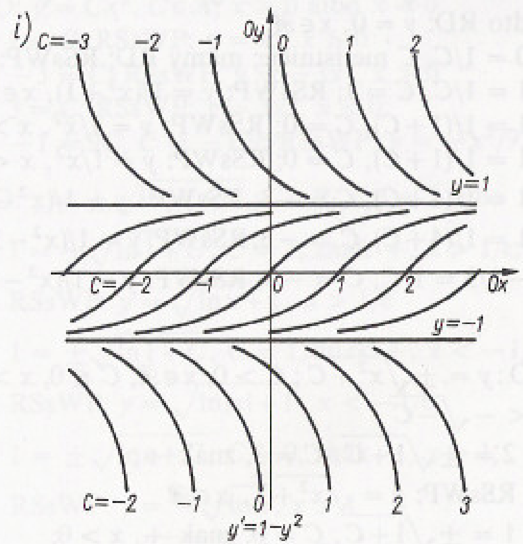
(obliczenie lewej całki — zob. zad. 14.50t).

Otrzymujemy dwie całki ogólne

$$\operatorname{arth} y = x - C, \; C\in\mathscr{R} \qquad \text{dla} \quad |y| < 1$$
$$\operatorname{arcth} y = x - C, \; C\in\mathscr{R}, \; x\neq C \qquad \text{dla} \quad |y| > 1$$

i stąd dwa rozwiązania ogólne

$$y = \operatorname{th}(x-C), \; C\in\mathscr{R}, \; x\in\mathscr{R} \qquad \text{dla} \quad |y| < 1$$



Rys. 15.8 i

$$y = \operatorname{cth}(x-C), \; C\in\mathscr{R}, \; x\neq C \qquad \text{dla} \quad |y| > 1$$

Istnieją nadto dwa rozwiązania dodatkowe: $y = \pm 1, x\in\mathscr{R}$. Krzywe całkowe — na rys. 15.8i.

15.9. Wstawiamy $x = x_0$, $y = y_0$ do RO i otrzymujemy równanie, którego rozwiązaniem jest pewna wartość C_0 stałej C. Po podstawieniu w RO za C tej wartości C_0, otrzymujemy RSsWP. Wartość początkowa x_0 powinna należeć do przedziału istnienia tego rozwiązania.

a) RO: $y = \ln(C-x^2)$, $C > 0$, $|x| < \sqrt{C}$

1) $0 = \ln(C-0)$, $C = 1$; RSsWP: $y = \ln(1-x^2)$, $|x| < 1$
2) $1 = \ln(C-0)$, $C = \mathrm{e}$; RSsWP: $y = \ln(\mathrm{e}-x^2)$, $|x| < \sqrt{\mathrm{e}}$
3) $0 = \ln(C-1)$, $C = 2$; RSsWP: $y = \ln(2-x^2)$, $|x| < \sqrt{2}$
4) $1 = \ln(C-1)$, $C = 1+\mathrm{e}$; RSsWP: $y = \ln(1+\mathrm{e}-x^2)$, $|x| < \sqrt{1+\mathrm{e}}$

b) RO: $y = 1/(x^2+C)$; $C > 0$, $x \in \mathscr{R}$; $C \leqslant 0$, $x > \sqrt{-C}$ albo $x < -\sqrt{-C}$, albo $-\sqrt{-C} < x < \sqrt{-C}$.
Nadto RD: $y = 0$, $x \in \mathscr{R}$.
1) $0 = 1/C$, C nie istnieje; mamy RD; RSsWP: $y = 0$, $x \in \mathscr{R}$
2) $1 = 1/C$, $C = 1$; RSsWP: $y = 1/(x^2+1)$, $x \in \mathscr{R}$
3) $1 = 1/(1+C)$, $C = 0$; RSsWP: $y = 1/x^2$, $x > 0$
4) $1 = 1/(1+C)$, $C = 0$; RSsWP: $y = 1/x^2$, $x < 0$
5) $1 = 1/(4+C)$, $C = -3$; RSsWP: $y = 1/(x^2-3)$, $x > \sqrt{3}$
6) $1 = 1/(4+C)$, $C = -3$; RSsWP: $y = 1/(x^2-3)$, $x < -\sqrt{3}$
7) $-1/3 = 1/C$, $C = -3$; RSsWP: $y = 1/(x^2-3)$, $|x| < \sqrt{3}$

c) RO: $y = \pm\sqrt{x^2+C}$; $C > 0$, $x \in \mathscr{R}$; $C \leqslant 0$, $x > \sqrt{-C}$ albo $x < -\sqrt{-C}$
1) $2 = \pm\sqrt{1+C}$, $C = 3$, znak $+$;
RSsWP: $y = \sqrt{x^2+3}$, $x \in \mathscr{R}$
2) $1 = \pm\sqrt{1+C}$, $C = 0$, znak $+$, $x > 0$;
RSsWP: $y = \sqrt{x^2} = |x| = x$, $x > 0$
3) $1/2 = \pm\sqrt{1+C}$, $C = -3/4$, znak $+$;
RSsWP: $y = \sqrt{x^2-3/4}$, $x > \sqrt{3/4}$
4) Warunek $y(1) = 0$ nie może być rozważany, gdyż punkt $(1,0)$ nie należy do obszaru istnienia rozwiązań.
5) $-1/2 = \pm\sqrt{1+C}$, $C = -3/4$, znak $-$;
RSsWP: $y = -\sqrt{x^2-3/4}$, $x > \sqrt{3/4}$
6) $-1 = \pm\sqrt{1+C}$, $C = 0$, znak $-$, $x > 0$;
RSsWP: $y = -\sqrt{x^2} = -|x| = -x$, $x > 0$
7) $-2 = \pm\sqrt{1+C}$, $C = 3$, znak $-$;
RSsWP: $y = -\sqrt{x^2+3}$, $x \in \mathscr{R}$
8) $1 = \pm\sqrt{1+C}$, $C = 0$, znak $+$, $x < 0$;
RSsWP: $y = \sqrt{x^2} = |x| = -x$, $x < 0$
9) $-1 = \pm\sqrt{1+C}$, $C = 0$, znak $-$, $x < 0$;
RSsWP: $y = -\sqrt{x^2} = -|x| = x$, $x < 0$
10) $1/2 = \pm\sqrt{1+C}$, $C = -3/4$, znak $+$;
RSsWP: $y = \sqrt{x^2-3/4}$, $x < -\sqrt{3/4}$

d) RO: $y = Cx^2$, $C \in \mathscr{R}$, $x > 0$ albo $x < 0$
1) $1 = C$; RSsWP: $y = x^2$, $x > 0$
2) $-3 = C$; RSsWP: $y = -3x^2$, $x > 0$
3) $3 = C$; RSsWP: $y = 3x^2$, $x < 0$
4) $-1 = 9C$, $C = -1/9$; RSsWP: $y = -x^2/9$, $x < 0$

e) RO: $y = \pm\sqrt{\ln|x|+C}$, $C \in \mathscr{R}$, $x > e^{-C}$ albo $x < -e^{-C}$
1) $1 = \pm\sqrt{\ln 1 + C}$, $C = 1$, znak $+$, $x > 1/e$;
RSsWP: $y = \sqrt{\ln x + 1}$, $x > 1/e$
2) $1 = \pm\sqrt{\ln 1 + C}$, $C = 1$, znak $+$, $x < -1/e$;
RSsWP: $y = \sqrt{\ln|x|+1}$, $x < -1/e$
3) $1 = \pm\sqrt{\ln e + C}$, $C = 0$, znak $-$, $x > 1$;
RSsWP: $y = -\sqrt{\ln x}$, $x > 1$
4) $-1 = \pm\sqrt{\ln e + C}$, $C = 0$, znak $-$, $x < -1$;
RSsWP: $y = -\sqrt{\ln|x|}$, $x < -1$

f) RO: $y = 1/(C-x)$, $C \in \mathscr{R}$, $x > C$ albo $x < C$;
RD: $y = 0$, $x \in \mathscr{R}$
1) $0 = 1/C$, C nie istnieje (zob. s. 39); RSsWP: $y = 0$, $x \in \mathscr{R}$
2) $1 = 1/C$, $C = 1$; RSsWP: $y = 1/(1-x)$, $x < 1$
3) $-1 = 1/(C-2)$, $C = 1$; RSsWP: $y = 1/(1-x)$, $x > 1$
4) $-1 = 1/(C+1)$, $C = -2$; RSsWP: $y = 1/(-2-x)$, $x > -2$

g) RO: $y = \operatorname{arcctg}(C-x) + k\pi$, $C \in \mathscr{R}$, $x \in \mathscr{R}$, $k \in \mathscr{Z}$;
RD: $y = k\pi$, $x \in \mathscr{R}$
1) $0 = \operatorname{arcctg} C + k\pi$. Zbiór wartości $\operatorname{arcctg} C$ jest przedziałem $(0; \infty)$, więc C nie istnieje (zob. s. 39);
RSsWP: $y = 0$, $x \in \mathscr{R}$
2) $\pi = \operatorname{arcctg} C + k\pi$, C nie istnieje; RSsWP: $y = \pi$, $x \in \mathscr{R}$
3) $\pi/2 = \operatorname{arcctg} C + k\pi$, $C = 0$, $k = 0$;
RSsWP: $y = \operatorname{arcctg}(-x)$, $x \in \mathscr{R}$
4) $10 = \operatorname{arcctg} C + k\pi$, czyli $\operatorname{arcctg} C = 10 - k\pi$. Zbiór war-

tości $\operatorname{arcctg} C$ jest przedziałem $(0;\pi)$, więc należy wyznaczyć takie k, aby $0 < 10-k\pi < \pi$. Ponieważ $3\pi = 9{,}42477$, więc mamy $k = 3$ i równość $\operatorname{arcctg} C = 10-9{,}42477 = 0{,}57523$. Stąd

$$C = \operatorname{ctg} 0{,}57523 = \operatorname{ctg}\left(0{,}57523\cdot\frac{180^\circ}{\pi}\right) =$$

$$= \operatorname{ctg} 32{,}958^\circ = \operatorname{ctg} 32^\circ 57' 29'' = 1{,}5421.$$

RSsWP: $y = \operatorname{arcctg}(1{,}5421-x)+3\pi,\ x\in\mathscr{R}$

h) RO: $y = \operatorname{tg}(x-C),\ C\in\mathscr{R},\ |x-C| < \pi/2$

1) $0 = \operatorname{tg}(-C),\ |-C| < \pi/2;\ C = 0;$
RSsWP: $y = \operatorname{tg} x,\ |x| < \pi/2$

2) $0 = \operatorname{tg}(1-C),\ |1-C| < \pi/2,\ C = 1;$
RSsWP: $y = \operatorname{tg}(x-1),\ |x-1| < \pi/2$

3) $1 = \operatorname{tg}(-C),\ |-C| < \pi/2,\ C = -\pi/4;$
RSsWP: $y = \operatorname{tg}(x+\pi/4),\ |x+\pi/4| < \pi/2$

4) $1 = \operatorname{tg}(4-C),\ |4-C| < \pi/2,\ C = 4-\pi/4;$
RSsWP: $y = \operatorname{tg}[x-(4-\pi/4],\ |x-(4-\pi/4)| < \pi/2$

i) RO: $y = \operatorname{th}(x-C),\ C\in\mathscr{R},\ x\in\mathscr{R}$ dla $|y| < 1$
RO: $y = \operatorname{cth}(x-C),\ C\in\mathscr{R},\ x > C$ albo $x < C$ dla $|y| > 1$
RD: $y = 1,\ x\in\mathscr{R}$; RD: $y = -1,\ x\in\mathscr{R}$

1) $0 = \operatorname{th}(-C),\ C = 0$; RSsWP: $y = \operatorname{th} x,\ x\in\mathscr{R}$

2) $1/2 = \operatorname{th}(-C), \quad -C = \operatorname{arth}\frac{1}{2} = \left\| \text{s. } 32 \right\| = \frac{1}{2}\ln 3 =$
$=\frac{1}{2}\cdot 2{,}3026\cdot\lg 3 = 0{,}5493,\ C = -0{,}5493;$
RSsWP: $y = \operatorname{th}(x+0{,}5493),\ x\in\mathscr{R}$

3) RSsWP: $y = 1,\ x\in\mathscr{R}$

4) $2 = \operatorname{cth}(-C), \quad -C = \operatorname{arcth} 2 = \left\| \text{s. } 32 \right\| = \frac{1}{2}\ln 3 =$
$= 0{,}5493,\ C = -0{,}5493;$
RSsWP: $y = \operatorname{cth}(x+0{,}5493),\ x > -0{,}5493$

5) $-2 = \operatorname{cth}(-C),\ -C = \operatorname{arcth}(-2) =$
$= \left\| \text{s. } 32 \right\| = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = -0{,}5493,\ C = 0{,}5493;$
RSsWP: $y = \operatorname{cth}(x-0{,}5493),\ x < 0{,}5493$

15.10. a) RO: $y = \ln(x^2+C),\ C > 0,\ x\in\mathscr{R}$: $C \leqslant 0,\ |x| > \sqrt{-C}$

b) RO: $y = -\ln(C-x^2),\ C > 0,\ |x| < \sqrt{C}$

c) RO: $y = C/x^2,\ C\in\mathscr{R},\ x \neq 0$

d) RO: $y = -1/(x^2+C),\ C > 0,\ x\in\mathscr{R}$: $C \leqslant 0,\ x^2 \neq -C;$
RD: $y = 0,\ x\in\mathscr{R}$

e) RO: $y = 1/(x-C),\ C\in\mathscr{R},\ x \neq C$; RD: $y = 0,\ x\in\mathscr{R}$

f) RO: $y = C|x|^{3/4},\ C\in\mathscr{R},\ x \neq 0$

g) RO: $y = C-1/x,\ C\in\mathscr{R},\ x \neq 0$

h) RO: $y = Ce^{-x},\ C\in\mathscr{R},\ x\in\mathscr{R}$

i) RO: $y = \pm 1/\sqrt{C-x},\ C\in\mathscr{R},\ x < C$; RD: $y = 0,\ x\in\mathscr{R}$

15.11. a) RO: $y = \ln(x-C),\ C\in\mathscr{R},\ x > C$

1) $y = \ln x,\ x > 0$; 2) $y = \ln(x+1),\ x > -1$
3) $y = \ln(x+2),\ x > -2$; 4) $y = \ln(x+e),\ x > -e$
5) $y = \ln(x-e+1/e),\ x > e-1/e$

b) RO: $y = C/x^3,\ C\in\mathscr{R},\ x > 0$ albo $x < 0$

1) $y = 1/x^3,\ x > 0$; 2) $y = 1/x^3,\ x < 0$; 3) $y = 0,\ x > 0$
4) $y = 8/x^3,\ x > 0$

c) RO: $y = \ln(x^2/2+C),\ C > 0,\ x\in\mathscr{R}$; $C \leqslant 0,\ |x| > \sqrt{-2C}$

1) $y = \ln(x^2/2+1),\ x\in\mathscr{R}$; 2) $y = \ln(x^2/2+e),\ x\in\mathscr{R}$
3) $y = \ln(x^2/2+1/e),\ x\in\mathscr{R}$; 4) $y = \ln(x^2/2+1/2),\ x\in\mathscr{R}$
5) $y = \ln(x^2/2),\ x > 0$; 6) $y = \ln(x^2/2-1),\ x > \sqrt{2}$
7) $y = \ln(x^2/2-1),\ x < -\sqrt{2}$

d) RO: $y = -2/(x^2+C),\ C > 0,\ x\in\mathscr{R}$; $C \leqslant 0,\ x^2 \neq -C;$
RD: $y = 0,\ x\in\mathscr{R}$

1) $y = 0,\ x\in\mathscr{R}$; 2) $y = -2/(x^2-2),\ |x| < \sqrt{2}$
3) $y = -2/(x^2+2),\ x\in\mathscr{R}$; 4) $y = -2/(x^2-3),\ |x| < \sqrt{3}$
5) $y = 0,\ x\in\mathscr{R}$; 6) $y = -2/(x^2+1),\ x\in\mathscr{R}$
7) $y = -2/x^2,\ x > 0$; 8) $y = -2/x^2,\ x < 0$
9) $y = -2/(x^2-101),\ |x| < \sqrt{101}$
10) $y = -2/(x^2-99),\ x > \sqrt{99}$

15.12. a) RO: $y = \ln(e^x+C),\ C \geqslant 0,\ x\in\mathscr{R}$; $C < 0,\ x > \ln(-C)$

b) RO: $y = -\ln(x^2-C),\ C \geqslant 0,\ |x| > \sqrt{C}$: $C < 0,\ x\in\mathscr{R}$

c) RO: $y = Ce^{x^2}$, $C\in\mathscr{R}$, $x\in\mathscr{R}$
d) CO: $x^2+y^2 = C$, $C>0$, $y\neq 0$
e) CO: $3x^2-4y^2 = C$, $C\in\mathscr{R}$, $y\neq 0$
f) RO: $y = \pm 1/\sqrt{C-x^2}$, $C>0$, $|x|<\sqrt{C}$; RD: $y=0$, $x\in\mathscr{R}$
g) RO: $y = x+\ln|x-1|+C$; $C\in\mathscr{R}$, $x\neq 1$
h) RO: $y = Ce^x$, $C\in\mathscr{R}$, $x\in\mathscr{R}$
i) RO: $y = Ce^x-2$, $C\in\mathscr{R}$, $x\in\mathscr{R}$

15.13. a) RO: $y = 1+Cx$, $C\in\mathscr{R}$, $x\neq 0$
1) $y = 1-x$, $x>0$; 2) $y=1$, $x>0$; 3) $y = 1+x/3$, $x<0$
b) RO: $y = \pm 1/\sqrt{x-C}$, $C\in\mathscr{R}$, $x>C$; RD: $y=0$, $x\in\mathscr{R}$
1) $y = 1/\sqrt{x+1}$, $x>-1$; 2) $y = 1/\sqrt{x}$, $x>0$
3) $y = -1/\sqrt{x-1}$, $x>1$
c) RO: $y = \pm\sqrt{2(C-x^2)}$, $C>0$, $|x|<\sqrt{C}$
1) $y = -\sqrt{2(17-x^2)}$, $|x|<\sqrt{17}$
2) $y = \sqrt{2(17-x^2)}$, $|x|<\sqrt{17}$
3) Punkt $(1,0)$ nie należy do zbioru określoności równania.
d) RO: $y = \pm\sqrt{2(x^2+C)}$, $C>0$, $x\in\mathscr{R}$; $C\leqslant 0$, $x^2>-C$
1) $y = -\sqrt{2(x^2-1)}$, $x>1$; 2) $y = -\sqrt{2(x^2+6)}$, $x\in\mathscr{R}$
3) $y = -x\sqrt{2}$, $x<0$

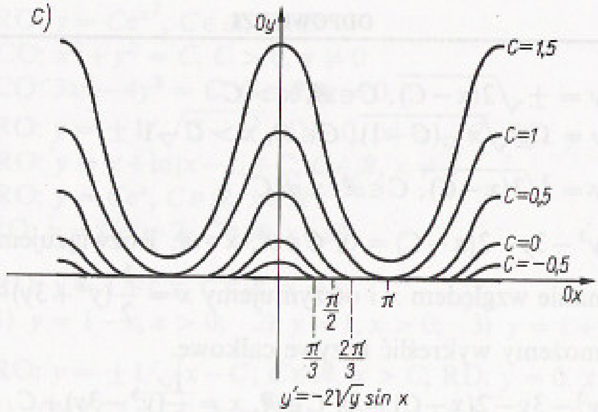
15.14. a) $y = -\ln(C-e^x)$, $C>0$, $x<\ln C$
b) $y = \ln(C-\cos x)$, $C>-1$, $\cos x<C$
c) $y = 1/(1-Cx)$, $C\neq 0$, $x\neq 1/C$, $x\neq 0$; nadto $y=0$ dla $x\neq 0$ oraz $y=1$ dla $x\neq 0$
d) $y = \operatorname{sh}(x-C)$, $C\in\mathscr{R}$, $x\in\mathscr{R}$
e) $y = Ce^{1/x}$, $C\in\mathscr{R}$, $x\neq 0$
f) $y^2 = e^x+C$, $C\geqslant 0$, $x\in\mathscr{R}$; $C<0$, $x>\ln(-C)$
g) $y = Ce^{\sin x}$, $C\in\mathscr{R}$, $x\in\mathscr{R}$
h) $y = 2\operatorname{arctg} Ce^x+2k\pi$, $C\neq 0$, $k\in\mathscr{Z}$, $x\in\mathscr{R}$; nadto $y = k\pi$, $x\in\mathscr{R}$
i) $y^2 = \ln x^2-(x^2+C)$, $C<-1$, $\ln x^2>x^2+C$

15.15. a) $y = -\ln(C-x)$, $C\in\mathscr{R}$, $x<C$
b) $y = \pm\sqrt{x-C}$, $C\in\mathscr{R}$, $x>C$
c) $y = \pm\sqrt{C-x}$, $C\in\mathscr{R}$, $x<C$

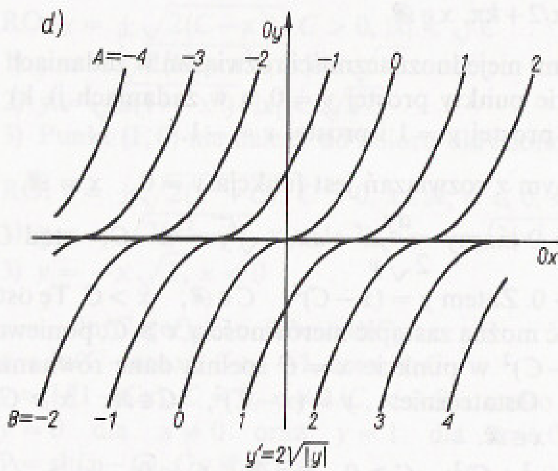
d) $y = \pm\sqrt{2(x-C)}$, $C\in\mathscr{R}$, $x>C$
e) $y = 1\pm\sqrt{x-(C-1)}$, $C\in\mathscr{R}$, $x>C-1$
f) $y = \sqrt[3]{3(x-C)}$, $C\in\mathscr{R}$, $x\neq C$
g) $y^3-3y-2(x-C)=0$, $C\in\mathscr{R}$, $x\in\mathscr{R}$. Rozwiązujemy to równanie względem x i otrzymujemy $x = \dfrac{1}{2}(y^3+3y)+C$, a stąd możemy wykreślić krzywe całkowe.
h) $y^3-3y-2(x-C)=0$, $C\in\mathscr{R}$, $x = \dfrac{1}{2}(y^3-3y)+C$
i) $y = \operatorname{arctg}(x^2+C)+k\pi$, $C\in\mathscr{R}$, $x\in\mathscr{R}$, $k\in\mathscr{Z}$, nadto $y = \pi/2+k\pi$, $x\in\mathscr{R}$

15.16. Punktami niejednoznaczności rozwiązań w zadaniach a)— h) są wszystkie punkty prostej $y=0$, a w zadaniach j), k) wszystkie punkty prostej $y=1$ i prostej $y=-1$.

a) Jednym z rozwiązań jest funkcja $y=0$, $x=\mathscr{R}$.
Dla $y>0$ mamy $\dfrac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$, $\sqrt{y} = x-C$, stąd $C\in\mathscr{R}$ oraz $x-C>0$. Zatem $y=(x-C)^2$, $C\in\mathscr{R}$, $x>C$. Tę ostatnią nierówność można zastąpić nierównością $x\geqslant C$, ponieważ funkcja $y=(x-C)^2$ w punkcie $x=C$ spełnia dane równanie różniczkowe. Ostatecznie: $y=(x-C)^2$, $C\in\mathscr{R}$, $x\geqslant C$; nadto $y=0$, $x\in\mathscr{R}$.
b) $y=(x^2+C)^2$; $C\geqslant 0$, $x\in\mathscr{R}$; $C<0$, $|x|\geqslant\sqrt{-C}$; nadto $y=0$, $x\in\mathscr{R}$.
c) $y=(\cos x+C)^2$; $C\geqslant 1$, $x\in\mathscr{R}$; $|C|<1$, $\cos x+C\geqslant 0$; nadto $y=0$, $x\in\mathscr{R}$ (zob. rys. 15.16c).
d) $y = \begin{cases} (x-A)^2, & A\in\mathscr{R}, \quad x\geqslant A \\ -(x-B)^2, & B\in\mathscr{R}, \quad x\leqslant B \end{cases}$ nadto $y=0$, $x\in\mathscr{R}$
(zob. rys. 15.16d).
e) $y = \begin{cases} (x^2+C)^2, & C<0, \quad |x|\geqslant\sqrt{-C}; \quad C\geqslant 0, \quad x\in\mathscr{R} \\ -(x^2+C)^2, & C<0, \quad |x|\leqslant\sqrt{-C} \end{cases}$
nadto $y=0$, $x\in\mathscr{R}$.



Rys. 15.16 c



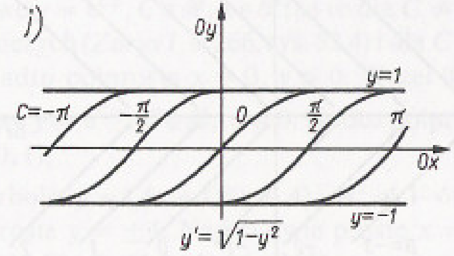
Rys. 15.16 d

f) $y = \begin{cases} (\cos x + C)^2; & C \geqslant 1, \quad x \in \mathcal{R}; \quad |C| < 1, \quad \cos x + C > 0 \\ -(\cos x + C)^2; & C \leqslant -1, x \in \mathcal{R}; \ |C| < 1, \ \cos x + C < 0 \end{cases}$
nadto $y = 0, \quad x \in \mathcal{R}$.

g) $y = \pm\sqrt{(x-C)^3}, \quad C \in \mathcal{R}, \quad x \geqslant C$; nadto $y = 0, \ x \in \mathcal{R}$.

h) $y = (x-C)^3, \quad C \in \mathcal{R}, \quad x \in \mathcal{R}$; nadto $y = 0, \ x \in \mathcal{R}$.

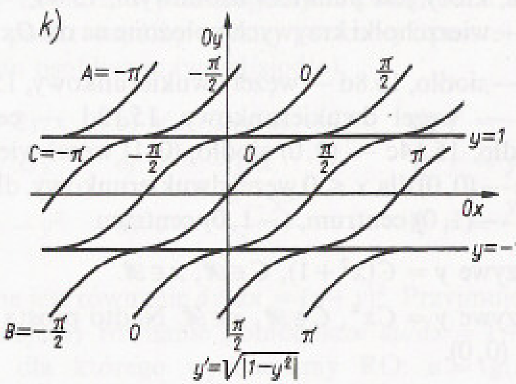
i) $y = 1/(C-x)^3, \quad C \in \mathcal{R}, \ x \neq C$; nadto $y = 0, \quad x \in \mathcal{R}$.
Punktów niejednoznaczności nie ma.



Rys. 15.16 j

j) $y = \sin(x-C), \quad C \in \mathcal{R}, \quad |x-C| \leqslant \pi/2$;
nadto $y = \pm 1, \quad x \in \mathcal{R}$ (zob. rys. 15.16j).

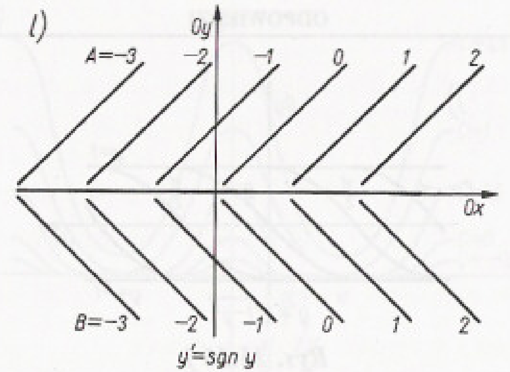
k) $y = \begin{cases} \mathrm{ch}(x-A), & A \in \mathcal{R}, & x \geqslant A \\ \sin(x-C), & C \in \mathcal{R}, & |x-C| < \pi/2 \\ -\mathrm{ch}(x-B), & B \in \mathcal{R}, & x \leqslant B \end{cases}$
nadto $y = \pm 1, \quad x \in \mathcal{R}$ (zob. rys. 15.16k).



Rys. 15.16 k

l) $y' = \begin{cases} 1 \text{ dla } y > 0 \\ 0 \text{ dla } y = 0 \\ -1 \text{ dla } y < 0 \end{cases} \quad y = \begin{cases} x - A, & A \in \mathcal{R}, & x > A \\ 0 \\ B - x, & B \in \mathcal{R}, & x > B \end{cases}$

Punktów niejednoznaczności nie ma. Obszarem jednoznaczności rozwiązań jest cała płaszczyzna Oxy (zob. rys. 15.16l).



Rys. 15.16 l

15.17. **a)** $y = \exp(\exp x) = e^{(e^x)}, \quad x \in \mathscr{R}$
b) $y = \ln(2 - e^{-x}), \quad x > -\ln 2$
c) $y = 2\ln x, \quad x > 0$
d) $y = x, \quad x > 0$

15.18. 15.8c — wierzchołki hiperbol położone na osi Ox oraz początek układu, który jest punktem osobliwym; 15.8d — prostą $x = 0$; 15.8e — wierzchołki krzywych położone na osi Ox i prostą $x = 0$.

15.19. 15.8c — siodło, 15.8d — węzeł dwukierunkowy, 15.10c — siodło, 15.10f — węzeł dwukierunkowy, 15.12d — centrum, 15.12e — siodło, 15.14c — $(0,0)$ siodło, $(0,1)$ węzeł wielokierunkowy; 15.14e — $(0,0)$ dla $x \leqslant 0$ węzeł dwukierunkowy, dla $x \geqslant 0$ siodło; 15.14i — $(1,0)$ centrum, $(-1,0)$ centrum.

15.20. **a)** Krzywe $y = C(x^2+1)$, $C \in \mathscr{R}$, $x \in \mathscr{R}$.

b) Krzywe $y = Cx^4$, $C \in \mathscr{R}$, $x \in \mathscr{R}$. Nadto prosta $x = 0$. Węzeł $(0,0)$.

c) Krzywe $y = C\ln x$, $C \in \mathscr{R}$, $x > 0$; są to dla $C \neq 0$ wykresy funkcji logarytmicznych (*Zarys I*, s. 267, rys. 52.5) i dla $C = 0$ półprosta $y = 0$, $x > 0$. Nadto prosta $x = 1$. Węzeł $(1,0)$.

d) Krzywe $y = x^C$, $C \in \mathscr{R}$, $x > 0$ (wśród nich półprosta $y = 1$, $x > 0$ i półprosta $y = x$, $x > 0$); są to wykresy funkcji potęgowych (*Zarys I*, s. 265, rys. 52.3). Nadto półprosta $x = 1$, $y > 0$. Węzeł $(1,1)$.

e) Krzywe $y = e^{Cx}$, $C \in \mathscr{R}$, $x \in \mathscr{R}$; są to dla $C \neq 0$ wykresy funkcji wykładniczych (*Zarys I*, s. 266, rys. 52.4) i dla $C = 0$ prosta $y = 1$, $x \in \mathscr{R}$. Nadto półprosta $x = 0$, $y > 0$. Węzeł $(0,1)$.

f) Krzywe $y = e^{C/x}$, $C \in \mathscr{R}$, $x \neq 0$. Nadto półprosta $x = 0$, $y > 0$. Siodło $(0,1)$.

g) Hiperbole $y = (Ax+1)/(x+A)$, $A^2 \neq 1$ oraz prosta $y = x$ i dwie proste $y = \pm 1$. Nadto dwie proste $x = \pm 1$. Węzły $(1,1)$ i $(-1,-1)$. Siodła $(1,-1)$ i $(-1,1)$.

h) Hiperbole $y = x/(1-Cx)$, $C \neq 0$, $x \neq 1/C$ oraz prosta $y = x$ i prosta $y = 0$. Nadto prosta $x = 0$. Punkt $(0,0)$ jest węzłem dla I i III ćwiartki oraz siodłem dla II i IV ćwiartki.

i) Proste poziome $y = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathscr{Z}$ i proste pionowe $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathscr{Z}$ dzielą płaszczyznę Oxy na kwadraty, z których każdy jest wypełniony krzywymi $y = \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} x + C)$, $C \in \mathscr{R}$ (u w a g a: Arctg jest funkcją wieloznaczną, *Zarys I*, s. 269). Wśród tych krzywych są dla $C = 0$ proste $y = x + k\pi$, $k \in \mathscr{Z}$. Obrazy zawarte w poszczególnych kwadratach są przystające. Każdy punkt wspólny prostej poziomej i prostej pionowej jest punktem osobliwym (węzeł/siodło).

15.21. **a)** $y' = 2y/x$ **b)** $y' = 2xy/(x^2+1)$ **c)** $y' = -x/y$
d) $y' = x/y$ **e)** $y' = -y/x$ **f)** $y' = y/x$
g) $y' = -y^2$ **h)** $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$ **i)** $y' = \dfrac{y^2 - x^2 + 1}{2xy}$

15.22. **a)** Dane jest równanie $dy/dx = (x+y)^2$. Przyjmujemy $u = x + y$. Otrzymujemy równanie pomocnicze $du/dx = 1 + u^2$ (zob. zad. 15.8h), dla którego wyznaczamy RO: $u = \operatorname{tg}(x - C)$, $C \in \mathscr{R}$, $|x - C| < \pi/2$. Stąd i z równości $u = x + y$ obliczamy dla danego równania RO: $y = -x + \operatorname{tg}(x - C)$, $C \in \mathscr{R}$, $|x - C| < \pi/2$.

b) Przyjmujemy $u = x + y$. Równanie pomocnicze $du/dx = u^2$ (zob. zad. 15.8f), dla którego RO: $u = -1/(x - C)$, $C \in \mathscr{R}$, $x \neq C$ oraz RD: $u = 0$, $x \in \mathscr{R}$. Stąd i z równości $u = x + y$ obliczamy dla danego równania RO: $y = -x - 1/(x - C)$, $C \in \mathscr{R}$, $x \neq C$ oraz RD: $y = -x$, $x \in \mathscr{R}$.

c) $u = x+y$, $du/dx = u^2-1$ (zob. zad. 15.8i). Rozwiązujemy to równanie, a następnie dla danego równania wyznaczamy RO: $y = -x - \text{th}(x-C)$, dla $|x+y| < 1$, $C \in \mathscr{R}$, $x \in \mathscr{R}$; RO: $y = -x - \text{cth}(x-C)$, dla $|x+y| > 1$, $C \in \mathscr{R}$, $x \neq C$; RD: $y = -x \pm 1$, $x \in \mathscr{R}$.

d) $u = x+y$, $du/dx = (1+u)^2$. Dla tego równania znajdujemy RD: $1+u = 0$, $x \in \mathscr{R}$ oraz RO: $u = -1 - 1/(x-C)$, $C \in \mathscr{R}$, $x \neq C$. Stąd i z równości $u = x+y$ dla danego równania wyznaczamy RD: $y = -x-1$, $x \in \mathscr{R}$ oraz RO: $y = -x-1-1/(x-C)$, $C \in \mathscr{R}$, $x \neq C$.

e) $u = 2x+3y+4$, $du/dx = 2+3u$. W przypadku $2+3u = 0$ równanie jest spełnione. Jeśli $2+3u \neq 0$, to rozdzielając zmienne, otrzymujemy całkę ogólną $2+3u = Ae^{3x}$, $A \neq 0$, $x \in \mathscr{R}$, która dla $A = 0$ obejmuje poprzedni przypadek. Stąd dla danego równania mamy RO: $y = Ce^{3x} - (6x+14)/9$, $C = A/9$, $C \in \mathscr{R}$, $x \in \mathscr{R}$.

f) $u = x-y$, $du/dx = 1/u$, $u^2 = 2(x-C)$, $C \in \mathscr{R}$, $x > C$; $(x-y)^2 = 2(x-C)$; RO: $y = x \pm \sqrt{2(x-C)}$, $C \in \mathscr{R}$, $x > C$

15.23. a) RO: $y = x + \text{tg}(x-C)$, $C \in \mathscr{R}$, $|x-C| < \pi/2$

b) RO: $y = x - 1/(x-C)$, $C \in \mathscr{R}$, $x \neq C$; RD: $y = x$, $x \in \mathscr{R}$

c) RO: $y = x - \text{th}(x-C)$ dla $|y-x| < 1$, $C \in \mathscr{R}$, $x \in \mathscr{R}$;
RO: $y = x - \text{cth}(x-C)$ dla $|y-x| > 1$, $C \in \mathscr{R}$, $x \neq C$;
RD: $y = x \pm 1$, $x \in \mathscr{R}$

d) $u = x-y$, $du/dx = \cos^2 u$ (zob. *Zarys II*, s. 58). Dla tego równania mamy RO: $u = \text{arctg}(x-C) + k\pi$ oraz RD: $u = \pi/2 + k\pi$. Dla danego równania mamy RO: $y = x - \text{arctg}(x-C) + k\pi$, $C \in \mathscr{R}$, $x \in \mathscr{R}$ oraz RD: $y = x - \pi/2$, $x \in \mathscr{R}$, $k \in \mathscr{Z}$.

e) RO: $y = -(a+bc)/b^2 - ax/b + Ce^{bx}$, $C \in \mathscr{R}$, $x \in \mathscr{R}$

f) $u = x-y$, $du/dx = -u^3$. Dla tego równania mamy RD: $u = 0$ oraz RO: $u = \pm 1/\sqrt{2(x-C)}$, $C \in \mathscr{R}$, $x > C$. Dla danego równania mamy RD: $y = x$, $x \in \mathscr{R}$ oraz RO: $y = x \pm 1/\sqrt{2(x-C)}$, $C \in \mathscr{R}$, $x > C$.

g) RO: $y = -x \pm \sqrt{2(x-C)}$, $C \in \mathscr{R}$, $x > C$

15.24. a) Przyjmujemy $x > 0$, $y > 0$, $u = y/x$. Stąd $\frac{du}{dx} = \frac{u \ln u}{x}$, $u = e^{Cx}$, $C \in \mathscr{R}$, $x > 0$, zatem $y = xu = xe^{Cx}$, $C \in \mathscr{R}$, $x > 0$. Ten sam wynik otrzymujemy w obszarze $x < 0$, $y < 0$.

b) $y = xe^{1+Cx}$, $C \in \mathscr{R}$, $x \neq 0$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $u = \frac{y}{x}$, $\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{x}$,
$y = xu = x\,\text{tg}(\ln|x| - C)$, $C \in \mathscr{R}$, $|\ln|x| - C| < \pi/2$

d) $y = \pm x\sqrt{2}\sqrt{\ln|x| - \ln C}$, $C > 0$, $|x| > C$

e) $u = \frac{y}{x}$, $\frac{du}{dx} = \frac{\sin u}{x}$(*). Jeśli $\sin u = 0$, to funkcje stałe $u = k\pi$, $k \in \mathscr{Z}$, są rozwiązaniami dodatkowymi. Jeśli $\sin u \neq 0$, to rozwiązujemy (*) i otrzymujemy $\text{tg}(u/2) = Cx$. (*Zarys II*, s. 42, wzór 101.3), $C \neq 0$, zatem $u = 2\,\text{Arctg}(Cx)$ (*Zarys I*, s. 269). Stąd RO: $y = 2x\,\text{Arctg}(Cx) = 2x[k\pi + \text{arctg}(Cx)]$, $C \neq 0$, $x \neq 0$; RD: $y = k\pi x$, $k \in \mathscr{Z}$, $x \neq 0$.

f) $y \neq x$, $x \neq 0$, $u = y/x$, $\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{x(1-u)}$, $\text{arctg}\,u - C = \ln\sqrt{x^2(1+u^2)}$, CO: $\text{arctg}(y/x) - C = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $C \in \mathscr{R}$. Wprowadzamy współrzędne biegunowe $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, skąd $y/x = \text{tg}\,\varphi$, $\sqrt{x^2+y^2} = r$, a stąd otrzymujemy $\varphi - C = \ln r$, $C \in \mathscr{R}$ (spirale logarytmiczne).

g) CO: $\text{arctg}(y/x) - C = k\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $C \in \mathscr{R}$, czyli $\varphi - C = k\ln r$ (dla $k \neq 0$ spirale logarytmiczne, dla $k = 0$ półproste).

15.25. a) RO: $y = x - C/x$, $C \in \mathscr{R}$, $x \neq 0$

b) RO: $y = x(C + \ln|x|)$, $C \in \mathscr{R}$, $x \neq 0$

c) RO: $y = x/(\ln C - \ln|x|)$, $C > 0$, $x \neq 0$, $x \neq C$;
RD: $y = 0$, $x \neq 0$

d) CO: $2x^2 - 2xy + y^2 = C$, $C > 0$

e) CO: $(y+3x)^2(y-3x)^4 = C$, $C \in \mathscr{R}$ (zob. *Zarys II*, s. 64)

f) CO: $(y+kx)^{k-1}(y-kx)^{k+1} = C, \quad C \in \mathscr{R}$

g) CO: $x = y(C+\ln|y|),\ C \in \mathscr{R},\ y \neq 0$;
RD: $y = 0,\ x \neq 0$ (por. zad. b)

h) CO: $\operatorname{arctg}(y/x) - C = \ln(x^2+y^2),\ C \in \mathscr{R}$, czyli $\varphi - C = 2\ln r$

i) RO: $y = -x\ln\ln|x/C|,\ C > 0,\ |x| > C$

j) CO: $x = y(C+\ln|xy|),\ C \in \mathscr{R},\ xy \neq 0$;
RD: $y = 0,\ x \neq 0$

k) RO: $y = \pm x\sqrt{2}\sqrt{\ln C - \ln|x|},\ C > 0,\ |x| < C$

l) RO: $y = x\operatorname{arctg}(\ln|x| + C) + k\pi x,\ C \in \mathscr{R},\ k \in \mathscr{Z},\ x \neq 0$;
RD: $y = x(\pi/2 + k\pi),\ k \in \mathscr{Z},\ x \neq 0$.

15.26. **a)** $w \neq 0$;
1° $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{2X-Y}{X-Y}$ (zad. 15.25d), $2X^2 - 2XY + Y^2 = C,\ C > 0$;
2° $2x - y = 7,\ x - y = 3;\ x = 4,\ y = 1;\ X = x+4,\ Y = y+1$;
3° CO: $2(x+4)^2 - 2(x+4)(y+1) + (y+1)^2 = C,\ C > 0$, czyli $2x^2 - 2xy + y^2 + 14x - 6y + 25 = C,\ C > 0$, czyli $2x^2 - 2xy + y^2 + 14x - 6y = C_1,\ C_1 = C - 25 > -25$. Sprawdzenie: Jeśli otrzymaną całkę ogólną zróżniczkujemy względem x, pamiętając że $y = y(x)$, to otrzymamy $4x - 2y - 2xy' + 2yy' - 14 - 6y' = 0$ i jeśli stąd obliczymy y', to otrzymamy $y' = \dfrac{2x-y+7}{x-y+3}$, czyli dane równanie różniczkowe.

b) $w \neq 0$;
1° $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{2X-Y}{X}$ (zad. 15.25a), $Y = X - C/X,\ C \in \mathscr{R},\ X \neq 0$;
2° $2x - y = 7,\ x = 5;\ y = 3;\ X = x+5,\ Y = y+3$;
3° $y+3 = x+5-C/(x+5),\ C \in \mathscr{R},\ x \neq -5$. Sprawdzenie: Jeśli stąd wyrazimy C przez x, y i zróżniczkujemy względem x, to otrzymamy równość, która po przekształceniu jest danym równaniem różniczkowym.

c) $w = 0$; równanie typu (13), podobne do równanie 15.22f;
RO: $y = x \pm \sqrt{2(C-x)},\ C \in \mathscr{R},\ x < C$.

15.27. **a)** $x^2 + 2xy - y^2 - 4x - 8y = C,\ C \in \mathscr{R}$
b) $3x^2 + 2xy - 4x - 2y = C,\ C \in \mathscr{R}$

c) $w = 0, u = x + 2y + 1, \dfrac{du}{dx} = \dfrac{5u+2}{u};\ u - \dfrac{2}{5}\ln|5u+2| = 5x + A$, $A \in \mathscr{R}$; $5x + 10y + 7 = C e^{5y-10x},\ C \in \mathscr{R}$

d) $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C,\ C \in \mathscr{R}$

e) $y^2 - xy + y^2 + x - y + 1/3 = C,\ C > 0$

f) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2y+x-1}{\sqrt{3}(x+1)} = \ln|x+1| + C,\ C \in \mathscr{R}$

15.28. **a)** Równanie $dy/dx = -5y$ ma rozwiązanie zerowe $y = 0$ (każde równanie liniowe jednorodne ma rozwiązanie zerowe). Jeśli $y \neq 0$, to

$$\frac{dy}{y} = -5\,dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int -5\,dx$$

$$\ln|y| - \ln|C| = -5x, \quad C \neq 0$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -5x, \quad \left|\frac{y}{C}\right| = e^{-5x}, \quad |y| = |C|e^{-5x}$$

$$y = Ce^{-5x} \quad C \neq 0,\ x \in \mathscr{R}$$

Jeśli przyjmiemy w tym wzorze $C = 0$, to otrzymamy rozwiązanie zerowe, zatem wyrażenie

$$y = Ce^{-5x}, \quad C \in \mathscr{R}, \quad x \in \mathscr{R}$$

jest rozwiązaniem ogólnym, obejmującym wszystkie rozwiązania.

b) $y = C/x^5,\ C \in \mathscr{R},\ x \neq 0$ **c)** $y = Cx^5,\ C \in \mathscr{R},\ x \neq 0$

15.29. **a)** 1° RORJ (zad. 15.28a): $y = Ce^{-5x}$; stałą C zastępujemy funkcją $u(x)$; 2° iloczyn $y = u(x)e^{-5x}$ wstawiamy do RN, skąd po zredukowaniu i scałkowaniu otrzymujemy $u(x) = \dfrac{1}{5}\ln(e^{5x}+1)$;
3° RSRN: $y = u(x)e^{-5x} = \dfrac{1}{5}e^{-5x}\ln(e^{5x}+1)$.

b) $y = 1/x^3$ **c)** $y = x^6$ **d)** $y = 1/(1+5x)$
e) $y = x^{-5}\ln x$ **f)** $y = x^5\ln x$

15.35. a) $y = \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x)e^x + Ce^{-x}$

b) $y = xe^x + Ce^x$

c) $y = x^3 - x + Cx^2,\ x \neq 0$

d) $y = 2\sin x - \cos x + \sin 2x + \cos 2x + Ce^{-2x}$

e) $y = \frac{1}{2}x^2 + C\cos x,\ x \neq \pi/2 + k\pi$

f) $y = 3x - 1 + e^x + 3\sin x - \cos x + Ce^{-3x}$

g) $y = 1 + Ce^{-x^2}$

h) $y = x(x^2+3)/(x^2+1)^2 + C/(x^2+1)^2$

i) $y = -2(\sin 2x + \cos 2x) + Ce^{2x}$

15.36. a) $y = (2x^2 - 2x + 1)e^{3x} + Ce^x$ b) $y = x + C\sin x,\ x \neq k\pi$

c) $y = \frac{1}{16}(4x+11)e^{2x} + Ce^{-2x}$

d) $y = \frac{1}{4}(\sin 2x + \cos 2x)e^x + Ce^{-x}$

e) $y = e^x \sin x + Ce^{4x}$ f) $y = -e^{-x} + Ce^x$

g) $y = \frac{1}{3}x^3 e^{-x} + Ce^{-x}$ h) $y = -x + C\ln x$

i) $y = x - 1 + (x+C)e^{-x}$ j) $y = 1/(1+x) + Ce^{-x}$

k) $y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + (x+C)e^x$ l) $y = x^2 - 1 + Ce^{-x^2}$

15.37. a) $y = -x\sin x - (x+1)\cos x + 2e^x$ b) $y = \frac{1}{2}x^2$

c) $y = x^2 - x - 1/2$ d) $y = \sin x + a\cos x,\ |x| < \pi/2$

15.38. a) CO: $1/y^2 = 1 + Ce^{x^2}$, $C \geqslant 0$, $x \in \mathscr{R}$, $-1 < C < 0$, $|x| < \sqrt{-\ln(-C)}$; RD: $y = 0,\ x \in \mathscr{R}$

b) CO: $y^3 = 3/(2x) + C/x^3,\ C \geqslant 0,\ x \neq 0;\ C < 0,\ 0 \neq x \neq -2C/3$

c) RO: $y = e^{2x}(x-C)^2$ dla $x > C$, $y = 0$ dla $x \leqslant C$, $C \in \mathscr{R}$; RD: $y = 0,\ x \in \mathscr{R}$

d) CO: $1/y = Cx + \ln x + 1,\ C \in \mathscr{R}$; RD: $y = 0,\ x > 0$

e) CO: $1/y^3 = \frac{3}{4x}[A - x^2(2\ln x - 1)],\ A < -1,\ x > 0;\ A = -1,$

$0 < x \neq 1;\ -1 < A < 0,\ x > 0,\ \alpha \neq x \neq \beta$, gdzie α, β są pierwiastkami równania $x^2(2\ln x - 1) = A$; $A = 0,\ 0 < x \neq \sqrt{e}$; $A > 0$, $0 < x \neq \gamma$, gdzie γ jest pierwiastkiem równania $x^2(2\ln x - 1) = A$; RD: $y = 0,\ x > 0$.

15.39. a) $y = e^x[1 - 1/(x-C)],\ C \in \mathscr{R},\ x \neq C$

b) $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x(C - \ln|x|)},\ C \in \mathscr{R},\ 0 \neq x \neq e^C$

c) $y = -\frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3 + A},\ A \in \mathscr{R},\ 0 \neq x \neq \sqrt[3]{-A}$

d) $y = 1 - 1/(1 - Ce^{x^2/2 - x}),\ C \leqslant 0,\ x \in \mathscr{R},\ 0 < C \leqslant \sqrt{e}$, $x \neq 1 \pm \sqrt{1 - 2\ln C};\ C > \sqrt{e},\ x \in \mathscr{R}$

e) $y = x - e^x \Big/ \int \frac{1}{x} e^x dx$, całka nieelementarna

15.40. a) $y = Cx - C^2,\ C \in \mathscr{R},\ x \in \mathscr{R};\ y = x^2/4,\ x \in \mathscr{R}$

b) $y = Cx - 2\sqrt{C},\ C > 0,\ x \in \mathscr{R};\ y = -1/x,\ x > 0$

c) $y = Cx + C(1 - \ln C),\ C > 0,\ x \in \mathscr{R},\ y = e^x,\ x \in \mathscr{R}$

d) $y = Cx - 1/C,\ C \neq 0,\ x \in \mathscr{R},\ y^2 = -4x,\ x < 0$

e) $y = Cx + \sqrt{1+C},\ C > -1,\ x \in \mathscr{R};\ y = -x - 1/(4x),\ x < 0$

f) $y = Cx + \sqrt{1+C^2},\ C \in \mathscr{R},\ x \in \mathscr{R};\ y = \sqrt{1-x^2},\ |x| < 1$

g) $y = Cx + \sqrt{1-C^2},\ |C| < 1,\ x \in \mathscr{R};\ y = \sqrt{1+x^2},\ x \in \mathscr{R}$

h) $y = Cx + \sqrt{1-C^2} - C\arccos C,\ |C| \leqslant 1,\ x \in \mathscr{R};\ y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$

15.41. a) $y = x + p^2 - 2p$ (*), $\frac{dp}{dx} = \frac{p-1}{2(p-1)}$. Dla $p \neq 1$ mamy $\frac{dx}{dp} = 2$, $x = 2p + C,\ C \in \mathscr{R},\ y = p^2 + C,\ y = \frac{1}{4}(x-C)^2 + C$ (rodzina parabol). Podstawiamy w (*) $p = 1$, skąd otrzymujemy $y = x - 1$ (obwiednia rodziny parabol).

b) $y = (x+1)p^2$ (*), $\frac{dp}{dx} = \frac{p(1-p)}{2p(x+1)}$. Dla $0 \neq p \neq 1$ mamy

$$\frac{dx}{dp}-\frac{2}{1-p}x=\frac{2}{1-p};\ x+1=C/(p-1)^2,\ y=Cp^2/(p-1)^2.$$

R u g o w a n i e p a r a m e t r u p.
W przypadku $C>0$ jest $x+1>0$, $y>0$.

Dla $p>1$ otrzymujemy $y=(\sqrt{x+1}+\sqrt{C})^2$ (krzywa K_1).

Dla $p<1$ otrzymujemy $y=(\sqrt{x+1}-\sqrt{C})^2$ (krzywa K_2).

Suma $K_1\cup K_2$ jest parabolą $(x+1-y+C)^2=4C(x+1)$.
W przypadku $C<0$ analogiczny wynik uzyskujemy w obszarze $\{x+1<0,\ y<0\}$.
R o z w i ą z a n i a l i n i o w e.
Dla $p=1$ mamy $y=x+1$ (oś parabol).
Dla $p=0$ mamy $y=0$ (obwiednia parabol).

c) $y=-\ln(e^{-x}-C)$, $C\leqslant 0$, $x\in\mathscr{R}$, $C>0$, $x<-\ln C$; dla $C=0$ otrzymujemy rozwiązanie liniowe $y=x$.

d) $x=Ce^{-p}-2p+2$, $y=Ce^{-p}(1+p)-p^2+2$. Te dwa równania określają rozwiązanie $y(x,C)$ za pomocą parametru p. Wyrugowanie p jest nieelementarne. Rozwiązań liniowych nie ma.

15.42. **a)** $y=x+2e^x-e^{-2x}$ **b)** $y=x+\dfrac{1-e^2}{1-e^3}e^x+\dfrac{e^2-e^3}{1-e^3}e^{-2x}$

15.43. **a)** $y=x^4+Ax+B;\ A,\ B,\ x\in\mathscr{R}$
b) $y=e^x+Ax+B;\ A,\ B,\ x\in\mathscr{R}$
c) $y=-\ln|\cos x|+Ax+B;\ A,\ B\in\mathscr{R},\ x\neq\pi/2+k\pi,\ k\in\mathscr{Z}$
d) $y=-\ln|x|+Ax+B;\ A,\ B\in\mathscr{R},\ x\neq 0$

15.44. **a)** $y=x^3+2x+1$ **b)** $y=-\sin x+1$

c) $y=x\ln x-2x+5$ **d)** $y=\dfrac{4}{15}x^2\sqrt{x}+x$

15.45. **a)** $y=\dfrac{4}{3}x\sqrt{x}+x-3$ **b)** $y=7x-9$

c) $y=-x\ln|x|+x$ **d)** $y=\operatorname{sh}x-x\operatorname{sh}1$

15.46. **a)** $y=Ae^x+B;\quad A,\ B,\ x\in\mathscr{R}$
b) RO: $y=B-\ln|x-A|;\ A,\ B\in\mathscr{R},\ x\neq A$; RD: $y=C;\ C,\ x\in\mathscr{R}$
c) Wyrażenie $y=Ax^2+B;\ A,\ B\in\mathscr{R}$ jest rozwiązaniem dla wszystkich x oraz rozwiązaniem ogólnym dla $x\neq 0$.

d) $y=A\ln|x|+B;\ A,\ B\in\mathscr{R},\ x\neq 0$
e) $y=A/x+B;\ A,\ B\in\mathscr{R},\ x\neq 0$
f) $y=Ae^{-x}+x+B;\ A,\ B,\ x\in\mathscr{R}$
g) $y=\pm\dfrac{2}{3}(x-A)\sqrt{x-A}+B;\ A,\ B\in\mathscr{R},\ x>A$
h) RO: $y=A-\cos(x+B);\ A,\ B\in\mathscr{R},\ |x+B|<\pi/2$;
RD: $y=\pm x+C,\ C\in\mathscr{R}$

15.47. **a)** $y=A+Be^x;\ A,\ B,\ x\in\mathscr{R}$
b) $y=-\ln|Ax-B|,\ A\neq 0,\ B\in\mathscr{R},\ x\neq B/A;\ A=0,\ B\neq 0,\ x\in\mathscr{R}$; wynik ten jest zgodny z odpowiedzią do zad. 15.46b.
c) $y=Be^{Ax};\ A,\ B,\ x\in\mathscr{R}$
d) RO: $y=1-1/(Ax+B),\ A\neq 0,\ B\in\mathscr{R},\ x\neq -B/A;\ A=0,\ B\neq 0,\ x\in\mathscr{R}$; RD: $y=1,\ x\in\mathscr{R}$
e) Porównać odpowiedź do zad. 15.46h.
f) $y=A(x+B)^2/4+1/A;\ A\neq 0,\ B\in\mathscr{R},\ x\in\mathscr{R}$

15.48. **a)** $y=B\ \exp(x^3+Ax);\ A,\ B,\ x\in\mathscr{R}$
b) $y=B\ \exp(Ax^2);\ A,\ B,\ x\in\mathscr{R}$
c) $y=B\ x\exp(A/x);\ A,\ B\in\mathscr{R},\ x\neq 0$
d) $y=B\ \exp(A\sqrt{|x|});\ A,\ B\in\mathscr{R},\ x\neq 0$
e) $y=B\sqrt{|x|}\exp(Ax);\ A,\ B\in\mathscr{R},\ x\neq 0$

15.49. **a)** $y^2=x^3+Ax+B;\ A,\ B\in\mathscr{R}$
b) Wyrażenie $y=\pm\sqrt{Ax^4+B}$ jest rozwiązaniem ogólnym w obszarze $\{x>0,\ y>0,\ y'>0\}$ i w analogicznych obszarach. Nadto istnieje RD: $y=0,\ x\in\mathscr{R}$.
c) $y=B\exp(x^3/6+Ax);\ A,\ B,\ x\in\mathscr{R}$
d) $y^2=2x+A\ln|x|+B;\ A,\ B\in\mathscr{R}$
e) $y=\pm\dfrac{2}{3}(x+A)^{3/2}+B;\ A,\ B\in\mathscr{R};\ x>-A$
f) $y=Ax^2+B;\ A\neq 0,\ B\in\mathscr{R},\ x\neq 0$

15.50. **a)** $r^2-2r-3=0,\ \Delta=16,\ r_1=3,\ r_2=-1,\ y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$
b) $r^2-4r+4=0,\ \Delta=0,\ r_0=2,\ y=(C_1+C_2x)e^{2x}$

c) $r^2-2r+5=0$, $\Delta=-16$, $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-16}=\sqrt{-1}\,\sqrt{16}=$
$=i\sqrt{16}=4i$,
$r=\dfrac{2+4i}{2}=1+2i$; $e^{rx}=e^{(1+2i)x}=e^xe^{2ix}=$
$=e^x(\cos 2x+i\sin 2x)$, $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

15.51. a) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ b) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$
c) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$ d) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$
e) $y=e^{-x/2}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$
f) $y=C_1+C_2e^{3x}$

15.52. a) $y=x+2+C_1e^x+C_2e^{6x}$
b) $y=2e^{3x}+C_1e^x+C_2e^{2x}$
c) $y=2\sin x+\cos x+e^{3x/5}\,(C_1\cos 4x/5+C_2\sin 4x/5)$
d) $y=e^{2x}(\sin 3x+\cos 3x)+C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$
e) $y=x^3-6x+C_1\cos x+C_2\sin x$
f) $y=xe^x+C_1e^x+C_2e^{-2x}$
g) $y=\sin 2x-2\cos 2x+e^{-x/2}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{19}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{19}}{2}x\right)$
h) $y=\dfrac{1}{4}x\sin 2x-\dfrac{1}{2}x^2\cos 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$
i) $y=x^3e^x+(C_1+C_2x)e^x$
j) $y=e^{2x}+x^2+1+(C_1+C_2x)e^{5x}$
k) $y=e^x+e^{-x}+e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$
l) $y=x+\sin x+e^{-x/2}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$
m) $y=3\sin x+\dfrac{12}{5}\sin 2x-\dfrac{4}{5}\cos 2x+\sin 3x+$
$+e^{x/4}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{15}}{4}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{15}}{4}x\right)$
n) $y=\dfrac{1}{16}(8x+1)e^x+\dfrac{1}{625}(150x^2+355x+46)e^{2x}+$
$+(C_1+C_2x)e^{-3x}$

15.53. a) $y=-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|+C_1\cos x+C_2\sin x$, $x\neq k\pi$
b) $y=-e^{2x}\cos e^{-x}+C_1e^x+C_2e^{2x}$
c) $y=x^2e^x\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\ln x\right)+(C_1+C_2x)e^x$, $x>0$
d) $y=(x\,\mathrm{arctg}\,x-\ln\sqrt{x^2+1})e^x+(C_1+C_2x)e^x$

15.54. a) $y=-\dfrac{1}{5}+e^x$ b) $y=\left(\dfrac{3}{2}x^2+x+1\right)e^{2x}$
c) $y=\dfrac{1}{3}\sin x-\cos 2x+\sin 2x$ d) $y=1+e^x-xe^{2x}+2e^{3x}$
e) $y=\dfrac{1}{2}xe^x\sin x$ f) $y=\cos x+4\sin x-\cos x\ln\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$
g) $y=e^{-x}(1-x+x\ln x)$

15.55. a) $y=x(C_1\sin x+C_2\cos x)$
b) $y=\dfrac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})$, $x\neq 0$
c) $y=C_1x+C_2\left(x\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|-2\right)$, $|x|\neq 1$
d) $y=C_1xe^x+C_2xe^x\displaystyle\int\frac{1}{x^2e^x}\,dx$ (całka nieelementarna)

15.56. a) $y=x+x(C_1\sin x+C_2\cos x)$
b) $y=xe^x+x(C_1\sin x+C_2\cos x)$
c) $y=x+\dfrac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})$, $x\neq 0$
d) $y=e^x-\dfrac{1}{x}\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})=e^x+\dfrac{1}{x}(Ce^x+C_2e^{-x})$,
$C=C_1-1/2$, $x\neq 0$

15.57. a) $y=C_1x+C_2/x$
b) $y=(C_1+C_2\ln x)/x^2$
c) $y=C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x$
d) $y=x^3(C_1+C_2\ln x)$

e) $y = x(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x)$
f) $y = C_1x + C_2x^2$

15.58. a) $y = x^3 + C_1x + C_2/x$
b) $y = 1/x + (C_1 + C_2\ln x)/x^2$
c) $y = \ln x + C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x$
d) $y = x^2 + x^3(C_1 + C_2\ln x)$
e) $y = \sqrt{x} + x(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x)$
f) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1 + C_1x + C_2x^2$

15.59. a) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + C_3e^x$
b) $y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x$
c) $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-3x}$
d) $y = C_1e^x + e^{-3x}(C_2\cos 4x + C_3\sin 4x)$
e) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{3x} + C_4e^{-3x}$
f) $y = C_1 + C_2e^{-2x} + C_3e^{-x} + C_4e^x$
g) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$
h) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} + C_3e^x + C_4e^{3x} + C_5e^{4x}$
i) $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\cos x + (C_4 + C_5x + C_6x^2)\sin x$

15.60. a) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + C_3e^x + e^{2x}$
b) $y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x + x^3 + 2x^2 - x + 1$
c) $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-3x} + 2x + \sin x$
d) $y = C_1e^x + e^{-3x}(C_2\cos 4x + C_3\sin 4x) + xe^x$
e) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{3x} + C_4e^{-3x} + \dfrac{1}{9}x^4 + \dfrac{40}{27}x^2 - \dfrac{962}{243}$
f) $y = C_1 + C_2e^{-2x} + C_3e^{-x} + C_4e^x + e^x\sin x$
g) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x + 2e^{-3x}$
h) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} + C_3e^x + C_4e^{3x} + C_5e^{4x} + \dfrac{1}{340}\sin x -$
$-\dfrac{1}{85}\cos x$
i) $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\cos x + (C_4 + C_5x + C_6x^2)\sin x + 1 +$
$+\dfrac{1}{8}\operatorname{sh} x$

15.61. a) $y = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2)$
b) $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{2x}$
c) $y = C_1e^{-x} + e^{2x}(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x)$

d) $y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$
e) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} + C_4e^{-3x}$
f) $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + C_4e^{2x}$
g) $y = (C_1 + C_2x)e^x + (C_3 + C_4x)e^{-x}$
h) $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + C_3\sin 2x + C_4\cos 2x$

15.62. a) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x} + x^3 + x$
b) $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + C_3e^{3x} + \sin 2x$
c) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x + e^x(\sin x + \cos x)$
d) $y = C_1 + C_2e^{-x} + (C_3 + C_4x)e^x + x^2e^x$
e) $y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x + x + e^{-2x}$
f) $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3\cos x + C_4\sin x + xe^x + \sin 2x$

15.63. a) $y = \left(1 + 2x - \dfrac{1}{8}x^2\right)\sin x$
b) $y = xe^x + e^{-x} + x - \dfrac{1}{4}\sin x$

15.64. a) $y = C_1x + C_2(2x^2 - 1)$
b) $y = C_1\sin x + C_2\left(1 - \sin x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right|\right)$

15.65. a) $y = \dfrac{1}{2}e^x + \dfrac{1}{x}(C_1e^{-x} + C_2e^x)$
b) $y = C_1x^3 + C_2(x+1) - x$

15.66. a) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ b) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$
c) $y''\sin 2x - 2y'\cos 2x = 0$

15.67. a) $y''' - y'' - y' + y = 0$ b) $xy''' - y'' - xy' + y = 0$

15.68. a) $y^{IV} + y'' = 0$ b) $y^{IV} = 0$

15.69. a) RO: $u - 10 = Ce^{-kt}$. Po podstawieniu $u = 100$, $t = 0$ otrzymujemy $C = 90$. Po podstawieniu $u = 60$, $t = 5$ otrzymujemy $k = 0{,}1176$. Zatem $u - 10 = 90e^{-0{,}1176t}$. Podstawiamy $u = 20$, skąd otrzymujemy $t = 18{,}68$ min. Odpowiedź: 13,68 min.

15.70. $R = 1/(C\ln 2)$

15.71. a) $T=\frac{2m}{k}\sqrt{v_0}$, $S=\frac{2m}{3k}\sqrt{v_0^3}$ b) $T=\infty$, $S=\frac{m}{k}v_0$

c) $T=S=\infty$

15.72. $T=\sqrt{\frac{m}{kg}}\,\mathrm{arctg}\left(v_0\sqrt{\frac{k}{mg}}\right)$, $\lim\limits_{v_0\to\infty}T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{kg}}$

$S=\frac{m}{k}\ln\sec\left(T\sqrt{\frac{kg}{m}}\right)$, $\lim\limits_{v_0\to\infty}S=\infty$

15.73. $X=\sqrt{\frac{m}{kg}}\,\mathrm{arch}\,e^{kS/m}$, $\lim\limits_{S\to\infty}X=\infty$

$Y=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\mathrm{tharch}\,e^{kS/m}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\sqrt{1-e^{-2kS/m}}$, $\lim\limits_{S\to\infty}Y=\sqrt{\frac{mg}{k}}$

15.74. $t_1=d\frac{1/v_1-1/v_0}{\ln(v_0/v_1)}$, $k=\frac{m}{d}\ln(v_0/v_1)$

15.75. a) $x=\mathrm{ch}\,t$ b) $x=\cos t$ c) $x=\sqrt{1+t^2}$ d) $x=\sqrt{1-t^2}$

15.76. a) $x=a\cos t$ b) $x=ae^{-3t/5}\left(\frac{3}{4}\sin\frac{4t}{5}+\cos\frac{4t}{5}\right)$

c) $x=ae^{-4t/5}\left(\frac{4}{3}\sin\frac{3t}{5}+\cos\frac{3t}{5}\right)$

d) $x=a(t+1)e^{-t}$ e) $x=\frac{a}{3}(e^{-2t}+2e^{-t/2})$

15.77. a) $\ddot{x}=-c/x^2$, $\dot{x}=y(x)$, $\ddot{x}=y\frac{dy}{dx}=-c/x^2$, $y^2=2c/x+A$, $A=2c/a$, $\frac{dx}{dt}=y=-\sqrt{2c}\sqrt{1/x-1/a}$ (minus, bo $\dot{x}<0$), stąd równanie $\sqrt{x/(a-x)}\,dx=-\sqrt{2c/a}\,dt$, które całkujemy, podstawiając $\sqrt{x/(a-x)}=1/u$, i jego całka

$$-\sqrt{x(a-x)}-a\,\mathrm{arctg}\sqrt{(a-x)/x}=-t\sqrt{2c/a} \qquad (1)$$

Pozostałe wyniki podajemy w tabeli, w której $h=a\sqrt{a}/\sqrt{8c}$.

x	0	$a/4$	$a/2$	$3a/4$	a
t/h	π	$\sqrt{3}/2+2\pi/3$	$1+\pi/2$	$\sqrt{3}/2+\pi/3$	0
y^2	∞	$6c/a$	$2c/a$	$2c/(3a)$	0

b) $\ddot{x}=-c/x^2$, $\dot{x}=y(x)$, $\ddot{x}=y\frac{dy}{dx}=-c/x^2$, $y^2=2c/x+A$, $A=p^2-2c/b$.

P r z y p a d e k $A<0$, czyli $p^2<2c/b$. Oznaczmy $A=-2c/\alpha$, $\alpha>b$. Mamy $y^2=2c(1/x-1/\alpha)$, $dx/dt=y=\sqrt{2c}\sqrt{1/x-1/\alpha}$. Stąd równanie $\sqrt{x/(\alpha-x)}\,dx=\sqrt{2c/\alpha}\,dt$ i jego całka

$$-\sqrt{x(\alpha-x)}-\alpha\,\mathrm{arctg}\sqrt{(\alpha-x)/x}=t\sqrt{2c/\alpha}-B \qquad (2)$$

gdzie $B=\sqrt{b(\alpha-b)}+\alpha\,\mathrm{arctg}\sqrt{(\alpha-b)/b}$. Ruch punktu M w prawo z prędkością malejącą do 0 kończy się w chwili $t=B\sqrt{\alpha/(2c)}$ w pozycji α, gdzie M zatrzymuje się. Zaczyna się ruch w lewo wg równania (1) z podstawieniem $a=\alpha$.

P r z y p a d e k $A=0$, czyli $p^2=2c/b$. Mamy $y^2=2c/x$, $dx/dt=y=\sqrt{2c/x}$, stąd równanie $\sqrt{x}\,dx=\sqrt{2c}\,dt$ i jego całka

$$x\sqrt{x}=t\sqrt{9c/2}+b\sqrt{b} \qquad (3)$$

Jeśli $t\to\infty$, to $x\to\infty$, $\dot{x}\to 0$. Prędkość $p=\sqrt{2c/b}$ jest najmniejszą prędkością początkową wystarczającą do oddalenia się punktu M z pozycji b do ∞ wbrew przyciąganiu punktu materialnego Z.

P r z y p a d e k $A>0$, czyli $p^2>2c/b$. Oznaczmy $A=2c/\alpha$, $\alpha>0$. Mamy $y^2=2c(1/x+1/\alpha)$, $dx/dt=y=\sqrt{2c}\sqrt{1/x+1/\alpha}$. Stąd równanie $\sqrt{x/(\alpha+x)}\,dx=\sqrt{2c/\alpha}\,dt$ i jego całka

$$\sqrt{x(\alpha+x)}-\frac{\alpha}{2}\ln[2\sqrt{x(\alpha+x)}+2x+\alpha]=t\sqrt{2c/\alpha}+C \qquad (4)$$

gdzie $C=\sqrt{b(\alpha+b)}-\frac{\alpha}{2}\ln[2\sqrt{b(\alpha+b)}+2b+\alpha]$. Jeśli $t\to\infty$, to $x\to\infty$, $\dot{x}\to\sqrt{p^2-2c/b}>0$.

15.78. **a)** $\ddot{x} = c/x^2$, $\quad \dot{x} = y(x)$, $\quad \ddot{x} = y\dfrac{dy}{dx} = c/x^2$, $\quad y^2 = -2c/x + A$, $A = 2c/a$, $\; dx/dt = y = \sqrt{2c/a}\,\sqrt{(x-a)/x}$. Stąd równanie $\sqrt{x/(x-a)}\,dx = \sqrt{2c/a}\,dt$ i jego całka

$$\sqrt{x(x-a)} - \frac{a}{2}\ln\left[2x - a - 2\sqrt{x(x-a)}\right] = t\sqrt{2c/a} - B \qquad (5)$$

gdzie $B = \dfrac{a}{2}\ln a$. Punkt M porusza się w prawo do ∞, tj. $x \nearrow \infty$, przy czym $t \nearrow \infty$, $\dot{x} \nearrow \sqrt{2c/a}$.

b) $\ddot{x} = c/x^2$, $\quad \dot{x} = y(x)$, $\quad \ddot{x} = y\dfrac{dy}{dx} = c/x^2$, $\quad y^2 = -2c/x + A$, $A = p^2 + 2c/b > 2c/b > 0$. Przyjmujemy $A = 2c/\alpha$, $0 < \alpha < b$, zatem $y^2 = 2c(1/\alpha - 1/x)$, $dx/dt = y = -\sqrt{2c}\,\sqrt{1/\alpha - 1/x}$ (minus, bo $\dot{x} < 0$).

Stąd równanie $\sqrt{x/(x-\alpha)}\,dx = -\sqrt{2c/\alpha}\,dt$ i jego całka

$$\sqrt{x(x-\alpha)} - \frac{\alpha}{2}\ln\left[2x - \alpha - 2\sqrt{x(x-\alpha)}\right] = -t\sqrt{2c/\alpha} + C \qquad (6)$$

gdzie $C = \sqrt{b(b-\alpha)} - \dfrac{\alpha}{2}\ln\left[2b - \alpha - 2\sqrt{b(b-\alpha)}\right]$. Punkt M porusza się od pozycji b w lewo do pozycji α, gdzie w chwili $t = \sqrt{\alpha/(2c)}\left(\dfrac{1}{2}\alpha\ln\alpha + C\right)$ zatrzymuje się i zaczyna ruch w prawo wg równania (5) z podstawieniem $a = \alpha$. Jeśli p rośnie do ∞, to α dąży do 0, ale pozostaje > 0 i charakter ruchu nie zmienia się.

Odpowiedzi do rozdziału 16

16.1. **a)** Długość każdego przedziału częściowego $h = 1/n$.

Argumenty (prawe): $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n}$.

Wartości funkcji: $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n}$.

Suma całkowa (8):

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Całka $= \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$.

b) 1/3 $\quad$ **c)** 1/4

16.2. **a)** 1 $\quad$ **b)** 1

16.3. **a)** 8, 4/3, 16, 64/3

b) $e-1$, $(3+e^4)/2$, $4(e^{3/4} - e^{1/4})$, $\dfrac{e}{2}(e^8 - 1)$

c) 2, $\ln\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{3}/2$, $-1/4$

d) $\ln\sqrt{5/2}$, $\pi/4$, $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{4}$, $\ln 2$

16.4. **a)** 26/3 $\quad$ **b)** $2(\sqrt{a} - \operatorname{arctg}\sqrt{a})$ $\quad$ **c)** $a^3/3$ $\quad$ **d)** $\dfrac{1}{3}\ln 2$

e) $a^2\pi/4$ $\quad$ **f)** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ $\quad$ **g)** $\ln\dfrac{2e}{e+1}$ $\quad$ **h)** $\pi/(4ab)$

i) $3\pi/32$ $\quad$ **j)** $a^3(\pi/4 - 2/3)$ $\quad$ **k)** $\pi a^2/2$ $\quad$ **l)** $\pi/6$

16.5. **a)** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{8}{5}$

b) Całka funkcji nieparzystej w przedziale $\langle -a; a\rangle$ jest równa 0.

c) 2 $\quad$ **d)** $\pi/\sqrt{27}$ $\quad$ **e)** $\sqrt{4/5}\operatorname{arctg}\sqrt{1/5}$ $\quad$ **f)** $\ln 3$

g) $2 - 2\ln 2$ $\quad$ **h)** $\pi/(6\sqrt{ab})$ $\quad$ **i)** $\ln\dfrac{7+2\sqrt{7}}{9}$

j) $2(\sqrt{e-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e-1})$ $\quad$ **k)** $\ln 2$

16.6. **a)** 1 $\quad$ **b)** 0 $\quad$ **c)** $\pi/4 - \ln\sqrt{2}$ $\quad$ **d)** 1 $\quad$ **e)** $e-2$

f) $2(\ln^2 2 - \ln 4 + 1)$ $\quad$ **g)** $e/2 - 1$ $\quad$ **h)** $\pi/12 + \sqrt{3}/2 - 1$

16.7. a) $a^3/4$ b) $\dfrac{e^b-e^a}{b-a}$ c) $\dfrac{2}{3}a^2$ d) $2/\pi$ e) 1 f) $-2/\pi$

16.8.

	a)	b)	c)	d)	e)
S_L	0,919403	0,351221	1,381261	0,923806	3,011843
S_P	1,076483	0,420535	1,553089	0,894517	3,109467
S_T	0,997943	0,385878	1,467175	0,909162	3,060655
S_S	1,000003	0,386283	1,462681	0,909607	3,059120
Wartość dokładna	1,000000	0,386294	Całki nieelementarne (zob. s. 13)		

Odpowiedzi do rozdziału 17

17.1. a) $e-1$ b) $32/3$ c) $1/6$ d) $8/3$
e) $8/3$ f) $125/24$ g) $15/8-\ln 4$ h) $\ln 4-1$
i) 2 j) $\ln\sqrt{2}$ k) $\pi/2-1/3$

17.2. a) $a^2\pi$ b) $ab\pi$ c) $3\pi/8$ d) 2π
e) $3/4-\ln 2$ f) $\dfrac{1}{4}(e^2-1/e^2)-1$ g) 3π

17.3. a) $\dfrac{4}{3}\pi^3a^2$ b) $\dfrac{2}{3}a^2/\pi$ c) $\dfrac{a^2}{4m}(e^{4m\pi}-1)$
d) $\dfrac{3}{2}\pi a^2$ e) $a^2/2$ f) $a^2\pi/4$
g) $a^2\pi/2$ h) $a^2\pi/4$ i) $a^2\pi/2$

17.4. a) $ab/2$ b) $ab/2$ c) $a/2$ d) $\ln 3$

17.5. a) $\pi a^2h/3$ b) $\dfrac{4}{3}\pi a^3$ c) $\dfrac{4}{3}\pi a^2b^2$ d) $\pi h^2(a+h/3)$
e) πph^2 f) $\pi^2/4$ g) $3\pi^2/2$ h) $\pi(e^2-1)/2$
i) $\pi h/(h^2+1)+\pi\,\mathrm{arctg}\,h$

17.6. a) $\pi a\sqrt{a^2+h^2}$ b) $4\pi a^2$ c) $\dfrac{2}{3}\pi[\sqrt{p}(\sqrt{2h+p})^3-p^2]$

d) $\pi[2\sqrt{2}+\ln(3+2\sqrt{2})]$ e) $\dfrac{\pi}{27}(\sqrt{1000}-1)$

f) $\pi[e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{1+e^2}-e)+\ln(\sqrt{2}-1)]$

g) Oznaczamy $k=c^4/(a^2+c^2)$; otrzymujemy

$$S=\frac{\pi a}{k}\left(h\sqrt{h^2+k}+k\ln|h+\sqrt{h^2+k}|-k\ln\sqrt{k}\right)$$

17.8. a) $V=4\pi a^3/3,\quad S=4\pi(1+1/\sqrt{2})a^2$
b) $V=\pi(\pi-4/3)a^3,\quad S=2\pi(\pi-2)a^2$
c) $V=\pi(\pi+4/3)a^3,\quad S=2\pi(\pi+2)a^2$

17.9. a) $\sqrt{5}/2+\dfrac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$ b) $\ln(2+\sqrt{3})$

c) $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(\sqrt{1+e^2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{1+e^2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

d) $\ln 3-1/2$

e) $y'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}\,x},\quad L=\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}\,dx=\ln\left(e+\frac{1}{e}\right)$

f) $L=\displaystyle\int_{1/8}^{4/5}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx,\quad \sqrt{\frac{x+1}{x}}=t,$

$$L=\int_3^{3/2}\frac{-2t^2\,dt}{(t^2-1)^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}+\frac{33}{40}=1{,}283$$

Cięciwa łącząca końce tej krzywej ma długość 1,274.

17.10. a) $\dfrac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right]$
b) $a(e^{2m\pi}-1)\sqrt{1+m^2}/m$ c) $a\pi$ d) $8a$

17.11. Są to całki nieelementarne (*Zarys II*, s. 14 i 40)

a) $\int\limits_0^{2\pi} a\sqrt{1+3\cos^2 2\varphi}\,d\varphi$ b) $\int\limits_0^{\pi} a\sqrt{1+8\cos^2 3\varphi}\,d\varphi$

c) $\int\limits_0^{2\pi} a\sqrt{1+15\cos^2 4\varphi}\,d\varphi$

17.12. a) $13/3$ b) $8a$ c) $a\pi^2/2$

17.13. a) 4 b) 12 c) 2π d) 2

e) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{t^2+2}\,dt = \sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$

f) $\int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{4t^2+1}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\ln(\sqrt{3}+2)$

Odpowiedzi do rozdziału 18

18.1. a) 2 b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) ∞ e) $3/2$ f) 3 g) ∞
h) $\pi/2$ i) 1 j) $8/3$ k) 1 l) -1 m) e^2 n) $16/3$

18.2. a) $1/2$ b) 2 c) ∞ d) ∞ e) $1/2$ f) $\pi/4+\frac{1}{2}\ln 2$
g) $1/2$ h) $b/(a^2+b^2)$ i) $\pi/(2\sqrt{2})$ j) $-1/8$ k) $1/a$
l) $1/3$ m) $1/4$ n) e o) -1 p) $\frac{2}{3}\ln 2$ q) $1/\sqrt{2}$
r) całka rozbieżna s) $1/2$

18.3. a)

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^r}\,dx = \begin{cases} \text{dla } r<1 & = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_{x\to 0+0}^{x=1} = \frac{1}{1-r}-0=\frac{1}{1-r} \\ \text{dla } r=1 & = \Big[\ln x\Big]_{x\to 0+0}^{x=1} = 0-(-\infty)=\infty \\ \text{dla } r>1 & = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_{x\to 0+0}^{x=1} = \frac{1}{1-r}-(-\infty)=\infty \end{cases}$$

b)

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^r}\,dx = \begin{cases} \text{dla } r<1 & = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_{x=1}^{x\to\infty} = \infty-\frac{1}{1-r}=\infty \\ \text{dla } r=1 & = \Big[\ln x\Big]_{x=1}^{x\to\infty} = \infty-0=\infty \\ \text{dla } r>1 & = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_{x=1}^{x\to\infty} = 0-\frac{1}{1-r}=\frac{1}{r-1} \end{cases}$$

18.4. a) ∞ b) $e-1$ c) $1/e$ d) $1-1/e$

18.5. a) Dla $x>1$ jest $x^2>x$, $e^{-x^2}<e^{-x}$, $\int\limits_1^h e^{-x^2}dx<\int\limits_1^h e^{-x}dx$,

zatem $\int\limits_1^\infty e^{-x^2}dx \leqslant \int\limits_1^\infty e^{-x}dx = [-e^{-x}]_1^\infty = 1/e$

b) Dla $x>1$ jest $1/\sqrt{1+x^3}<1/\sqrt{x^3}$, zatem

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \leqslant \int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = 2$$

c) Dla $1<x<e$ wykres funkcji $y=\ln x$ leży pod styczną $y=x-1$ (narysować) i mamy $0<\ln x<x-1$ oraz $1/\ln x>1/(x-1)>0$, zatem dla $1<h<e$ mamy

$$\int\limits_h^e \frac{dx}{\ln x} > \int\limits_h^e \frac{dx}{x-1} = \ln\left|\frac{e-1}{h-1}\right|$$

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{\ln x} \geqslant \int\limits_1^e \frac{dx}{x-1} = \infty$$

d) Dla $1/e<x<1$ wykres funkcji $y=\ln x$ leży nad prostą $y=2x-2$ (narysować) i mamy $2x-2<\ln x<0$ oraz $1/\ln x<1/(2x-2)<0$, zatem dla $1/e<h<1$ mamy

$$\int_{1/e}^{h}\frac{dx}{\ln x}<\int_{1/e}^{h}\frac{dx}{2(x-1)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{h-1}{1/e-1}\right|$$

$$\int_{1/e}^{1}\frac{dx}{\ln x}\leqslant\int_{1/e}^{1}\frac{dx}{2(x-1)}=-\infty$$

18.6. **a)** π **b)** $3\pi/2$ **c)** $\pi/\sqrt{3}$ **d)** rozbieżna **e)** -2 **f)** $3(1+\sqrt[3]{2})$ **g)** $6\sqrt[3]{2}$ **h)** rozbieżna **i)** rozbieżna

18.7. **a)** 2 **b)** π **c)** π **d)** rozbieżna **e)** rozbieżna **f)** 2 **g)** π **h)** $\ln\frac{e+1}{e-1}$ **i)** $\pi-2\operatorname{arctg} e$ **j)** 1 **k)** 1 **l)** rozbieżna **m)** $e-1$ **n)** rozbieżna

18.8. **a)** $\displaystyle\int_2^\infty\frac{dx}{x\ln x}=[\ln\ln x]_{x=2}^{x\to\infty}=\infty$, szereg rozbieżny

b) $\displaystyle\int_2^\infty\frac{dx}{x\ln^2 x}=\left[\frac{-1}{\ln x}\right]_{x=2}^{x\to\infty}=\frac{1}{\ln 2}$, szereg zbieżny

c) zbieżny **d)** rozbieżny **e)** zbieżny **f)** zbieżny

18.9. **a)** $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{s^x}\,ds=\left[\frac{1}{1-x}s^{1-x}\right]_{s=1}^{s\to\infty}=\frac{1}{x-1}$, zbieżny

b) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x^s}\,ds=\left[\frac{-1}{x^s\ln x}\right]_{s=1}^{s\to\infty}=\frac{1}{x\ln x}$, zbieżny

c) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{s}{x^s}\,ds=\left|\begin{array}{c}\text{całkujemy}\\ \text{przez}\\ \text{części}\end{array}\right|=\frac{\ln x+1}{x\ln^2 x}$, zbieżny

Odpowiedzi do rozdziału 19

19.1. **a)** 1 **b)** a^2h **c)** $-2c^2(b-a)$ **d)** $(a^2-1)\ln a$ **e)** $(b^2-a^2)(q^2-p^2)$ **f)** $(e^a-e^b)(e^{-q}-e^{-p})$ **g)** -4 **h)** $1-\cos 1$ **i)** $\ln\sqrt{2}$ **j)** 1 **k)** 0 **l)** 4

19.2. **a)** 104 **b)** $72a^2+32b^2$ **c)** 0

19.3. **a)** $\ln 3\ln 4$ **b)** $\ln\frac{10}{7}$ **c)** $4\sqrt{3}-4$ **d)** $-\frac{2}{3}\ln 4$ **e)** $\ln(2\cdot 10^5/7^7)$ **f)** $\frac{28}{9}(3\sqrt{3}-1)$

19.4. **a)** -16 **b)** 3 **c)** 2 **d)** $(e-1)^2$ **e)** $2/\pi$ **f)** 2

19.5. **a)** 192 **b)** $\ln\frac{9}{8}$ **c)** 2 **d)** $(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}-7)/3$ **e)** 2 **f)** $\ln(2+\sqrt{2})-\ln(1+\sqrt{3})$ **g)** $-\pi/16$

19.6. Nie istnieje, gdyż funkcja podcałkowa jest nieograniczona w sąsiedztwie punktu: **a)** $(-1, 1)$, **b)** $(2, 1/2)$. Wartość całki iterowanej: **a)** 3/8, **b)** $1+\sqrt{3}/4-\pi/3$.

19.7. Rysujemy proste, wyznaczamy ich punkty wspólne, rysujemy obszar (G), rozpoznajemy czy jest to obszar normalny względem Ox, czy względem Oy i zależnie od tego przedstawiamy go w postaci (2) albo (3), piszemy odpowiednią całkę iterowaną i obliczamy ją.

a) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)\,dy=\frac{1}{3}$ **b)** $\displaystyle\int_0^2 dx\int_x^2 y\,dy=\frac{8}{3}$ **c)** ch 1 **d)** 2 **e)** 16

19.8. Postępujemy podobnie jak w poprzednim zadaniu.

a) 1/12 **b)** $1+\ln 2$ **c)** 9/4 **d)** 2 **e)** 9/8 **f)** $20\frac{5}{6}$ **g)** $16\sqrt{2}/3$ **h)** 64/3 **i)** 4/13

19.9. Rysujemy krzywe, wyznaczamy ich punkty wspólne, rysujemy obszar (G), dzielimy go na obszary normalne (G_1), (G_2) (jeśli uznamy to za celowe), obliczamy całki w tych obszarach i dodajemy je.

a) $(G_1) = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ x/2 \leqslant y \leqslant 2x\}$, $(G_2) = \{1 \leqslant x \leqslant 2,\ \ x/2 \leqslant y \leqslant 2/x\}$, $\ln 4$

b) $4/3$ **c)** $5/2$ **d)** $3/2$ **e)** $-61/10$ **f)** $7/12$

g) $-18/5$ **h)** 0 **i)** 24

19.10. **a)** 2 **b)** $125/6$ **c)** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e}$ **d)** $16/3$ **e)** $32/3$

f) $2\sqrt{2}$ **g)** $9/2$ **h)** $\ln 4$ **i)** $9/2$ **j)** $\pi/2 + 1/3$

k) $\pi/4 - 1/6$ **l)** $6 - 4\ln 2$ **m)** $7\ln 2$

19.11. **a)** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_y^2 f(x,y)\,dx$

b) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$

c) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,ds + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$

d) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2/2} f(x,y)\,dy + \int\limits_2^{2\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\,dy$

e) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{y^2/4} f(x,y)\,dx + \int\limits_4^8 dy \int\limits_0^{8-y} f(x,y)\,dx$

f) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{y/2} f(x,y)\,dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x,y)\,dx$

g) $\int\limits_{-4}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{x+4}}^0 f(x,y)\,dy$

h) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx + \int\limits_2^{2\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\,dx$

i) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_1^y f(x,y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{y/2}^2 f(x,y)\,dx$

j) $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{1+x} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,dy$

k) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx$

l) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$

m) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx$

n) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$

19.12. **a)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)\,dx$ **b)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx$

c) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx$

19.13. Oprócz oszacowania całki podajemy wartość całki, a niekiedy także numer zadania, w którym ta całka występuje. Całkę oznaczamy literą I.

a) $m = 1$, $M = 4$, $G = 2$, $2 \leqslant I \leqslant 8$, $I = 5$

b) $m = 0$, $M = 96$, $G = 12$, $0 \leqslant I \leqslant 1152$, $I = 192$; 19.5a

c) $m = 0$, $M = a^2$, $G = \pi a^2$, $0 \leqslant I \leqslant \pi a^4$, $I = \pi a^4/2$

d) $m = 9$, $M = 25$, $G = 4\pi$, $36\pi \leqslant I \leqslant 100\pi$, $I = 56\pi$

e) $m = 0$, $M = 1$, $G = 1$, $0 \leqslant I \leqslant 1$, $I = 0{,}2231$; 19.5f

f) $m = 0$, $M = 2$, $G = 1$, $0 \leqslant I \leqslant 2$, $I = 0{,}4506$; 19.5d

g) Wprowadzając współrzędne biegunowe $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, otrzymujemy $f(x,y) = r^2\sin 4\varphi$, $(G) = \{0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4\}$, $m = 0$, $M = a^2$, $G = \pi a^2/8$, $0 \leqslant I \leqslant \pi a^4/8$, $I = a^4/8$.

19.14. **a)** 3 **b)** $38/3$ **c)** $3/2$

19.15. **a)** półokrąg $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$

b) półkole $x^2+y^2 \leqslant 1, \quad y \geqslant 0$
c) wycinek koła $x^2+y^2 \leqslant 1, \quad |y| \leqslant x$
d) pierścień kołowy $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9$
e) prosta $x=1$
f) odcinek $x=1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$
g) trójkąt $0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant x$
h) okrąg $x^2+(y-1)^2=1$
i) koło $x^2+(y-1)^2 \leqslant 1$
j) koło $x^2+(y-3/2)^2 \leqslant 9/4$
k) różnica dwóch poprzednich kół.

19.16. **a)** $r=1, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ **b)** $r=1, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
c) $0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ **d)** $1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
e) $0 \leqslant r \leqslant 1, |\varphi| \leqslant \pi/2$ **f)** $0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$
g) $r \geqslant 0, |\varphi| \leqslant \pi/4,$ **h)** $r \geqslant 0, |\varphi| \leqslant \operatorname{arctg} 5$
i) $r \geqslant 0, \varphi = \pi/4$ **j)** $r \geqslant 0, \varphi = 5\pi/4$
k) $3\sqrt{2} \leqslant r \leqslant 5\sqrt{2}, \varphi = \pi/4$ **l)** $r \geqslant 0, \varphi = \operatorname{arctg} m$
m) $3 \leqslant r/\sqrt{1+m^2} \leqslant 5, \varphi = \operatorname{arctg} m$
n) $r = 2c\sin\varphi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ **o)** $0 \leqslant r \leqslant 2c\sin\varphi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$
p) $r = 1/(\cos\varphi+\sin\varphi), -\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/4$
r) $r = 1/(\sin\varphi - m\cos\varphi), \operatorname{arctg} m \leqslant \varphi \leqslant \pi + \operatorname{arctg} m$
s) $r = 1/(1-\cos\varphi), 0 < \varphi < 2\pi$

19.17. **a)** $\pi a^4/2$ **b)** πe **c)** π **d)** $[(1+a^2)\ln(1+a^2)-a^2]\pi/4$
e) 56π **f)** π^2 **g)** $\pi(\pi-2)/8$ **h)** $a^4/8$ **i)** $32/9$ **j)** $2/3$
k) $2/3$ **l)** $1/12$ **m)** $(\sqrt{2}-1)/3$

19.18. **a)** $a^2/2$ **b)** $a^2\pi/8$ **c)** $3a^2\pi/2$ **d)** $a^2(2+\pi/4)$
e) $a^2(2-\pi/4)$ **f)** $a^2(4\pi/3-\sqrt{3})$ **g)** $8\pi+9\sqrt{3}$
h) $m^3/6$ **i)** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{b}{a}$

19.19. **a)** 28 **b)** 81π

19.20. **a)** $4ck^2, c \geqslant k(|a|+|b|)$ **b)** $\pi ck^2, c \geqslant k\sqrt{a^2+b^2}$

19.21. **a)** $16/9$ **b)** $\pi/2$ **c)** $\pi/3$ **d)** $2/3$

19.22. **a)** $|abc|/6$ **b)** 12 **c)** $152/3$
d) $13/96$ **e)** $72/5$ **f)** $88/105$

19.23. **a)** 4π **b)** $8/9$ **c)** $6\pi-9\sqrt{3}/2$ **d)** $128\sqrt{2}/15$
e) $V_1 = 14\pi$, $V_2 = 18\pi$

19.24. **a)** $16a^3/3$ **b)** $2\pi h^2(3a-h)/3$ **c)** $2a^3(3\pi-4)/9$

19.25. **a)** $\sqrt{26}$ **b)** $\sqrt{a^2+b^2+1}$ **c)** $\sqrt{2}$
d) $2\pi(\sqrt{8}-1)/3$ **e)** $\pi(5\sqrt{5}-1)/6$ **f)** $14\pi/3$
g) 13 **h)** 20π **i)** $4\sqrt{2}a^2/3$
j) $\pi a^2/2$ **k)** $4a^2$
l) $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]/2$ **m)** $a^2(\pi-2)$

19.26. **a)** $4a^2$ **b)** $(\beta-\alpha)\dfrac{1}{2}[a\sqrt{a^2+b^2}+b^2\ln(a/b+\sqrt{a^2+b^2}/b)]$
c) $(\beta-\alpha)a^2(\cos\gamma-\cos\delta)$ **d)** $a^2(\pi-2)$ **e)** $2\pi A \cdot 2\pi a$

19.27. **a)** 1 **b)** $4/3$ **c)** $\pi/4$ **d)** π **e)** $\pi^2/4$ **f)** π^2
g) 0 (antysymetria funkcji względem prostej $y=x$)
h) $9/8$ **i)** $\pi/2+\ln 2$

19.28. **a)** $3/8$ **b)** $1+\sqrt{3}/4-\pi/3$

19.29. **a)** $2\pi a$ **b)** $3\pi a^{2/3}$ **c)** $4\pi a^{1/2}$ **d)** $\pi a^2(\ln a-1/2)$
e) $2\pi a(\ln a-1)$ **f)** $2\pi a(\ln a-1)$ **g)** $2\pi a$ **h)** π^2

19.30. **a)** π **b)** 2π **c)** π **d)** π

19.31. **a)** 2 **b)** $1/4$

19.32. **a)** 1 **b)** $2/3$ **c)** $\pi^2/4$ **d)** $\pi/4$

19.34. 6π

19.35. **a)** $15\pi/2$ **b)** 4π

19.36. **a)** $(\Omega) = \{0 \leqslant u \leqslant 1, |v| \leqslant k\}$, $k = \operatorname{arctg}(ma/b)$, całka $= abk/2$
b) $(\Omega) = \{0 \leqslant u \leqslant 1, |v| \leqslant \pi/4\}$, całka $= ab/4$

19.37. $\dfrac{3}{2}a^2\ln 2$

19.38. $\frac{2}{3}\ln 2$

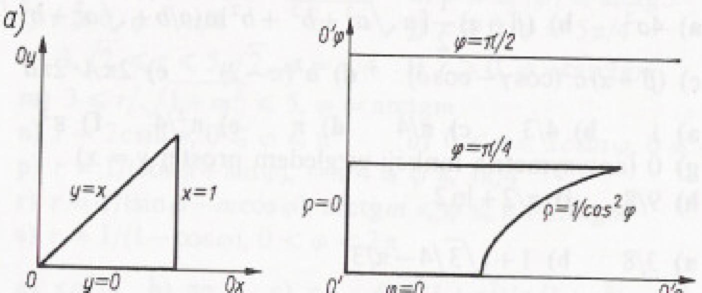
19.39. $1/3$

19.40. $G = \ln(s+\sqrt{s^2-1}),\quad G_x = \frac{2}{3}\sqrt{s^2-1},$

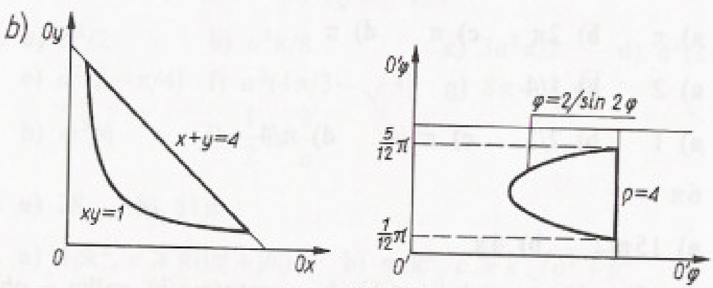
$G_{xx} = \frac{1}{4}[\ln(s+\sqrt{s^2-1})+s\sqrt{s^2-1}]$

19.41. **a)** $(e-1)/2$ **b)** $\frac{1}{2}\ln 2$ **c)** $\pi/6$ **d)** $\pi/12$ **e)** 0
f) $\pi/2$ **g)** 1

19.42. **a)** $1/8$ (rys. 19.42a) **b)** $2\sqrt{3}-2\pi/3$ (rys. 19.42b)

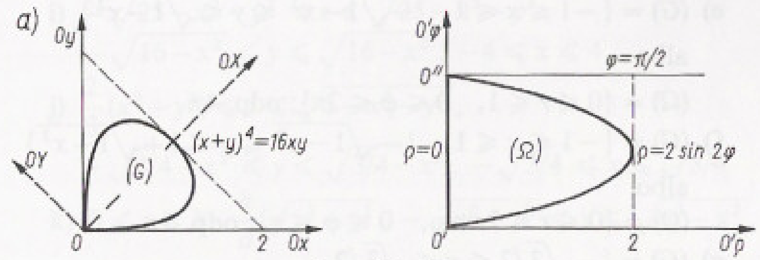


Rys. 19.42 a



Rys. 19.42 b

19.43. **a)** $\varrho=0,\ \varrho=2\sin 2\varphi,\ G=4/3$ (rys. 19.43a)
b) $\varrho=0,\ \varrho=2\sin^2 2\varphi,\ G=16/15$



Rys. 19.43 a

Odpowiedzi do rozdziału 20

20.1. **a)** 18 **b)** 4 **c)** $3+e^{-2}-3e^{-1}-e$ **d)** $6(\sqrt{2}-1)$
e) 10 **f)** 1

20.2. **a)** $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{x+y} z\,dz = 7/24$ **b)** $1/12$
c) $-1/6$ **d)** $1/12$ **e)** $1/4$
f) $\int_0^1 dy\int_0^y dz\int_z^y z\,dx = 1/24$ **g)** $\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_z^y z\,dx = 1/24$
h) $\int_{-1}^0 dx\int_0^1 dz\int_x^0 z\,dy = \int_0^1 dz\int_{-1}^0 dx\int_x^0 z\,dy = 1/4$
i) $\int_0^1 dy\int_0^y dz\int_z^y z\,dx = 1/24$ **j)** $\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_{z-x}^{z+x} z\,dy = 1/4$
k) $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^x z\,dz = \int_0^1 dx\int_0^x dz\int_0^x z\,dy = 1/8$

20.3. Stosujemy wzór (7). Całkowanie względem z, jednakowe dla zadań a) – g), daje wynik $x+y+4$. Całkowanie względem x, y jest zależne od obszaru (G).
a) $(G)=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1\}$; odp. 5.
b) $(G)=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ \ 0\leqslant y\leqslant 2-x\}$; odp. $32/3$.

c) $(G) = \{-y \leqslant x \leqslant 2-2y,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$; odp. 28/3.
d) $(G) = \{-2 \leqslant x \leqslant 2,\ \ -x \leqslant y \leqslant 1-x/2\}$; odp. 56/3.
e) $(G) = \{-1 \leqslant x \leqslant 1,\ \ -\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\}$
albo
$(\Omega) = \{0 \leqslant r \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$; odp. 4π.
f) $(G) = \{-1 \leqslant x \leqslant 1,\ \ 1-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant 1+\sqrt{1-x^2}\}$
albo
$(\Omega) = \{0 \leqslant r \leqslant 2\sin\varphi,\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$; odp. 5π.
g) $(G) = \{-\sqrt{3}/2 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}/2,$
$1-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\}$; odp. $3\pi-9\sqrt{3}/4$.

20.4. a) $e-1/e-2$ b) $4-e-1/e$ c) $2e+4/e-4$

20.5. 2π

20.6. a) 10/3 b) 16/3 c) $7\pi/2$ d) $9\pi/2$

20.7. a) $0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ \ 1 \leqslant z \leqslant 2$
b) $0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ \ 1 \leqslant z \leqslant 2+x/2$
c) Z układu równań: $z = 2+\frac{1}{2}x$, $z = 1$ otrzymujemy $x = -2$; stąd $-2 \leqslant x \leqslant 0,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ \ 1 \leqslant z \leqslant 2+x/2$.
d) Z układu równań: $z = 2x$, $z = 0$ otrzymujemy $x = 0$; stąd $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 2x$.
e) Z równania $x^2+y^2 = 16$ otrzymujemy $y = \pm\sqrt{16-x^2}$ dla $|x| \leqslant 4$; stąd $-4 \leqslant x \leqslant 4,\ -\sqrt{16-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{16-x^2}$, $0 \leqslant z \leqslant 5$.
f) Z układu równań: $x^2+y^2 = z^2$, $z = 6$ otrzymujemy $x^2+y^2 = 36$. Jest to równanie okręgu ograniczającego rzut (V) na Oxy. Stąd $-6 \leqslant x \leqslant 6,\ -\sqrt{36-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{36-x^2}$. Dla zmiennej z mamy nierówność $z_{\text{stożka}} \leqslant z \leqslant z_{\text{płaszczyzny}}$, tj. $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 6$.
g) $-\sqrt{25-x^2-y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{25-x^2-y^2}$,
$-\sqrt{25-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{25-x^2}, -5 \leqslant x \leqslant 5$
h) $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{25-x^2-y^2}$,
$-\sqrt{25/2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{25/2-x^2},\ -5/\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 5/\sqrt{2}$

i) $-\sqrt{25-x^2-y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{25-x^2-y^2}$,
$-\sqrt{16-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{16-x^2},\ -4 \leqslant x \leqslant 4$
j) $\frac{2}{3}(x^2+y^2) \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$,
$-\sqrt{3/4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{3/4-x^2},\ -\sqrt{3/4} \leqslant x \leqslant \sqrt{3/4}$
k) $0 \leqslant z \leqslant h-\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2},\ -\sqrt{a^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2-x^2}$,
$-a \leqslant x \leqslant a$

20.8. a) $a^5/4$ b) $a^6/48$ c) 40/3 d) 2/3 e) 83/420
f) 162 g) 128/21 h) $a^4/12$ i) $-5/16+\ln\sqrt{2}$

20.9. a) 7/15 b) $3\pi/2$ c) $\pi/12$ d) 45 e) 4π f) $\pi/6$
g) 1/2 h) $47\pi/24$ i) $\pi(8\sqrt{2}-7)/6$

20.10. Oznaczenia: I — całka, u — funkcja podcałkowa.
a) Z określenia (V) wynika: $3 \leqslant x+y+z \leqslant 9$. Przyjmujemy $m = 3$, $M = 9$. Otrzymujemy $V = 8$. Odp. $24 \leqslant I \leqslant 72$.
b) Funkcja u ma minimum własne $u_{\min} = 0$ dla $x = y = z = 0$ oraz maksimum warunkowe na sferze ograniczającej (V) równe $u_{\max} = a^2$. Przyjmujemy $m = 0$, $M = a^2$. Otrzymujemy $V = 4\pi a^3/3$. Odp. $0 \leqslant I \leqslant 4\pi a^5/3$.
c) Sposób 1 (szacowanie u). Z określenia (V) wynika $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$, stąd $|x| \leqslant 1$, $|-2y| \leqslant 2$, $|2z| \leqslant 2$, stąd $|x-2y+2z| \leqslant 5$, czyli $-5 \leqslant x-2y+2z \leqslant 5$. Dodajemy 6 i otrzymujemy $1 \leqslant u \leqslant 11$. Przyjmujemy $m = 1$, $M = 11$. Otrzymujemy $V = 4\pi/3$. Odp. $4\pi/3 \leqslant I \leqslant 44\pi/3$.
Sposób 2 (wyznaczenie ekstremów u). Funkcja u nie ma ekstremów własnych, ale ma ekstrema warunkowe na sferze ograniczającej (V): $u_{\min} = 3$, $u_{\max} = 9$ (*Zadania I*, s. 155, zad. 11.19a). Przyjmujemy $m = 3$, $M = 9$. Odp. $4\pi \leqslant I \leqslant 12\pi$.
d) Sposób 1: $4\pi\sqrt{3}(10-3\sqrt{3}) \leqslant I \leqslant 4\pi\sqrt{3}(10+3\sqrt{3})$.
Sposób 2: $28\pi\sqrt{3} \leqslant I \leqslant 52\pi\sqrt{3}$.

20.11. a) Odcinek $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = z = 0$.

b) Odcinek $0 \leqslant y \leqslant 1$, $x = z = 0$.

c) Odcinek $0 \leqslant z \leqslant 1$, $x = y = 0$.

d) Okrąg $x^2+y^2 = 1$, $z = 0$.

e) Powierzchnia boczna walca $x^2+y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 10$.

f) Walec (pełny) $x^2+y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 10$.

g) Różnica dwóch walców $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant 10$.

h) Koło $x^2+y^2 \leqslant 1$, $z = 1$.

i) Powierzchnia boczna stożka $z = x^2+y^2$ dla $x^2+y^2 \leqslant 1$.

j) Stożek o wierzchołku $(0,0,0)$ i podstawie $x^2+y^2 \leqslant 1$, $z = 1$.

k) Stożek o wierzchołku $(0,0,1)$ i podstawie $x^2+y^2 \leqslant 1$, $z = 0$.

l) Kula $x^2+y^2 \leqslant 4$, $|z| \leqslant \sqrt{4-x^2-y^2}$.

m) Półkula $x^2+y^2 \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{4-x^2-y^2}$.

n) Odcinek kuli $\sqrt{3} \leqslant z \leqslant \sqrt{4-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2 \leqslant 1$.

o) Wycinek kuli $\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{4-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2 \leqslant 1$.

20.12. Przekrój figury płaszczyzną Orz jest przedstawiony na rys. 20.12

a) $0 \leqslant r \leqslant a$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\quad 0 \leqslant z \leqslant h$

b) $0 \leqslant r \leqslant a$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\quad -\sqrt{a^2-r^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2-r^2}$

c) $0 \leqslant r \leqslant b$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\quad -\sqrt{a^2-r^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2-r^2}$

d) $0 \leqslant r \leqslant a$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\quad hr/a \leqslant z \leqslant h$

e) $0 \leqslant r \leqslant a$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\quad 0 \leqslant z \leqslant h-hr/a$

f) $0 \leqslant r \leqslant c$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\quad mr \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2-r^2}$; c jest odciętą punktu przecięcia półokręgu $z = \sqrt{a^2-r^2}$ prostą $z = mr$; $c = a/\sqrt{1+m^2}$

g) $0 \leqslant r \leqslant c$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $mr^2 \leqslant z \leqslant h$; $c = \sqrt{h/m}$

h) $0 \leqslant r \leqslant c$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-a \leqslant z \leqslant h-mr^2$; $c = \sqrt{(a+h)/m}$

i) $0 \leqslant r \leqslant c$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $mr^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2-r^2}$; c jest wartością r spełniającą równanie $mr^2 = \sqrt{a^2-r^2}$; $c^2 = (-1+\sqrt{1+4a^2m^2})/(2m^2)$

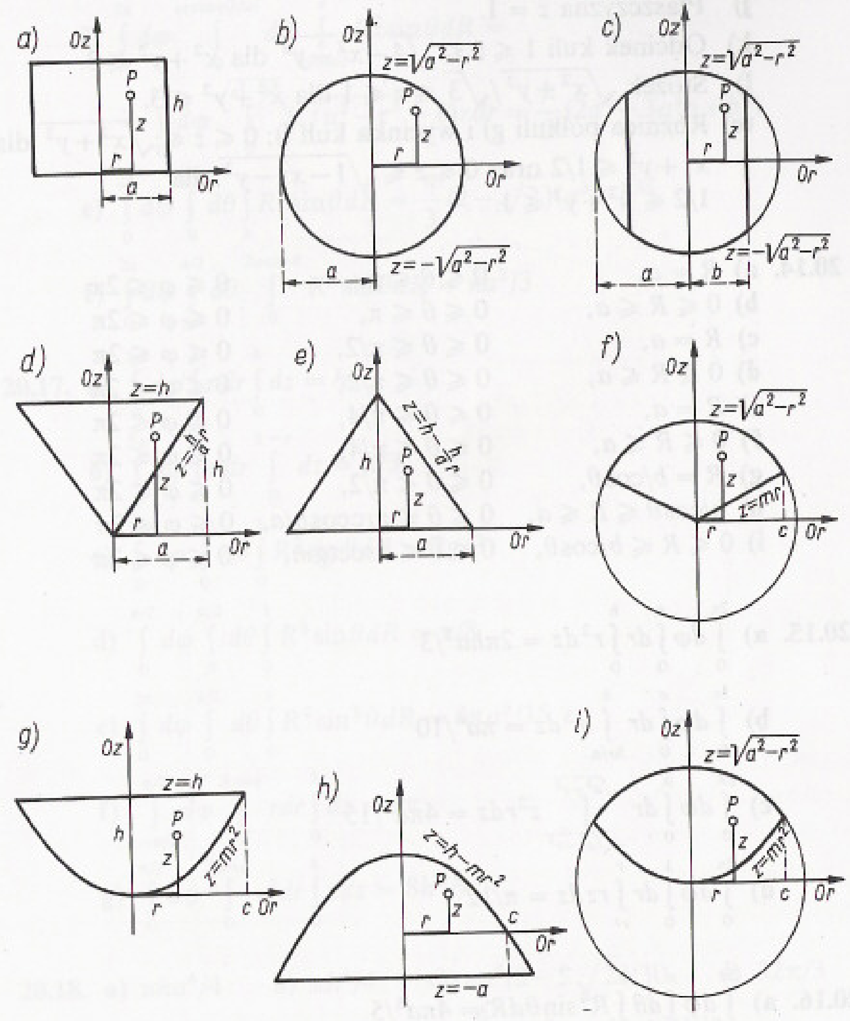
20.13. **a)** Sfera $x^2+y^2+z^2 = 1$.

b) Kula $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

c) Różnica kul $1/4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

d) Południk $x^2+y^2+z^2 = 4$, $y = 0$, $x \geqslant 0$.

e) Równoleżnik $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z = 1$.



Rys. 20.12

f) Półsfera $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

g) Półkula $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$.

h) Czasza $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2 \leqslant 1/2$.

i) Wycinek kuli $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2 \leqslant 1/2$.
j) Płaszczyzna $z = 1$.
k) Odcinek kuli $1 \leqslant z \leqslant \sqrt{4-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2 \leqslant 3$.
l) Stożek $\sqrt{x^2+y^2}/\sqrt{3} \leqslant z \leqslant 1$ dla $x^2+y^2 \leqslant 3$.
m) Różnica półkuli g) i wycinka kuli i); $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ dla $x^2+y^2 \leqslant 1/2$ oraz $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$ dla $1/2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$.

20.14.
a) $R = a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
b) $0 \leqslant R \leqslant a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
c) $R = a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
d) $0 \leqslant R \leqslant a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
e) $R = a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
f) $0 \leqslant R \leqslant a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
g) $R = b/\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta < \pi/2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
h) $b/\cos\theta \leqslant R \leqslant a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \arccos b/a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
i) $0 \leqslant R \leqslant b/\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \operatorname{arcctg} m, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

20.15.
a) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \int_0^h r^2 dz = 2\pi h a^3/3$
b) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \int_{hr/a}^h r^3 dz = \pi a^4/10$
c) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} z^2 r dz = 4\pi a^5/15$
d) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^r rz dz = \pi/12$

20.16.
a) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a R^4 \sin\theta dR = 4\pi a^5/5$
b) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a R^3 \cos\theta \sin\theta dR = \pi a^4/4$
c) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_b^a \sin\theta dR = 4\pi(a-b)$

d) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arccos(b/a)} d\theta \int_{b/\cos\theta}^a R^2 \sin\theta dR =$
$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} (\sqrt{a^2-r^3}-b) r dr = \frac{\pi}{3}(2a^3-3a^2b+b^3)$
e) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_b^a R^2 \sin\theta dR = \frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(a^3-b^3)$
f) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} R^2 \sin\theta dR = \pi a^3/3$

20.17.
a) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^h dz = h\pi$
b) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{1-r} dz = \pi/3$
c) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 R^2 \sin\theta dR = 2\pi/3$
d) $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 R^3 \sin\theta dR = \pi/8$
e) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a R^4 \sin^3\theta dR = 4\pi a^5/15$
f) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r dr \int_0^h dz = h\pi$
g) $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int_0^h z dz = 8h^2/9$

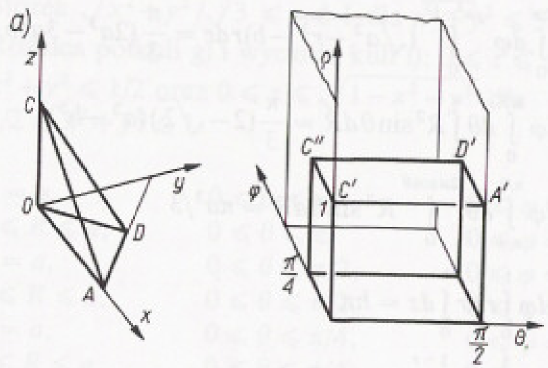
20.18. a) $\pi h a^4/4$ b) $\pi h^4/4$ c) $\pi a^5(8-5\sqrt{2})/30$ d) $32\pi/3$
e) $5\pi/6$ f) $b^2 h\pi$ g) $\frac{4}{3}\pi[a^3-(a^2-b^2)^{3/2}]$

20.19. a) $4abc(a^2+b^2)\pi/15$ b) $abc^2\pi/8$

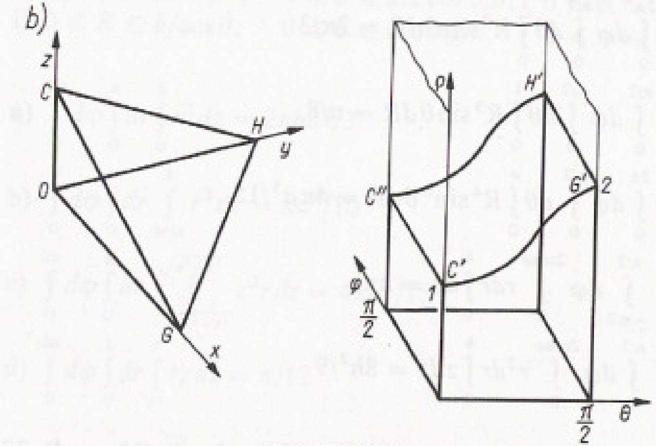
20.20. a) $\frac{3}{4}abc^2\pi$ b) $ab\pi$

20.21. **a)** 1/8 **b)** 1/4 **c)** 1/2 **d)** (e − 1)/4

20.22. **a)** $(V) = \{0 \leqslant x+y+z \leqslant 1,\ 0 \leqslant y/x \leqslant 1 \text{ dla } x,y,z \geqslant 0\}$,
$(\Omega) = \{0 \leqslant \varrho \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\}$; rys. 20.22a,



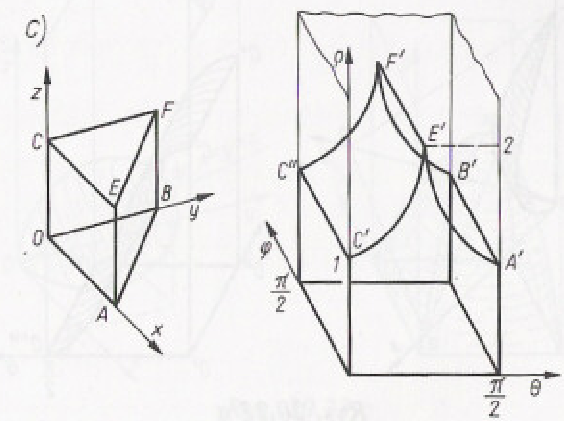
Rys. 20.22 a



Rys. 20.22 b

b) $(V) = \{0 \leqslant x+y+2z \leqslant 2 \text{ dla } x,y,z \geqslant 0\}$,
$(\Omega) = \{0 \leqslant \varrho \leqslant 2/(1+\cos^2\theta),\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}$;
rys. 20.22b,

c) Ściana $z = 1$ dla $x+y \leqslant 1$, tj. dla $x+y+z \leqslant 2$; stąd $\varrho = 1/\cos^2\theta$ dla $\varrho \leqslant 2$, tj. dla $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$.



Rys. 20.22 c

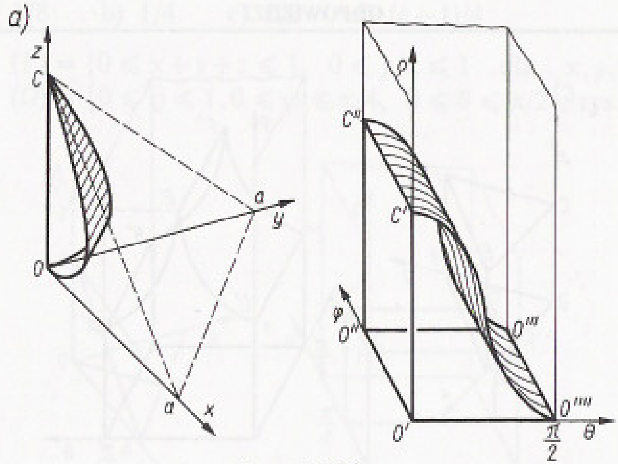
Ściana $x+y=1$ dla $z \leqslant 1$, tj. dla $x+y+z \leqslant 2$; stąd $\varrho = 1/\sin^2\theta$ dla $\varrho \leqslant 2$, tj. dla $\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

$$(\Omega) = \left\{0 < \varrho < \begin{Bmatrix} 1/\cos^2\theta & \text{dla } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4 \\ 1/\sin^2\theta & \text{dla } \pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \end{Bmatrix}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\right\};$$

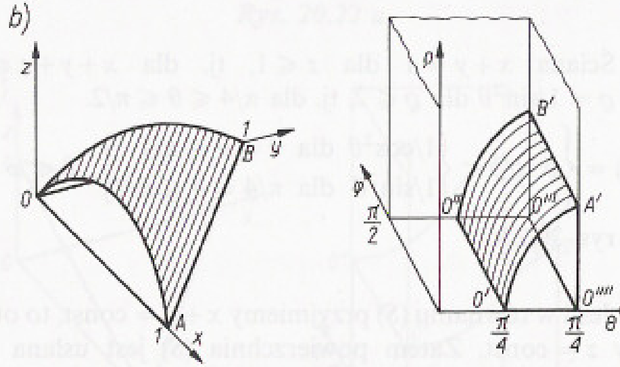
rys. 20.22c.

20.23. **a)** Jeśli w równaniu (S) przyjmiemy $x+y = \text{const}$, to otrzymujemy $z = \text{const}$. Zatem powierzchnia (S) jest usłana prostymi równoległymi do wektora $[1, -1, 0]$. Powierzchnia (S) przecina płaszczyznę Oxz wzdłuż krzywej $x = \sqrt{az} - z$ oraz płaszczyznę Oyz wzdłuż krzywej $y = \sqrt{az} - z$. Stąd można wnioskować o kształcie figury (V). Podstawiając (25), otrzymujemy
$(\Omega) = \{0 \leqslant \varrho \leqslant a\cos^2\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}$;
$V = a^3/60$ (rys. 20.23a).

b) Podobnie jak w zadaniu a) powierzchnia (S) jest usłana prostymi równoległymi do wektora $[1, -1, 0]$ i przecina płaszczyznę Oxz wzdłuż krzywej $z = x - x^2$ oraz płaszczyznę Oyz wzdłuż krzywej $z = y - y^2$. Podstawiamy (25) i pamiętając, że ϱ musi być nieujemne, otrzymujemy



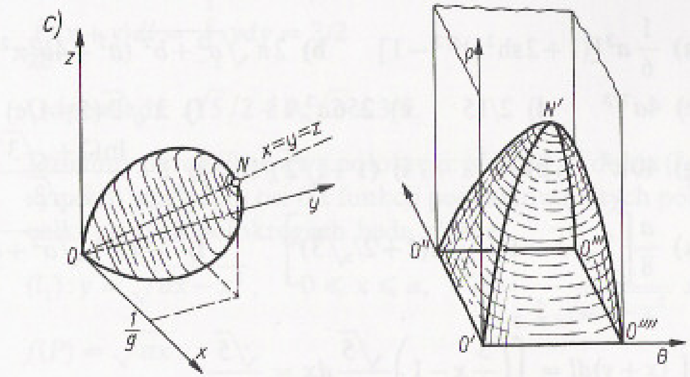
Rys. 20.23 a



Rys. 20.23 b

$(\Omega) = \{0 \leqslant \varrho \leqslant (\sin^2\theta - \cos^2\theta)/\sin^4\theta,\quad \pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,$
$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}$; $V = 1/12$ (rys. 20.23b).

c) Jeśli w równaniu (S) zastąpimy x przez y, y przez z oraz z przez x, to równanie nie zmieni się. Zatem powierzchnia (S) jest symetryczna względem prostej $(l) = \{x = y = z\}$ i jest to symetria rzędu 3, tzn. obrót (S) dokoła (l) o 1/3 kąta pełnego daje w wyniku to samo (S). Przekrój powierzchni (S) płaszczyzną $x+y+z = 3t$ istnieje i jest krzywą zamkniętą, gdy $(3t)^6 < t^3$, tj. gdy $0 < t < 1/9$ (wynika to z rozważenia rodziny płaszczyzn $x+y+z = 3t$



Rys. 20.23 c

i powierzchni $xyz = t^3$) i taki jest zasięg istnienia (V) wzdłuż prostej (l). Stosujemy (25) i otrzymujemy
$(\Omega) = \{0 \leqslant \varrho^3 \leqslant \sin^4\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,$
$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}$; $V = 1/360$ (rys. 20.23c).

Odpowiedzi do rozdziału 21

21.1. **a)** $2\sqrt{2}-1$ **b)** $\frac{1}{6}(17\sqrt{17}-2\sqrt{2})$ **c)** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

d) $\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$ **e)** 153/5 **f)** 2

g) π **h)** 1 **i)** $2\sqrt{2}$

j) $\sqrt{2}$ **k)** $10\sqrt{10}-2\sqrt{2}$ **l)** 8/9

m) $\operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a$ **n)** Jeśli przez $L(x)$ oznaczymy funkcję

$$L(x) = s + \frac{1}{2}\ln\frac{s-1}{s+1},\ \text{gdzie } s = \sqrt{1+e^{2x}}$$

to odpowiedzią jest różnica $L(b)-L(a)$.

o) $\frac{2}{a}\left(\operatorname{arctg} e - \operatorname{arctg}\frac{1}{e}\right)$ **p)** 22

r) $\frac{a^2}{36}(e^3-2e^{-3}-27e^{-1}+84)$ s) $\pi e/2$

21.2. a) $\frac{1}{6}a^3[(1+2\,\mathrm{sh}^2 1)^{3/2}-1]$ b) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}\,(a^2+4b^2\pi^2/3)$

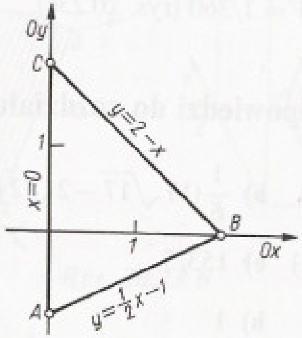
c) $4a^{7/3}$ d) $2/15$ e) $256a^3/15$ f) $2\sqrt{2}(1-1/e)$

g) $40\pi^2$ h) 4 i) $(1+\sqrt{2})/15$ j) $1+\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$

k) $\frac{a}{8}\left[3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln(1+2/\sqrt{3})\right]$ l) $-\pi a^2 c\sqrt{a^2+c^2}$

21.3. $\int\limits_{AB}(x+y)dl=\int\limits_0^2\left(\frac{3}{2}x-1\right)\frac{\sqrt{5}}{2}dx=\frac{\sqrt{5}}{2};$

$\int\limits_{BC}(x+y)dl=\int\limits_0^2 2\sqrt{2}\,dx=4\sqrt{2}$



Rys. 21.3

Na odcinku $\overline{AC}$ zamieniamy role zmiennych x, y. Przyjmujemy, że x jest funkcją zmiennej y

$$x=x(y)=\text{const}=0,\qquad -1\leqslant y\leqslant 2,\qquad \frac{dx}{dy}=0,$$

$$dl=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=dy$$

$$\int\limits_{AC}(x+y)dl=\int\limits_{-1}^{2} y\,dy=3/2$$

Odpowiedź: $\sqrt{5}/2+4\sqrt{2}+3/2$.

21.4. Dzielimy okrąg (l) na dwa półokręgi: górny (l_1) i dolny (l_2). Dzięki symetrii względem osi Ox funkcji podcałkowej i tych półkręgów, całki po tych półokręgach będą równe.

$$(l_1): y=\sqrt{ax-x^2},\qquad 0\leqslant x\leqslant a,\qquad dl=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx,$$

$$f(P)=\sqrt{ax},$$

$$\int\limits_{(l_1)} f(P)dl=\int\limits_0^a\sqrt{ax}\,\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx=-a\sqrt{a}\sqrt{a-x}\,\Big|_0^a=a^2$$

Odpowiedź: $2a^2$.

21.5. $\overline{AB}: x=3-4t,\ y=2-3t,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ dl=5dt,$

$$\int\limits_{AB} f(P)dl=\int\limits_0^1(25t^2-36t+13)5\,dt=50/3$$

21.6. $\ln\frac{6\sqrt{6}+2}{6\sqrt{13}-16}$

21.7. a) 3 b) $1/2$ c) $\sqrt{3}/120$ d) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ e) $1/\sqrt{2}$

f) $2\pi a^3\sqrt{2}/3$

21.8. a)—c): $\frac{\pi}{6}[(1+4a^2)^{3/2}-1]$ d) $\pi a^2\sqrt{2}$ e) 2π

21.9. a) $(9\sqrt{3}-8\sqrt{2}+1)/15$ b) $\pi(\sqrt{2}-1)/6$

c) $\pi(5\sqrt{5}-1)/6$ d) 1 e) $4\sqrt{2}/3$

21.10. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 u\sqrt{u^2+1}\,du\right)dv=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$

21.11. $44\pi^2$

21.12. **a)** $2\pi a\cdot 2\pi$ **b)** $2\pi a\cdot 2\pi A$ **c)** $2\pi a\cdot 2\pi(A^2+a^2/2)$
d) $2\pi a\cdot 2\pi(A^3+3A^2/2)$

21.13. $2\pi(3\sqrt{3}-1)/3$

21.14. **a)** $\pi(3\sqrt{3}-1)/3$ **b)** $\pi[\sqrt{3}+\sqrt{1/2}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})]$

21.15. Dla rozważanej półsfery jest $(\Omega)=\{0\leqslant\theta\leqslant\pi/2, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$
a) 0 **b)** 0 **c)** πR^3 **d)** $2\pi R^6/15$ **e)** πR^3
f) $2\pi R^4$ **g)** $\frac{4}{3}\pi R^4$

21.16. Aby wyznaczyć (Ω), trzeba współrzędne cylindryczne wprowadzić do określenia powierzchni wycinającej płat (S).

a) Płat (S) leży na (W), więc na całym (S) jest

$$x=a\cos\varphi,\qquad y=a\sin\varphi \tag{$*$}$$

Brzeg płata (S) leży na (T), więc na tym brzegu liczby $(*)$ muszą spełniać określenie (T). Podstawiamy $(*)$ do (T) i otrzymujemy

$$|z|=a\cos\varphi \quad \text{dla} \quad |\varphi|\leqslant\pi/2$$

i to jest brzeg (S) we współrzędnych cylindrycznych, czyli brzeg zbioru (Ω). Zatem

$$(\Omega)=\{|z|\leqslant a\cos\varphi \quad \text{dla} \quad |\varphi|\leqslant\pi/2\}$$

Teraz, mając (Ω), stosujemy wzór (15). Odpowiedź: $S=4a^2$.

b) $(\Omega)=\{|z|\leqslant a\sqrt{\cos 2\varphi}, |\varphi|\leqslant\pi/4\}$; $S=2a^2\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{\cos 2\varphi}\,d\varphi$.

Jest to całka nieelementarna (eliptyczna). Metodą trapezów otrzymujemy $S\approx 2a^2\cdot 1{,}096$.

c) $(\Omega)=\{|z|\leqslant a\sqrt{\cos\varphi-\sin^2\varphi}, |\varphi|\leqslant c\}$,

gdzie $c=\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $S=2a^2\int\limits_{-c}^{c}\sqrt{\cos\varphi-\sin^2\varphi}\,d\varphi$, całka nieelementarna.

21.17. $(\sqrt{3}-1)\ln 2+(3-\sqrt{3})/2$

21.18. $\pi(1+\sqrt{2})/2$

21.19. $2\sqrt{2}\,\pi/3+(25\sqrt{5}-7)\pi/20$

21.20. **a)** $(5\sqrt{5}-1)/6$ **b)** $(125\sqrt{5}-1)/420$

21.21. **a)** $R^3\pi^2$ **b)** $\frac{8}{3}R^4\pi$ **c)** $2R\pi^2$ **d)** ∞

21.22. **a)** $\frac{16}{3}R^3\pi$ **b)** $8R^4\pi$ **c)** $4R\pi$ **d)** ∞

21.23. **a)** $\int\limits_0^{2\pi} r|\cos\varphi|\,r\,d\varphi=4r^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi=4r^2$ **b)** $r^3\pi$

c) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{r|\cos\varphi|}\,r\,d\varphi=\infty$

21.24. **a)** $\int\limits_0^{2\pi}2r\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|r\,d\varphi=4r^2\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8r^2$ **b)** $4r^3\pi$ **c)** ∞

21.25. **a)** $x_0=4/3$, $y_0=1$ **b)** $x_0=3/2$, $y_0=1$ **c)** $x_0=4/3$, $y_0=1$

21.26. **a)** $x_0=0$, $y_0=2a/\pi$ **b)** $x_0=0$, $y_0=\frac{4}{3}a/\pi$
c) $x_0=y_0=0$, $z_0=a/2$ **d)** $x_0=y_0=0$, $z_0=3a/8$

21.27. **a)** $l^3/3$ **b)** 0 **c)** $2\pi a^3$ **d)** πa^3 **e)** $a^4/3$
f) $a^4/12$ **g)** $\pi a^4/2$ **h)** $\pi a^4/4$ **i)** $4\pi a^4/3$ **j)** $4\pi a^4/3$
k) $4\pi a^5/15$ **l)** $4\pi a^5/15$ **m)** $2a^5/3$ **n)** $7a^5/12$
o) $2\pi ha^3$ **p)** $\pi ah(2h^2/3+a^2)$ **q)** $\pi ha^4/2$
r) $\pi a^2h(h^2/3+a^2/4)$ **s)** $\pi ha^4/10$ **t)** $\pi ha^2(h^2/30+a^2/20)$
u) $\pi a^3\sqrt{a^2+h^2}/2$ **v)** $\pi a\sqrt{a^2+h^2}(a^2/4+h^2/6)$

21.28. **a)** 2 **b)** 0

21.29. **a)** $91/60$ **b)** $49/60$

21.30. **a)** $-3/2$ **b)** π

21.31. **a)** $-2/3$ **b)** $3\pi/4$

21.32. **a)** 6 **b)** $81/4$

21.33. a) 4 b) całka rozbieżna

21.34. a) 0 b) 17/10 c) 13

21.35. a) 4π b) πa^2 c) $-14/15$

21.36. 4/3

21.37. Ze względu na moduł występujący pod całką dzielimy łuk (l) na łuki (l_1) i (l_2) odpowiadające przedziałom $\langle 0;1\rangle$ i $\langle 1;2\rangle$. Na (l_1) jest $|y| = 1-x^2$, na (l_2) jest $|y| = x^2-1$. Otrzymujemy

$$\int\limits_{(l)} |y|\,dx + x\,dy = \int\limits_0^1 (1-x^2)\,dx + \int\limits_1^2 (x^2-1)\,dx + \int\limits_0^2 x\cdot 2x\,dx = 22/3$$

21.38. -2

21.39. a) 14 b) 92 c) 3

21.40. a) $-2\pi a^2$ b) $-2\pi ab$ c) -6

21.41. a) 3 b) 0

21.42. a) $-2/15$ b) $2-\pi/2$

21.43. a) $243\pi/2$ b) $-16\pi/3$ c) $2\pi r^2 h$ d) 4π
e) $(\pi+1)/8$ f) 0 g) $r^3h/3 + r^2h^2\pi/8$
h) $2\pi R^7/105$

21.44. a) $3a^3$ b) $4\pi R^3$ c) 1/8 d) 0

21.45. $\pi/3$

21.46. $4a^3$

21.47. $\pi^3/24$

21.48. $a^3(\pi-2)$

21.49. Stosując wzory (39), za u, v przyjmujemy odpowiednio φ, α i obliczamy wektor $\boldsymbol{h}$. W celu uproszczenia rachunków przyjmujemy oznaczenie

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = A + a\cos\alpha$$

wówczas

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = a\sin\alpha$$

$$\boldsymbol{h} = [\rho a\cos\alpha\cos\varphi, \quad \rho a\cos\alpha\sin\varphi, \quad \rho a\sin\alpha]$$

Z ostatniej współrzędnej wektora $\boldsymbol{h}$ i rysunku torusa (s. 118) odczytujemy, że wektor $\boldsymbol{h}$ jest skierowany zgodnie z osią Oz dla $0<\alpha<\pi$, a przeciwnie dla $\pi<\alpha<2\pi$. Zatem orientacja zgodna z $\boldsymbol{h}$ jest orientacją zewnętrzną.

a) $\boldsymbol{F} = [x,0,0] = [\rho\cos\varphi, 0, 0]$; $\boldsymbol{Fh} = \rho^2 a\cos\alpha\cos^2\varphi$; całkujemy $\boldsymbol{Fh}$ względem α i φ; otrzymujemy $2\pi A\cdot\pi a^2$.

b)—c): $2\pi A\cdot\pi a^2$ d) $6\pi A\cdot\pi a^2$ e) 0

Odpowiedzi do rozdziału 22

22.1. a) $u = x^2 - y^2 + xy - 3y$, $L = -2$

b) $u = \dfrac{1}{2}x^2\sin 2y$, $L = 1/2$

c) $u = \dfrac{1}{2}x^2 + x\ln y - \cos y$, $L = 1/2 + \cos 1$

d) $u = xy^2 - x + \dfrac{3}{2}y^2$, $L = 0$

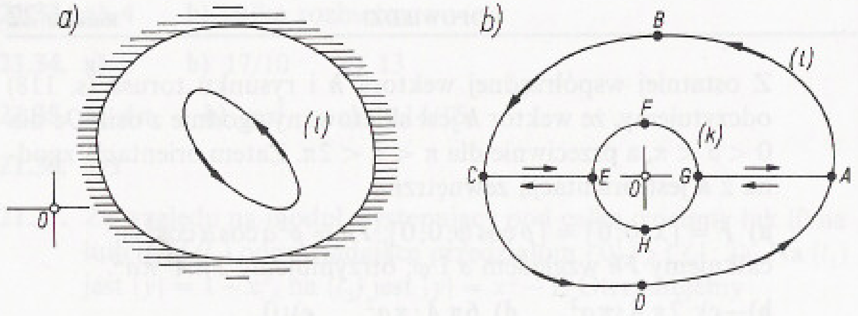
e) $u = \dfrac{1}{2}x^2y^2 + x - y$, $L = 1$

f) $u = x\sin 2y + y\ln\cos x + y^2$, $L = \dfrac{2}{3}\pi\ln\dfrac{1}{2}$

g) $u = xy + \dfrac{1}{2}\sin^2 y + y$, $L = 4\pi$

22.2. a) Pole wektorowe $\boldsymbol{F} = [X, Y] = [2xy, x^2]$ spełnia w $\mathscr{R}^2$ warunek wystarczający istnienia potencjału, zatem potencjał istnieje, a cyrkulacja jest zerem.
b)–e) Dowód analogiczny do a).

22.3. Równość (7) jest spełniona wszędzie poza punktem $O = (0,0)$. Jeśli punkt O leży zewnątrz (l) (rys. a), to istnieje jednospójny obszar, który zawiera (l), nie zawiera O, w którym zachodzi (7), a więc i (6). Teza 1° została udowodniona.
Jeśli punkt O leży wewnątrz (l) (rys. b), to wewnątrz (l) istnieje



Rys. 22.3

okrąg $(k) = \{x^2 + y^2 = r^2\}$, na którym cyrkulacja jest równa 2π (wykonaj obliczenie). Pokażemy, że cyrkulacja po (l) jest równa cyrkulacji po (k). Mamy

$$\int_{ABC} + \int_{CE} + \int_{EFG} + \int_{GA} = \oint_{ABCEFGA} = 0 \quad \text{(wniosek z tezy 1°)}$$

$$\int_{CDA} + \int_{AG} + \int_{GHE} + \int_{EC} = \oint_{CDAGHEC} = 0 \quad \text{(wniosek z tezy 1°)}$$

Dodajemy te równości. Ponieważ $\int_{CE} + \int_{EC} = 0$, $\int_{AG} + \int_{GA} = 0$, więc $\int_{ABCDA} + \int_{EFGHE} = 0$, czyli $\oint_{(l)} - \oint_{(k)} = 0$. Teza 2° została udowodniona.

22.4. **a)** $-3a^2/2$ **b)** $2a^3/3$ **c)** $1/2$ **d)** $-64/3$
e) $\pi a^4/2$ **f)** 0 **g)** 0 **h)** $-\pi a^3/8$

22.5. **a)** $ab\pi$ **b)** $8/15$ **c)** $2/3$ **d)** 3π

22.6. **a)** $u = x^2 + xy + 3x + 2y^2 + 2y + 3z^2 - 6z$
b) $u = x^3 - 3xyz + y^3 + z^3$
c) $u = xyz(x + y + z)$
d) $u = xyz + \ln|xyz|$ dla $xyz \neq 0$
e) $u = -\operatorname{arctg}(x/y) + \operatorname{arctg} z$ dla $y \neq 0$ lub
$u = \operatorname{arctg}(y/x) + \operatorname{arctg} z$ dla $x \neq 0$

22.7. **a)** $u = r$, $L = h - 1$, $\lim L = \infty$
b) $u = \ln r$, $L = \ln h$, $\lim L = \infty$
c) $u = -1/r$, $L = 1 - 1/h$, $\lim L = 1$

22.8. **a)** $u = (x^2 + y^2)/2$ **b)** $u = xy$ **c)** nie istnieje

22.9. **a)** nie istnieje **b)** $u = -\operatorname{arctg}(x/y)$ dla $y \neq 0$ lub
$u = \operatorname{arctg}(y/x)$ dla $x \neq 0$ **c)** nie istnieje

22.10. **a)** $[3x^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^2]$ **b)** $[a, b, c]$
c) $2(x + y + z)[1, 1, 1]$ **d)** $2(ax + by + cz + d)[a, b, c]$
e) $[1/x, 1/y, 1/z]$ **f)** $e^{x+y+z}[1, 1, 1]$

22.11. $[3, 2, 1]$, $[27, 0, 4]$; $x^2 + y^2 = 0$ (punkty osi Oz)

22.12. **a)** $[x, y, z]/r$ **b)** $[x, y, z]/r^2$ **c)** $-[x, y, z]/r^3$

22.13. **a)** $x = y = z$ **b)** $z^2 = xy$, $x \neq y$ lub $y \neq z$ lub $z \neq x$

22.14. $-8/9$

22.16. **a)** 3 **b)** 0 **c)** $6xyz$ **d)** 6

22.17. **a)** $(\operatorname{grad} u)^2 + u \operatorname{lapl} u$
b) $\operatorname{grad} u_1 \operatorname{grad} u_2 + u_1 \operatorname{lapl} u_2$
c) $u \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \operatorname{grad} u$

22.18. **a)** $2/r$ **b)** $f''(r) + \dfrac{2}{r} f'(r)$ **c)** $3f(r) + rf'(r)$
d) $[0, 0, f''(z)]$

22.19. **a)** $[0, 0, 0]$ **b)** $[1, 1, 1]$ **c)** $[-1, -1, -1]$
d) $[0, 0, 0]$ **e)** $[0, 0, 2]$ **f)** $\dfrac{1}{r^3}[xz, yz, r^2 + z^2]$
g) $\dfrac{2z}{r^4}[x, y, z]$ **h)** $[0, 0, 0]$

22.22. **a)** $10/3$ **b)** $3/8$ **c)** $4\pi a^3$ **d)** $3\pi a^4/16$ **e)** π
f) $3\pi/8$ **g)** 0 **h)** $2\pi a^3$ **i)** $\dfrac{12}{5}\pi a^5$ **j)** $3\pi a^2 h$
k) $\dfrac{1}{2}\pi a^2 h(3a^2 + 2h^2)$ **l)** $a^4(4/15 + \pi/48)$

22.23. **a)** 4π **b)** 0

22.24. **a)** 0 **b)** $3a^2$ **c)** $a^3/3$ **d)** 2π **e)** $-2\pi r^2$
f) 0 **g)** $-\pi a^6/8$ **h)** 0 **i)** 0 **j)** $-\pi$

Odpowiedzi do rozdziału 23

W tym rozdziale w odpowiedziach przyjęto następujące oznaczenia:
h — dowolna liczba dodatnia,
q — dowolna liczba dodatnia mniejsza od 1,

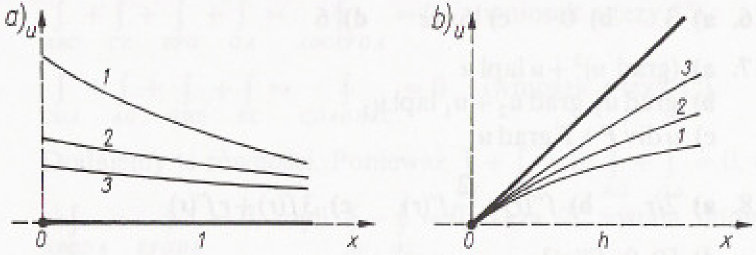
$$w_n = \sup_{x\in E} |u_n(x)-u(x)|$$

23.1. **a)** Wyznaczenie funkcji granicznej — zapis skrótowy:

$$u_n(x) = \frac{1}{n+x} \to \{0 \text{ dla } x \geqslant 0\} = u(x) \qquad \text{(rys. a)}$$

Dowód zbieżności jednostajnej (D.zb.j.) w przedziale $\langle 0; \infty)$:

$$w_n = \sup_{x\geqslant 0}|u_n(x)-u(x)| = \sup_{x\geqslant 0}\left|\frac{1}{n+x}-0\right| = \frac{1}{n} \to 0.$$



Rys. 23.1 a, b

b) $u_n(x) = \dfrac{nx}{n+x} = \dfrac{x}{1+x/n} \to \{x \text{ dla } x \geqslant 0\} = u(x)$ (rys. b).

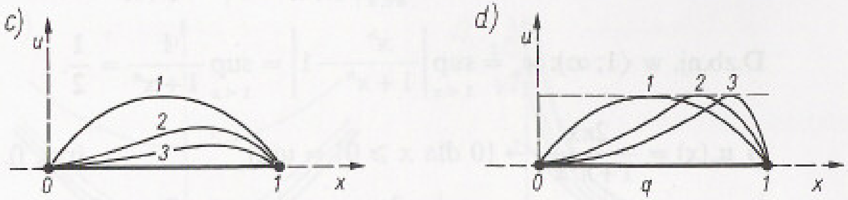
D.zb.j. w $\langle 0; h\rangle$: $w_n = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant h}\left|\dfrac{nx}{n+x}-x\right| = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant h}\dfrac{x^2}{n+x} \leqslant \dfrac{h^2}{n} \to 0.$

Dowód zbieżności niejednostajnej (D.zb.nj.) w przedziale $\langle h; \infty)$:

$$w_n = \sup_{h\leqslant x}\frac{x^2}{n+x} = \sup_{h\leqslant x}\frac{x}{n/x+1} \geqslant \sup_{h\leqslant x}\frac{x}{n/h+1} = \infty.$$

c) $u_n(x) = x^n - x^{n+1} \to \{0 \text{ dla } 0 \leqslant x \leqslant 1\} = u(x)$ (rys. c).

D.zb.j. w $\langle 0; 1\rangle$: Funkcja $u_n(x)$ ma w punkcie $x = \dfrac{n}{n+1}$ maksimum mniejsze od $\dfrac{1}{n}$, zatem $w_n(x) < \dfrac{1}{n} \to 0$.



Rys. 23.1 c, d

d) $u_n(x) = x^n - x^{2n} \to \{0 \text{ dla } 0 \leqslant x \leqslant 1\} = u(x)$ (rys. d).

D.zb.nj. w $\langle 0; 1\rangle$: Funkcja $u_n(x)$ ma w punkcie $x = \sqrt[n]{1/2}$ maksimum równe 1/4, zatem $w_n \geqslant 1/4$, $w_n(x)$ nie dąży do 0.

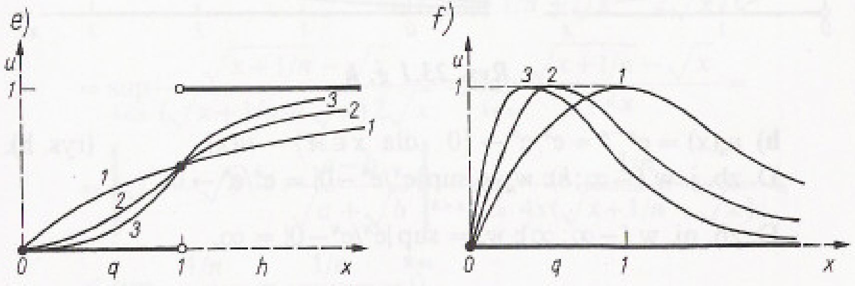
D.zb.j. w $\langle 0; q\rangle$: $w_n = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant q}|x^n - x^{2n}| \leqslant q^n \to 0.$

e) $u_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n} \to \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{dla } 0 \leqslant x < 1 \\ 1/2 & \text{dla } x = 1 \\ 1 & \text{dla } 1 < x < \infty \end{array}\right\} = u(x)$ (rys. e).

Funkcja $u_n(x)$ dla każdego n jest w przedziale $\langle 0; \infty)$ rosnąca.

D.zb.j. w $\langle 0; q\rangle$: $w_n = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant q}\left|\dfrac{x^n}{1+x^n}-0\right| = \dfrac{q^n}{1+q^n} < q^n \to 0.$

D.zb.nj. w $\langle 0; 1)$: $w_n = \sup\limits_{0\leqslant x<1}\left|\dfrac{x^n}{1+x^n}-0\right| = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}.$



Rys. 23.1 e, f

D.zb.j. w $\langle h;\infty)$, $h>1$: $w_n=\sup\limits_{h\le x}\left|\dfrac{x^n}{1+x^n}-1\right|=\dfrac{1}{1+h^n}\to 0.$

D.zb.nj. w $\langle 1;\infty)$: $w_n=\sup\limits_{1<x}\left|\dfrac{x^n}{1+x^n}-1\right|=\sup\limits_{1<x}\dfrac{1}{1+x^n}=\dfrac{1}{2}.$

f) $u_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}\to\{0 \text{ dla } x\geqslant 0\}=u(x)$ (rys. f).

D.zb.j. w $\langle q;\infty)$: $w_n=\sup\limits_{q\le x}\left|\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}-0\right|<\sup\limits_{q\le x}\dfrac{2}{nx}=\dfrac{2}{nq}\to 0.$

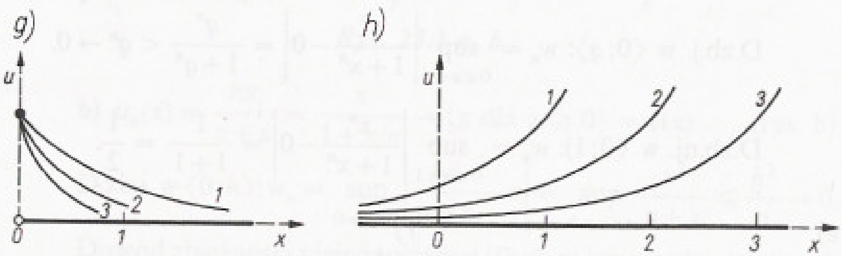
Funkcja $u_n(x)$ dla każdego n ma w punkcie $x=1/n$ wartość $u_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=1.$

D.zb.nj. w $\langle 0;\infty)$: $w_n=\sup\limits_{0\le x}|u_n(x)-0|\geqslant u_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=1.$

g) $u_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}\to\left\{\begin{matrix}1 & \text{dla } x=0\\ 0 & \text{dla } x>0\end{matrix}\right\}=u(x)$ (rys. g).

D. zb. j. w $\langle q;\infty)$: $w_n=\sup\limits_{q\le x}|\mathrm{e}^{-nx}-0|=\mathrm{e}^{-nq}\to 0.$

D. zb. nj. w $(0;\infty)$: $w_n=\sup\limits_{0<x}|\mathrm{e}^{-nx}-0|=\mathrm{e}^0=1.$



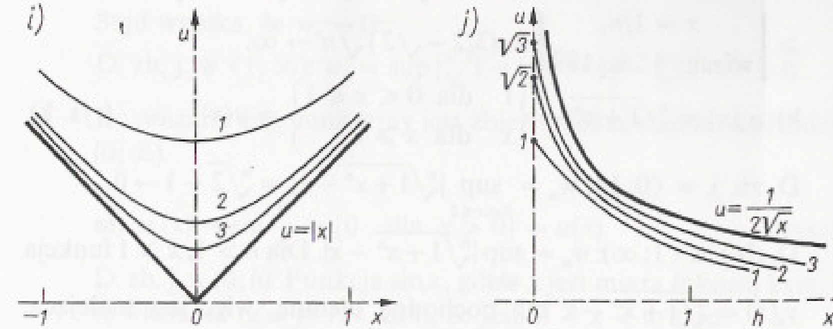
Rys. 23.1 g, h

h) $u_n(x)=\mathrm{e}^{x-n}=\mathrm{e}^x/\mathrm{e}^n\to\{0 \quad \text{dla } x\in\mathscr{R}\}=u(x)$ (rys. h).

D. zb. j. w $(-\infty;h)$: $w_n=\sup\limits_{x<h}|\mathrm{e}^x/\mathrm{e}^n-0|=\mathrm{e}^h/\mathrm{e}^n\to 0.$

D. zb. nj. w $(-\infty;\infty)$: $w_n=\sup\limits_{x\in\mathscr{R}}|\mathrm{e}^x/\mathrm{e}^n-0|=\infty.$

i) $u_n(x)=\sqrt{x^2+1/n^2}\to\{\sqrt{x^2}=|x| \text{ dla } x\in\mathscr{R}\}=u(x)$ (rys. i).



Rys. 23.1 i, j

D. zb. j. w $(-\infty;\infty)$: $w_n=\sup\limits_{x\in\mathscr{R}}|\sqrt{x^2+1/n^2}-\sqrt{x^2}|=$

$$=\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right|=\sup_{x\in\mathscr{R}}\frac{1/n^2}{\sqrt{x^2+1/n^2}+\sqrt{x^2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1/n^2}{\sqrt{1/n^2}}=1/n\to 0.$$

j) $u_n(x)=n(\sqrt{x+1/n}-\sqrt{x})=\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right|=$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}}\to\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{dla } x>0\right\}=u(x) \qquad \text{(rys. j).}$$

D. zb. j. w $\langle h;\infty)$: $w_n=\sup\limits_{h\le x}\left|\dfrac{1}{\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right|=$

$$=\sup_{h\le x}\frac{\sqrt{x+1/n}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x})2\sqrt{x}}\leqslant\sup_{h\le x}\frac{\sqrt{x+1/n}-\sqrt{x}}{4x}=$$

$$=\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right|=\sup_{h\le x}\frac{1/n}{4x(\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x})}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{h\le x}\frac{1/n}{8x\sqrt{x}}=\frac{1/n}{8h\sqrt{h}}\to 0.$$

D. zb. nj. w $(0;h)$: $w_n = \sup\limits_{0<x<h} \left| \dfrac{1}{\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \right| \geqslant$

$\geqslant \left\| \begin{matrix} x = 1/n, \\ \text{własn. } 1^\circ \text{ s. } 189 \end{matrix} \right\| \geqslant (3/2-\sqrt{2})\sqrt{n} \to \infty.$

k) $u_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n} \to \begin{Bmatrix} 1 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x & \text{dla } x \geqslant 1 \end{Bmatrix} = u(x)$ (rys. k).

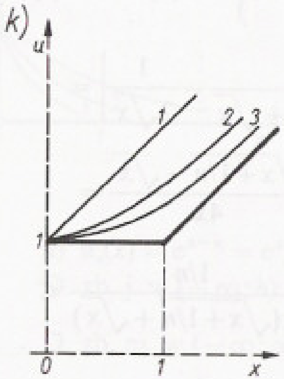
D. zb. j. w $\langle 0;1\rangle$: $w_n = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |\sqrt[n]{1+x^n} - 1| = \sqrt[n]{2} - 1 \to 0.$

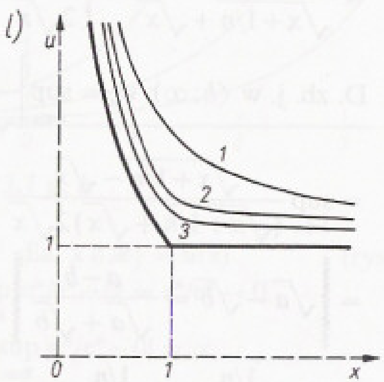
D. zb. j. w $\langle 1;\infty)$: $w_n = \sup\limits_{x\geqslant 1} |\sqrt[n]{1+x^n} - x|$. Dla $n > 1, x \geqslant 1$ funkcja $y_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n} - x$ ma pochodną ujemną, więc jest malejąca, zatem $\sup\limits_{x\geqslant 1} y_n(x) = y_n(1) = \sqrt[n]{2} - 1 \to 0$. Stąd wynika, że $w_n \to 0$.

Ciąg funkcyjny zbieżny jednostajnie w każdym z dwóch przedziałów jest zbieżny jednostajnie w sumie tych przedziałów, zatem rozważany ciąg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie w przedziale $\langle 0;\infty)$.

l) $u_n(x) = \sqrt[n]{1+1/x^n} \to \begin{Bmatrix} 1/x & \text{dla } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{dla } \quad x \geqslant 1 \end{Bmatrix} = u(x)$ (rys. l).

D. zb. j. w $(0;1\rangle$: $w_n = \sup\limits_{0<x\leqslant 1} |\sqrt[n]{1+1/x^n} - 1/x|$. Dla $n > 1$, $0 < x \leqslant 1$, funkcja $y_n(x) = \sqrt[n]{1+1/x^n} - 1/x$ ma pochodną dodatnią, więc jest rosnąca, zatem $\sup\limits_{0<x\leqslant 1} y_n(x) = y_n(1) = \sqrt[n]{2} - 1 \to 0.$





Rys. 23.1 k, l

Stąd wynika, że $w_n \to 0$.

D. zb. j. w $\langle 1;\infty)$: $w_n = \sup\limits_{x\geqslant 1} |\sqrt[n]{1+1/x^n} - 1| = \sqrt[n]{2} - 1 \to 0.$

Rozważany ciąg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie w przedziale $(0;\infty)$.

m) $u_n(x) = \sin\dfrac{x}{n} \to \{0 \quad \text{dla } x > 0\} = u(x)$ (rys. m).

D. zb. j. w $(0;h)$: Funkcja $\sin x$, gdzie x jest miarą łukową kąta, ma tę własność (*Zarys I*, s. 224), że jeśli $0 < x < \pi/2$, to

$$0 < \sin x < x$$

Niech $n > h$. Wówczas dla $0 < x < h$ mamy $0 < \dfrac{x}{n} < \dfrac{h}{n} < 1 < $ $< \pi/2$, zatem

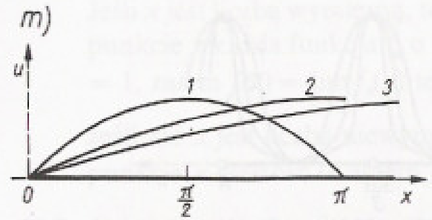
$$0 < \sin\frac{x}{n} < \frac{x}{n} < \frac{h}{n}$$

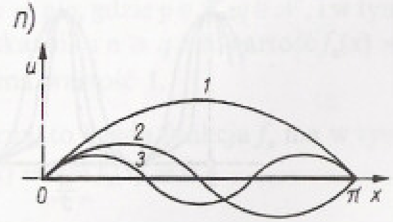
$$w_n = \sup_{0<x<h} \left| \sin\frac{x}{n} - 0 \right| < \frac{h}{n} \to 0$$

D. zb. nj. w $(0;\infty)$: $w_n = \sup\limits_{0<x<\infty} \left| \sin\dfrac{x}{n} - 0 \right| = 1.$

n) $u_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx \to \{0 \quad \text{dla } x > 0\} = u(x)$ (rys. n).

D. zb. j. w $(0;\infty)$: $w_n = \sup\limits_{0<x<\infty} \left| \dfrac{1}{n}\sin nx - 0 \right| = \dfrac{1}{n} \to 0.$





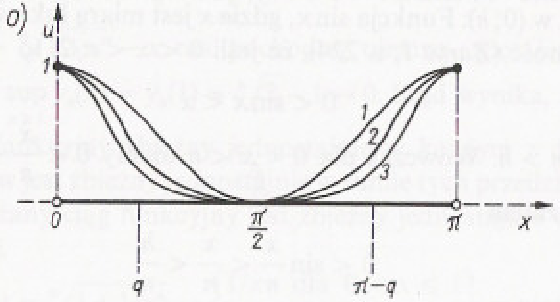
Rys. 23.1 m, n

o) $u_n(x) = (\cos^2 x)^n \to \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ 0 & \text{dla } 0 < x < \pi \\ 1 & \text{dla } x = \pi \end{cases}$ (rys. o).

D. zb. j. w $\langle q; \pi - q\rangle$: Z założenia $0 < q < 1$ wynika, że $\cos^2 q < 1$.

$$w_n = \sup_{q \le x \le \pi - q} |\cos^{2n} x - 0| = \cos^{2n} q \to 0$$

D. zb. nj. w $(0;\pi)$. $w_n = \sup_{0<x<\pi} |\cos^{2n} x - 0| = 1$.

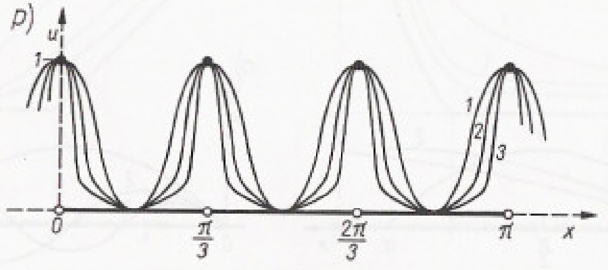


Rys. 23.1 o

p) $u_n(x) = (\cos^2 3x)^n \to \left\{\begin{matrix} 1 \text{ dla } x = k\pi/3, \ k \in \mathscr{Z} \\ 0 \text{ dla pozostałych } x \end{matrix}\right\} = u(x)$ (rys. p).

Na podstawie wyników zad. o) stwierdzamy, że powyższa zbieżność jest:

— jednostajna w każdym przedziale o tej własności, że żaden z punktów $x = k\pi/3$, $k \in \mathscr{Z}$, nie jest ani elementem, ani końcem tego przedziału;



Rys. 23.1 p

— niejednostajna w każdym przedziale, który nie ma tej własności.

23.2. Niech L oznacza lewą, a P prawą stronę równości. Wówczas **a)** L = 0, P = 0 **b)** L = 0, P = 1/12

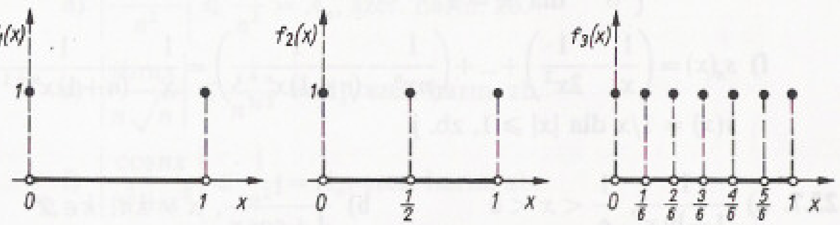
23.3. **a)** L nie istnieje, P = ∞ **b)** L = 0, P = 1 **c)** L = P = 0

23.4. Funkcja $u_{n,m}(x) = [\cos^2(n!\,\pi x)]^m$ ma okres równy 1 dla każdego m i każdego n, więc także funkcja

$$f_n(x) = \lim_{m\to\infty} [\cos^2(n!\,\pi x)]^m$$

ma okres równy 1 dla każdego n. Podobnie jak w zad. 23.1 p) otrzymujemy (zob. rysunek)

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = k/n!,\ k \in \mathscr{Z} \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$



Rys. 23.4

Jeśli x jest liczbą wymierną, to $x = p/q$, gdzie $p \in \mathscr{Z}$, $q \in \mathscr{N}$, i w tym punkcie x każda funkcja f_n o wskaźniku $n \geqslant q$ ma wartość $f_n(x) = 1$, zatem $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ też ma wartość 1.

Jeśli zaś x jest liczbą niewymierną, to każda funkcja f_n ma w tym punkcie x wartość 0, zatem $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

23.5. $f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} [\cos^2(10^n \pi x)]^m$

23.6. a) $s_n(x) = x + x^2 + \ldots + x^n = x(1 + x + \ldots + x^{n-1}) = \left\| \begin{matrix}\text{dla}\\ x \neq 1\end{matrix} \right\| =$

$= x\dfrac{1-x^n}{1-x},\ s(x) = \dfrac{x}{1-x}$ dla $|x| < 1$,

zbieżność niejednostajna (zb. nj.)

b) $s_n(x) = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \ldots + (x^n - x^{n+1}) = x - x^{n+1}$,

$s(x) = \begin{cases} x & \text{dla } |x| < 1 \\ 0 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$, zb. nj.

c) $s_n(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) + \ldots + \left(\dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$,

$s(x) = x$ dla $|x| \leqslant 1$, zbieżność jednostajna (zb. jd.)

d) $s_n(x) = \dfrac{1}{x} + \ldots + \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{x} + \ldots + \dfrac{1}{x^{n-1}}\right) = \left\| \begin{matrix}\text{dla}\\ x \neq 1\end{matrix} \right\| =$

$= \dfrac{1}{x}\,\dfrac{1 - 1/x^n}{1 - 1/x},\ s(x) = \dfrac{1}{x-1}$ dla $|x| > 1$, zb. nj.

e) $s_n(x) = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{x^n} - \dfrac{1}{x^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^{n+1}}$,

$s(x) = \begin{cases} 1/x & \text{dla } |x| > 1 \\ 0 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$ zb. nj.

f) $s_n(x) = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{nx^n} - \dfrac{1}{(n+1)x^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{(n+1)x^{n+1}}$,

$s(x) = 1/x$ dla $|x| \geqslant 1$, zb. j.

23.7. a) $\dfrac{1}{1-\ln x},\ \dfrac{1}{\mathrm{e}} < x < \mathrm{e}$ b) $\dfrac{1}{1+\cos x},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathscr{Z}$

c) $\dfrac{3}{5-x},\ -1 < x < 5$ d) $\dfrac{8}{1+x^2/2},\ |x| < \sqrt{2}$

e) $\dfrac{2}{1+x^2},\ |x| < \sqrt{3}$ f) $1/x,\ 0 < x < 2$

g) $\dfrac{x+1}{x},\ x > 0$ lub $x < -2$ h) $\dfrac{x+1}{2},\ x > 0$

23.8. a) szereg zbieżny w $\langle -1; 1)$ b) zb. w $(-1; 1)$

c) zb. dla $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathscr{Z}$ d) zb. dla $x \neq k\pi,\ k \in \mathscr{Z}$

e) zb. w $(0; 2\rangle$ f) zb. w $(0; 2)$

g) zb. dla $x < -1$ lub $x > 1$ h) zb. dla $x \leqslant -1$ lub $x > 1$

i), j) szereg rozbieżny dla każdego x

k) zb. w $(-\infty; \infty)$ l) zb. w $(1; \infty)$

23.9. Rozwiązanie polega na znalezieniu majoranty $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ (s. 196) i stwierdzeniu jej zbieżności.

a) $\left|\dfrac{1}{x+2^n}\right| \leqslant \left\| \begin{matrix}\text{dla}\\ x \geqslant 0\end{matrix} \right\| \leqslant \dfrac{1}{2^n} = A_n$, szereg geometryczny zbieżny

b) $\left|\dfrac{n}{x+2^n}\right| \leqslant \left\| \begin{matrix}\text{dla}\\ x \geqslant 0\end{matrix} \right\| \leqslant \dfrac{n}{2^n} = A_n$,

kryterium pierwiastkowe (kryt. p.) $\sqrt[n]{A_n} \to \dfrac{1}{2}$, szer. zb.

c) $\left|\dfrac{nx}{x+2^n}\right| \leqslant \left\| \begin{matrix}\text{dla}\\ 0 \leqslant x \leqslant h\end{matrix} \right\| \leqslant \dfrac{nh}{2^n} = A_n$,

kryt. p. $\sqrt[n]{A_n} \to \dfrac{1}{2}$, szer. zb.

d) $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2} = A_n$, szer. harm. zb.

e) $\left|\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}} = A_n$, szer. harm. zb.

f) $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2} = A_n$, szer. harm. zb.

g) $\left|\dfrac{x}{1+n^2x}\right| = \left\| \begin{matrix}\text{dla}\\ x > 0\end{matrix} \right\| = \dfrac{1}{1/x+n^2} < \dfrac{1}{n^2} = A_n$, szer. harm. zb.

h) $\left|\dfrac{nx}{1+n^3x}\right| = \left\| \begin{matrix}\text{dla}\\ x > 0\end{matrix} \right\| = \dfrac{1}{\dfrac{1}{nx}+n^2} < \dfrac{1}{n^2} = A_n$, szer. harm. zb.

i) $\left|\dfrac{1}{x^2+n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2} = A_n$, szer. harm. zb.

j) $\left|\dfrac{x^2}{x^2+n^2}\right| \leqslant \left\| \begin{matrix}\text{dla}\\ |x| \leqslant h\end{matrix} \right\| \leqslant \dfrac{h^2}{n^2} = A_n$, szer. harm. zb.

k) Badanie funkcji x^n+x^{-n} wykazuje, że największą wartością tej funkcji w przedziale $\langle 1/2; 2\rangle$ jest 2^n+2^{-n}.

$$\left|\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})\right| \leqslant \left\| \begin{matrix}\text{dla}\\ 1/2\leqslant x\leqslant 2\end{matrix}\right\| \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(2^n+2^{-n}) <$$

$$< \frac{n^2}{\sqrt{n!}}2^{n+1} = A_n,\ \text{kryterium ilorazowe (kryt. il.)}\ \frac{A_{n+1}}{A_n}\to 0,$$

szer. zb.

l) $$\left|\frac{nx}{(1+x)(1+2x)+\ldots+(1+nx)}\right| \leqslant \left\| \begin{matrix}\text{dla}\\ x\geqslant h\end{matrix}\right\| \leqslant \frac{nx}{x\cdot 2x\cdot\ldots\cdot nx} =$$

$$= \frac{nx}{n!\,x^n} = \frac{1}{(n-1)!\,x^{n-1}} \leqslant \frac{1}{(n-1)!\,h^{n-1}} = A_n,$$

kryt. il. $\frac{A_{n+1}}{A_n}\to 0$, szer. zb.

m) Wyraz $u_0(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ jest w sąsiedztwie punktu $x=0$ nieograniczony. Oddzielamy ten wyraz od szeregu i majoryzujemy resztę

$$\left|\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right| < \left\| \begin{matrix}\text{dla}\\ x>0\\ n\geqslant 1\end{matrix}\right\| < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} = A_n,$$

szer. harm. zb.

23.10. a) Majorantą szeregu podcałkowego w przedziale $(-\infty;\infty)$ jest szereg o wyrazach $1/n^2$, który jest zbieżny, więc szereg podcałkowy jest jednostajnie zbieżny w przedziale $(-\infty;\infty)$ i możemy ten szereg całkować wyraz po wyrazie.

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-\cos nx}{n^3}\right]_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-1)^n+1}{n^3} = 2+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{5^3}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^3}$$

U w a g a. Otrzymany szereg jest zbieżny, ale obliczenie jego sumy wykracza poza ramy tej książki.

b) Rozumując jak w poprzednim zadaniu, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin nx}{n^3}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = 1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-1)^n}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^2} = \frac{\pi^3}{6}$

U w a g a. Wyniki zadań b) i c), trudne do obliczenia, podano wg literatury.

e) Szereg podcałkowy jest rozbieżny w punkcie $x=0$, ale jest zbieżny jednostajnie w przedziałach $(-\infty;-q\rangle$ i $\langle q;\infty)$, gdzie q jest dowolnie małą liczbą dodatnią. Całkę niewłaściwą $\int_{-\infty}^{\infty}$ uważamy za sumę dwóch całek niewłaściwych $\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}$.

Odpowiedź: $\pi^3/6$.

f) $$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n-x^2}\right)dx = \left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx =$$

$$= \left(\begin{matrix}\text{szer.}\\ \text{geom.}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{całka}\\ \text{Laplace'a}\\ \textit{Zarys II}, \text{ s. } 214\end{matrix}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{1-1/e}$$

23.11. a) $$\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x+2^n}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{1}{x+2^n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\ln(x+2^n)\Big]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\ln\frac{1+2^n}{2^2} = \ln\prod_{n=0}^{\infty}(1+1/2^n) = \ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdot\ldots\right)$$

(*Zarys II*, s. 399)

b) $$\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\frac{1+2^n}{2^n} = \ln\prod_{n=1}^{\infty}(1+1/2^n)^n = \ln\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{25}{16}\cdot\frac{729}{512}\cdot\ldots\right)$$

(*Zarys II*, s. 399)

c) $\sum_{n=1}^{\infty}n[1-\ln(1+1/m)^m]$, $m=2^n$

d) $\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{3+(x-2)}=\dfrac{1/3}{1+(x-2)/3}=$

$$=\frac{1}{3}\left[1-\frac{x-2}{3}+\dots+\left(-\frac{x-2}{3}\right)^n+\dots\right],\ R=3$$

e) $\ln\dfrac{1}{1+x}=\ln\dfrac{1}{1-(-x)}=\boxed{\begin{matrix}\text{wzór}\\ (24)\end{matrix}}=$

$$=-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{(-x)^n}{n}+\dots,\ R=1$$

f) $\ln(1+x)=-\ln\dfrac{1}{1+x}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dots-\dfrac{(-x)^n}{n}-\dots=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\ R=1$$

g) $\ln x=(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(x-1)^3}{3}-\dots=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n},\ R=1$$

h) $(1+x)\ln(1+x)=x+\dfrac{x^2}{1\cdot 2}-\dfrac{x^3}{2\cdot 3}+\dots=$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},\ R=1$$

i) $\dfrac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n,\ R=1$

j) $\dfrac{5x-12}{x^2+5x-6}=\dfrac{6}{x+6}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{1+x/6}+\dfrac{1}{1-x}=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-x/6)^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{6}\right)^n+1\right]x^n,\ R=1$$

k) $\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)}=x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+3x^6+\dots=$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n,\ R=1$$

23.17. a) $e^{x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\dots$

b) $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}\left[2-\dfrac{(2x)^2}{2!}+\dfrac{(2x)^4}{4!}-\dots\right]=1-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$

c) $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(2x)^2}{2!}-\dfrac{(2x)^4}{4!}+\dfrac{(2x)^6}{6!}-\dots\right]=$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

d) $\sqrt{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^n=$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\dots$$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}x^n=$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\dots$$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x)^n=$

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+\dots$$

g) $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\dots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

h) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n=$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\dots$$

b) $a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}$,

$$\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{3}\sin\left(3\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{5}\sin\left(5\frac{\pi}{2}x\right)+\ldots\right],$$
$|x| < 2$

c) $a_0 = 1,\ a_n = \int_1^2 \cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx = -\frac{2}{\pi}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}$,
$n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{Bmatrix} 0 & \text{dla } |x| < 1 \\ 1/2 & \text{dla } |x| = 1 \\ 1 & \text{dla } |x| > 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}\cos\left(3\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{5}\cos\left(5\frac{\pi}{2}x\right)-\ldots\right],\ |x| \leqslant 2$$

23.21. a) $a_0 = 1,\ a_n = \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2},\ b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots,$

$$|x| = \frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left[\cos(\pi x)+\frac{1}{3^2}\cos(3\pi x)+\frac{1}{5^2}\cos(5\pi x)-\ldots\right],$$
$|x| \leqslant 1$

b) $a_0 = \frac{2}{3},\ a_n = \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^n}{n^2},\ b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots,$

$$x^2 = \frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\left[\cos(\pi x)-\frac{1}{2^2}\cos(2\pi x)+\frac{1}{3^2}\cos(3\pi x)-\ldots\right],$$
$|x| \leqslant 1$

c) $a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{\pi n}$,

$$\begin{Bmatrix} 1-x & \text{dla } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -1-x & \text{dla } -1 \leqslant x < 0 \end{Bmatrix} =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(\pi x)}{1}+\frac{\sin(2\pi x)}{2}+\frac{\sin(3\pi x)}{3}+\ldots\right],\ |x| \leqslant 1$$

23.22. a) $a_0 = 1,\ a_n = \int_0^1 \cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n},\ n = 1, 2, \ldots;$

$$f(x) = \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{\cos\left(3\frac{\pi}{2}x\right)}{3}+\frac{\cos\left(5\frac{\pi}{2}x\right)}{5}-\ldots\right],$$
$0 \leqslant x \leqslant 2$

b) $b_n = \int_0^1 \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n},\ n = 1, 2, \ldots;$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\sin(\pi x)+\frac{\sin\left(3\frac{\pi}{2}x\right)}{3}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\left(5\frac{\pi}{2}x\right)}{5}+\ldots\right],\ 0 < x \leqslant 2$$

23.23. a) $a_0 = 3,\ a_n = \int_0^1 \cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx+\int_1^2 2\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx =$
$$= -\frac{2}{\pi}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n},\ n = 1, 2, \ldots;$$

$$f(x) = \frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{\cos\left(3\frac{\pi}{2}x\right)}{3}+\frac{\cos\left(5\frac{\pi}{2}x\right)}{5}-\ldots\right],$$
$0 \leqslant x \leqslant 2$

b) $b_n = \frac{2}{\pi}\frac{1+\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)-2\cos(n\pi)}{n},\ n = 1, 2, \ldots;$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left[3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\sin(\pi x)+\sin\left(3\frac{\pi}{2}x\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{5}\sin\left(5\frac{\pi}{2}x\right)-\ldots\right],\ 0 < x < 2$$

23.24. a) $a_0 = 2(\mathrm{e}-1)$, $a_n = -2\dfrac{1-\mathrm{e}(-1)^n}{1+n^2\pi^2}$, $n = 1, 2, \ldots$;

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}-1-2\left[\frac{1+\mathrm{e}}{1+\pi^2}\cos(\pi x)+\frac{1-\mathrm{e}}{1+4\pi^2}\cos(2\pi x)+\right.$$
$$\left.+\frac{1+\mathrm{e}}{1+9\pi^2}\cos(3\pi x)+\ldots\right],\ 0 \leqslant x \leqslant 1$$

b) $b_n = 2\pi\dfrac{n[1-\mathrm{e}(-1)^n]}{1+n^2\pi^2}$, $n = 1, 2, \ldots$;

$$\mathrm{e}^x = 2\pi\left[\frac{1+\mathrm{e}}{1+\pi^2}\sin(\pi x)+\frac{2(1-\mathrm{e})}{1+4\pi^2}\sin(2\pi x)+\right.$$
$$\left.+\frac{3(1+\mathrm{e})}{1+9\pi^2}\sin(3\pi x)+\ldots\right],\ 0 < x < 1$$

Niektóre całki nieoznaczone

Stałe całkowania opuszczono. Inne stałe: $a \neq 0$, $k \neq 0$, $n = 2, 3, \ldots$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{a^2+x^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

$$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{a^2-x^2}+\frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

$$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{a^2(a^2-x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{n-1}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}|$$

$$\int\sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+k}|$$

Jeśli $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $a > 0$, $\Delta = b^2-4ac \neq 0$, to

$$\int\frac{dx}{y} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2\sqrt{a}\,y+2ax+b|$$

$$\int y\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\,y-\frac{\Delta}{8a}\int\frac{dx}{y}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\cos x$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x\cos x$$

$$\int \sin^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$$

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\sin x\cos x - \frac{1}{4}\sin^3 x\cos x$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{1}{4}\sin x\cos^3 x$$

Całki $\int \sin^n x\,dx$, $\int \cos^n x\,dx$ — zob. s. 31.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \frac{-2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}, \qquad \int \frac{dx}{1-\sin x} = \frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \qquad \int \frac{dx}{1-\cos x} = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$$

$$\int \frac{dx}{k+\cos x} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{k^2-1}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{k^2-1}}{k+1}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right), & k^2>1 \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1-k^2}\,\operatorname{tg}\frac{x}{2}+(k+1)}{\sqrt{1-k^2}\,\operatorname{tg}\frac{x}{2}-(k+1)}\right|, & k^2<1 \end{cases}$$