Roman Leitner
Wojciech Matuszewski
Zdzisław Rojek

zadania z matematyki wyższej cz. I

Wydawnictwa Naukowo-Techniczne

zadania z matematyki wyższej

cz. I

Logika. Rachunek sieci
Równania liniowe
Geometria analityczna
Ciągi i szeregi
Rachunek różniczkowy
Geometria różniczkowa

Roman Leitner
Wojciech Matuszewski
Zdzisław Rojek

zadania z matematyki wyższej

Wydawnictwa Naukowo-Techniczne
Warszawa

Opiniodawca *Grzegorz Decewicz*
Redaktorzy *Małgorzata Rajwacka-Jachymek, Lilianna Szymańska*
Redaktor techniczny *Irena Milewska-Burczykowa*
Okładkę projektował *Wojciech Steifer*

51(076)

Książka zawiera zadania oraz krótkie informacje teoretyczne, instrukcje, rozwiązania i rysunki z zakresu: logiki, równań liniowych, geometrii analitycznej, rachunku różniczkowego i geometrii różniczkowej. Układ książki jest identyczny z układem książki R. Leitnera *Zarys matematyki wyższej cz. I*. Książka jest przeznaczona dla studentów wyższych szkół technicznych, ale mogą z niej też korzystać studenci niektórych wydziałów uniwersytetów i uczelni pedagogicznych, a także uczniowie klas matematyczno-fizycznych liceów ogólnokształcących.

Tytuł dotowany przez Ministra Edukacji Narodowej

© Copyright by Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1992
All rights reserved
Printed in Poland

ISBN 83-204-1338-9 całość
ISBN 83-204-1567-5 Cz. I

Spis treści

Rozdział 10

Funkcje wielu zmiennych-139

Rozdział 11

Funkcje uwikłane. Ekstremum warunkowe-149

Rozdział 12

Krzywe na płaszczyźnie i w przestrzeni-156

Rozdział 13

Powierzchnie-172

Odpowiedzi

Przedmowa

Niniejsza książka jest zbiorem zadań z matematyki wyższej. W jej zakres wchodzą: logika, rachunek sieci, przestrzenie metryczne, równania liniowe, macierze i wyznaczniki, wektory i ich zastosowania w geometrii analitycznej, ciągi i szeregi liczbowe, rachunek różniczkowy jednej i wielu zmiennych, funkcje uwikłane, ekstrema warunkowe, linie i powierzchnie drugiego stopnia, elementy geometrii różniczkowej na płaszczyźnie i w przestrzeni.

Każdą grupę zadań poprzedzono podaniem definicji, twierdzeń i instrukcji umożliwiających Czytelnikowi rozwiązywanie zadań także w przypadku, gdy nie pamięta on pewnych szczegółów teorii wyłożonej w książce. Zadania ułożono w kolejności: od łatwych — do trudniejszych. Na końcu książki podano rozwiązania. Dla pewnych zadań są to szczegółowe rozwiązania wzorcowe lub dokładne wykresy, dla pozostałych — wskazówki i odpowiedzi.

Układ treści i podział niniejszego zbioru na rozdziały jest taki, jak w książce R. Leitnera *Zarys matematyki wyższej, część I* (1977 lub 1981). W tej książce Czytelnik znajdzie potrzebne wiadomości i do tej książki odnoszą się odsyłacze w niniejszym zbiorze. Jednakowoż, dzięki informacjom i instrukcjom podanym w tym zbiorze, można z niego korzystać także bez pomocy *Zarysu*.

Obecnie wydano część II i część III książki R. Leitnera *Zarys matematyki wyższej*, wydanie zmienione, zawierające rachunek całkowy, równania różniczkowe, funkcje zespolone, przekształcenia Laplace'a i Fouriera, rozszerzenie teorii macierzy oraz dwa rozdziały: rachunek prawdopodobieństwa i statystykę matematyczną, które napisał J. Zacharski. Odpowiednikami tych dwóch książek będą opracowywane obecnie część II i część III *Zadań z matematyki wyższej*.

Warszawa, kwiecień 1990.

Roman Leitner
Wojciech Matuszewski
Zdzisław Rojek

Rozdział **1**

Logika

Zdanie

W logice *zdaniem* nazywamy wypowiedź oznajmującą, która w ramach danej nauki jest albo prawdziwa albo fałszywa. Prawdziwość i fałszywość są to dwie *wartości logiczne* zdania. Prawdziwość oznaczamy cyfrą 1, fałszywość — cyfrą 0. W tej książce ograniczamy się do zdań z zakresu matematyki.

1.1. Ustalić, czy poniższa wypowiedź jest zdaniem i jaka jest wartość logiczna tego zdania

a) Czy liczba π^2 jest większa od 10?
b) Należy zbadać, czy liczba π^2 jest większa od 10.
c) Zbadajmy czy liczba π^2 jest większa od 10.
d) Liczba π^2 jest większa od 10.
e) Liczba π^2 jest mniejsza od 10.
f) Liczba naturalna n jest mniejsza od 10.
g) Pewna liczba naturalna jest mniejsza od 10.
h) Każda liczba naturalna jest mniejsza od 10.

Rachunek zdań

Rachunek zdań jest to wyznaczanie wartości logicznej zdania złożonego, gdy są znane wartości logiczne zdań składowych. Jeśli są dane zdania p, q, to za pomocą *spójników logicznych* (*funktorów*) *nie* *i* *lub* *implikuje* *jest równoważne*

oznaczanych symbolami

$$\sim \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \Rightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

tworzymy zdania złożone

$$\sim p \qquad p \wedge q \qquad p \vee q \qquad p \Rightarrow q \qquad p \Leftrightarrow q$$

które mają następujące nazwy: *negacja* (zdania p), *koniunkcja* (zdań p, q), *alternatywa* (zdań p, q), *implikacja* (o poprzedniku p i następniku q) i *równoważność* (zdań p, q). Sens negacji jest następujący: jeśli zdanie p ma wartość logiczną 1, to zdanie $\sim p$ ma wartość logiczną 0, jeśli zaś zdanie p ma wartość logiczną 0, to zdanie $\sim p$ ma wartość logiczną 1, co wyrażamy krótko, pisząc

$$\sim 1 = 0 \qquad \sim 0 = 1$$

Podobnie definiujemy sens pozostałych czterech zdań złożonych

$1 \wedge 1 = 1$	$1 \vee 1 = 1$	$1 \Rightarrow 1 = 1$	$1 \Leftrightarrow 1 = 1$
$1 \wedge 0 = 0$	$1 \vee 0 = 1$	$1 \Rightarrow 0 = 0$	$1 \Leftrightarrow 0 = 0$
$0 \wedge 1 = 0$	$0 \vee 1 = 1$	$0 \Rightarrow 1 = 1$	$0 \Leftrightarrow 1 = 0$
$0 \wedge 0 = 0$	$0 \vee 0 = 0$	$0 \Rightarrow 0 = 1$	$0 \Leftrightarrow 0 = 1$

1.2. Wyznaczyć wartość logiczną zdania

a) $(\pi < 3)$ **b)** $(\pi > 3) \wedge (\pi < 3)$ **c)** $(\pi > 3) \vee (\pi < 3)$
d) $(\pi > 3) \Rightarrow (\pi^2 > 9)$ **e)** $(\pi > 3) \Rightarrow (\pi^2 < 9)$
f) $(\pi < 3) \Rightarrow (\pi^2 < 9)$ **g)** $(\pi < 3) \Rightarrow (\pi^2 > 9)$
h) $(\pi < 3) \Leftrightarrow (\pi^2 > 9)$ **i)** $(\pi < 3) \Leftrightarrow (\pi^2 < 9)$

Kolejność wykonywania działań logicznych

Działania określone za pomocą funktorów: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ wykonujemy w takiej kolejności, w jakiej je tu wymieniono. Przykład:

$$1 \vee 1 \wedge 0 = 1 \vee 0 = 1$$

Nawiasy spełniają taką rolę, jak w arytmetyce. Przykład:

$$(1 \vee 1) \wedge 0 = 1 \wedge 0 = 0$$

Formuły rachunku zdań

Jeśli litera p oznacza dowolne zdanie z zakresu danej nauki (prawdziwe lub fałszywe), to mówimy, że p jest *zmienną zdaniową* (przyjmującą wartości logiczne: 0 lub 1). Ze zmiennych zdaniowych $p, q, r, \ldots$ za pomocą funktorów tworzymy formuły rachunku zdań, które oznaczamy literami $P, Q, R, \ldots$ Formuły te przyjmują wartości logiczne 0 lub 1, więc mogą być uważane za zmienne zdaniowe i z nich z kolei można tworzyć bardziej złożone formuły.

1.3. Wyznaczyć wartość logiczną następujących formuł rachunku zdań przy podstawieniu $p = 1$, $q = 0$

a) $\sim p \wedge q$ **b)** $\sim p \vee \sim q$ **c)** $\sim p \Rightarrow q$ **d)** $p \wedge (q \vee \sim p)$
e) $\sim (p \Leftrightarrow q)$ **f)** $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ **g)** $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$
h) $p \vee (q \Rightarrow p \wedge q)$ **i)** $p \vee (q \Rightarrow p) \wedge q$ **j)** $[p \vee (q \Rightarrow p)] \wedge q$
k) $[(p \vee q) \Rightarrow p] \wedge q$ **l)** $\sim (p \wedge q) \Rightarrow \sim (p \vee q)$

Tautologie

Tautologia jest to formuła rachunku zdań, która przyjmuje wartość logiczną 1 przy dowolnym podstawieniu wartości logicznych za zmienne zdaniowe.

1.4. Wykazać, że poniższe formuły rachunku zdań są tautologiami

a) $P \vee \sim P$ — tertium non datur
b) $\sim (P \wedge \sim P)$ — prawo niesprzeczności
c) $\sim (P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$ — prawo de Morgana
d) $\sim (P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$ — prawo de Morgana
e) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow P \wedge Q \vee P \wedge R$ — rozdzielność $\wedge$ względem $\vee$
f) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ — rozdzielność $\vee$ względem $\wedge$
g) $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow Q \vee \sim P$ — implikacja i alternatywa
h) $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \Rightarrow \sim P$ — kontrapozycja
i) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ — równoważność i implikacja
j) $P \wedge Q \Rightarrow R \Leftrightarrow P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
k) $(P \vee Q) \wedge \sim P \Rightarrow Q$
l) $(P \Rightarrow Q) \wedge \sim Q \Rightarrow \sim P$
m) $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow P \wedge Q)$
n) $P \wedge Q \Rightarrow R \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$
o) $P \vee Q \Rightarrow R \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

Uwaga. Z tautologii 1.4 g) i) wynika, że każda formuła rachunku zdań daje się wyrazić za pomocą negacji, koniunkcji i alternatywy.

1.5. Wykazać, że poniższe formuły nie są tautologiami

a) $(P \wedge Q \Leftrightarrow R) \Leftrightarrow (R \Rightarrow P) \vee (R \Rightarrow Q)$
b) $(P \vee Q \Leftrightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

Reguły wnioskowania

Niech A, B będą formułami rachunku zdań. Wnioskowanie z prawdziwości A o prawdziwości B zapisujemy w postaci schematu

$$\frac{A}{B}$$

Wnioskowanie to jest *poprawne* wtedy i tylko wtedy, gdy implikacja $A \Rightarrow B$ jest tautologią.

1.6. Wykazać, że wnioskowania przedstawione za pomocą poniższych schematów są poprawne

a) $\dfrac{P \Rightarrow Q,\ \sim Q}{\sim P}$ **b)** $\dfrac{P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R}{P \Rightarrow R}$ **c)** $\dfrac{P \vee Q,\ \sim P}{Q}$

d) $\dfrac{P \Rightarrow Q,\ \sim P \Rightarrow Q}{Q}$ **e)** $\dfrac{P \Rightarrow Q,\ P \Rightarrow \sim Q}{\sim P}$

f) $\dfrac{P \Rightarrow Q,\ R \Rightarrow S}{P \wedge R \Rightarrow Q \wedge S}$ **g)** $\dfrac{P \Rightarrow Q,\ R \Rightarrow S}{P \vee R \Rightarrow Q \vee S}$

h) $\dfrac{\sim T \Rightarrow R \wedge \sim R}{T}$ **i)** $\dfrac{P \wedge \sim Q \Rightarrow R \wedge \sim R}{P \Rightarrow Q}$

j) $\dfrac{P \wedge \sim Q \Rightarrow \sim P}{P \Rightarrow Q}$

U w a g a. Przecinek w schemacie wnioskowania oznacza koniunkcję między formułą poprzedzającą przecinek i formułą następującą po przecinku.

Funkcja zdaniowa. Kwantyfikatory

Funkcja zdaniowa jest to wypowiedź, która zawiera pewną zmienną i staje się zdaniem, gdy za tę zmienną podstawimy dowolną wartość należącą do zakresu tej zmiennej. Wypowiedź $x < 10$ jest funkcją zdaniową zmiennej x; wypowiedź $x < y$ jest funkcją zdaniową dwóch zmiennych x, y. Zakładamy, że zmienne x, y, a, b w poniższych przykładach i zadaniach są rzeczywiste, tzn. że ich zakresem jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Kwantyfikator ogólny (duży) dotyczący zmiennej x

$$\bigwedge_{x}$$

oznacza: „dla każdego x".

Kwantyfikator szczegółowy (mały) dotyczący zmiennej x

$$\bigvee_{x}$$

odczytujemy: „dla pewnego x" albo „istnieje x takie, że".

Znak kwantyfikatora piszemy przed funkcją zdaniową, ujmując ją w nawiasy, jeśli jest wyrażeniem złożonym. Pod znakiem kwantyfikatora piszemy znak zmiennej, do której kwantyfikator się odnosi i ewentualne ograniczenie zakresu tej zmiennej. Funkcja zdaniowa zmiennej x pod działaniem kwantyfikatora dotyczącego zmiennej x staje się zdaniem.

1.7. Odczytać zdanie

a) $\bigwedge\limits_{x>0} \bigvee\limits_{a} \dfrac{x}{2} < a < x$ **b)** $\bigwedge\limits_{a} \bigvee\limits_{b>0} \bigwedge\limits_{x>0} \left(x < b \Rightarrow \dfrac{1}{x} > a\right)$

c) $\bigwedge\limits_{x,y} x^2+y^2 \geqslant 0$ **d)** $\bigwedge\limits_{\substack{x>0\\ y>0\\ x\neq y}} \dfrac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$

1.8. Zbadać prawdziwość zdań

a) $\bigvee\limits_{x} x^3 - x = 0$ **b)** $\bigwedge\limits_{x} x^2+1 > 0$ **c)** $\bigwedge\limits_{x,y} (y > x \vee y \leqslant x)$

d) $\bigwedge\limits_{x,y} xy = 1$ **e)** $\bigvee\limits_{x,y} xy = 1$ **f)** $\bigwedge\limits_{x} \bigvee\limits_{y} xy = 1$

g) $\bigwedge\limits_{x} \bigvee\limits_{y} x+y = 0$ **h)** $\bigvee\limits_{y} \bigwedge\limits_{x} x+y = 0$

i) $\bigwedge\limits_{x} \bigvee\limits_{y} y = x$ **j)** $\bigvee\limits_{y} \bigwedge\limits_{x} y = x$

1.9. Zbadać prawdziwość zdań

a) $\bigvee\limits_{x} \bigvee\limits_{y} (x-y)^2 = x^2 - y^2$ **b)** $\bigwedge\limits_{x} \bigvee\limits_{y} (x-y)^2 = x^2 - y^2$

c) $\bigvee\limits_{x} \bigwedge\limits_{y} (x-y)^2 = x^2 - y^2$ **d)** $\bigvee\limits_{y} \bigwedge\limits_{x} (x-y)^2 = x^2 - y^2$

e) $\bigwedge\limits_{y} \bigvee\limits_{x} (x-y)^2 = x^2 - y^2$ **f)** $\bigwedge\limits_{x} \bigwedge\limits_{y} (x-y)^2 = x^2 - y^2$

Zaprzeczenie kwantyfikatora

Jeśli w pewnym wyrażeniu znak negacji stojący bezpośrednio przed kwantyfikatorem, przestawimy z tym kwantyfikatorem, zmieniając jednocześnie kwantyfikator z dużego na mały, względnie z małego na duży, to otrzymamy wyrażenie równoważne. Zastąpienie pewnego wyrażenia wyrażeniem równoważnym nazywamy przekształceniem tego wyrażenia.

1.10. Napisać zaprzeczenie poniższego wyrażenia, po czym przekształcić to zaprzeczenie tak, aby w nim nie było znaku negacji.

a) $x > a$ **b)** $\bigwedge_x x > a$ **c)** $\bigwedge_x \bigvee_a x > a$

d) $x < a \vee x > b$ **e)** $\bigwedge_x \bigvee_a \bigvee_b (x < a \vee x > b)$

f) $x < a \wedge y < b$ **g)** $\bigwedge_x \bigwedge_y \bigvee_a \bigvee_b (x < a \wedge y < b)$

h) $x > b \Rightarrow x > a$ **i)** $\bigwedge_a \bigvee_b \bigwedge_x (x > b \Rightarrow x > a)$

1.11. Zbadać prawdziwość poniższych zdań, w których $\varphi(a, x)$ oznacza funkcję zdaniową $ax^2 + x - 3 < 0$

a) $\bigwedge_a \bigwedge_x \varphi(a, x)$ **b)** $\bigwedge_a \bigvee_x \varphi(a, x)$ **c)** $\bigvee_a \bigwedge_x \varphi(a, x)$

d) $\bigvee_a \bigvee_x \varphi(a, x)$ **e)** $\bigvee_x \bigwedge_a \varphi(a, x)$ **f)** $\bigwedge_x \bigvee_a \varphi(a, x)$

Rachunek sieci elektrycznych

Konstrukcja faktycznych sieci i ich działanie są zagadnieniami techniki. Tu przedstawiamy najprostszy *model sieci*, oparty na działaniu prądu stałego i elektromagnesów. Sieć składa się z zasilania, przewodników i funktorów.

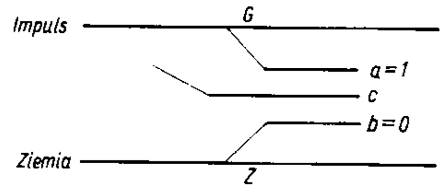
Zasilanie ma dwie linie: *gorącą G*, która doprowadza impuls oraz *zimną Z*, która jest uziemieniem (rys. 1).

Przewodnik ma dwa końce: *wejście* i *wyjście*. Przewodniki oznaczamy literami: $a, b, c, \ldots, x$.

Impuls. Jeśli wejście przewodnika a połączymy z linią G, to na przewodniku jest impuls, co oznaczamy cyfrą 1 i piszemy $a = 1$.

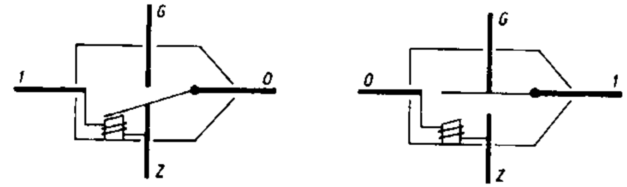
Brak impulsu. Jeśli wejście przewodnika b połączymy z linią Z, to na przewodniku nie ma impulsu, co oznaczamy cyfrą 0 i piszemy $b = 0$.

Zmienna. Jeśli wejście przewodnika c jest gotowe do połączenia z G lub Z, ale połączenie nie zostało jeszcze dokonane, to przewodnik c uważamy za zmienną, która może przyjąć wartość 0 lub 1:



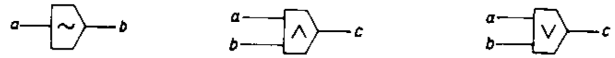
Funktory. W technice są używane *funktory* różnego rodzaju. W naszym modelu wprowadzamy 3 funktory: negator, multiplikator i sumator. Każdy funktor ma własne połączenia z liniami G i Z, jedno lub dwa wejścia i tylko jedno wyjście.

Negator (symbol ~) ma jedno wejście. Jeśli na wejściu jest impuls, to na wyjściu nie ma impulsu, a jeśli na wejściu nie ma impulsu, to na wyjściu jest impuls:



Działanie negatora jest analogiczne do negacji w rachunku zdań.

Multiplikator (symbol $\wedge$) i *sumator* (symbol $\vee$) mają po 2 wejścia, ich konstrukcję pomijamy, a ich działania są analogiczne do koniunkcji i alternatywy w rachunku zdań. Działania wszystkich trzech funktorów przedstawiamy za pomocą tabelek zerojedynkowych:



a	b
1	0
0	1

Negator

a	b	c
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Multiplikator

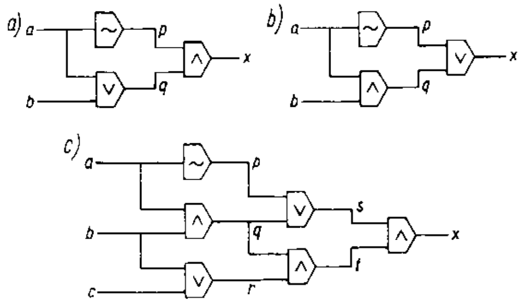
a	b	c
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Sumator

Umowa. W dalszym ciągu będziemy opuszczać na rysunkach linie G i Z oraz połączenia własne funktorów z tymi liniami.

Sieć ma skończenie wiele wejść $a, b, c, \ldots$, składa się ze skończenie wielu przewodników i funktorów oraz ma jedno wyjście x. Stan wyjścia, zależny od stanów na wejściach, opisuje tabelka zerojedynkowa. Dwie sieci uważamy za równoważne, jeśli ich tabelki zerojedynkowe są identyczne.

1.12. Napisać tabelki zerojedynkowe następujących sieci:



Analogia między rachunkiem zdań i rachunkiem sieci

Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między następującymi pojęciami rachunku zdań:
— zmienna zdaniowa, prawdziwość, fałszywość,
— negacja, koniunkcja, alternatywa,
— formuła rachunku zdań,
a odpowiednimi pojęciami rachunku sieci:
— przewodnik, impuls, brak impulsu,
— negator, multiplikator, sumator,
— sieć.
Każdej formule rachunku zdań odpowiada pewna sieć i na odwrót. Dwom równoważnym formułom odpowiadają dwie sieci równoważne. Sieci równoważne działają jednakowo, ale jedna z nich może mieć prostszą budowę i tę można wybrać do realizacji.

1.13. Napisać formuły rachunku zdań odpowiadające sieciom przedstawionym na rysunku w zad. 1.12.

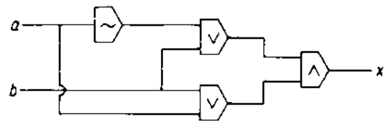
1.14. Narysować sieć odpowiadającą formule

a) $a \wedge (b \vee c) = x$ **b)** $a \wedge b \vee c \wedge d = x$
c) $(\sim a \vee b) \wedge (b \vee c) = x$ **d)** $a \vee (\sim a \wedge \sim b) \vee (a \wedge b) = x$

1.15. Korzystając z odpowiednich tautologii, sprowadzić formułę z zad. 1.14 d) do prostszej postaci i narysować sieć odpowiadającą tej prostszej postaci.

1.16. Narysować sieć odpowiadającą formule $(a \Rightarrow b) = x$.

1.17. Sprowadzić do prostszej postaci następującą sieć:



Rozdział **2**

Liczby, zbiory, odwzorowania, symbole

Rodzaje liczb

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$\mathcal{N} = \{1, 2, ...\}$ — zbiór liczb naturalnych,

$\mathcal{Z} = \{..., -2, -1, 0, +1, +2, ...\}$ — zbiór liczb całkowitych,

$\mathcal{Q}$ — zbiór liczb wymiernych, tj. liczb postaci $\frac{n}{m}$, gdzie $n, m \in \mathcal{Z}$, $m \neq 0$,

$\mathcal{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych,

$\mathcal{C}$ — zbiór liczb zespolonych.

Zgodnie z zasadą izomorfii, liczby naturalne identyfikujemy z liczbami całkowitymi dodatnimi, liczby całkowite identyfikujemy z liczbami wymiernymi o mianowniku równym 1 itd. Stąd wynika relacja

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{C}$$

Nadto, w celu skrócenia zapisów, przyjmujemy oznaczenie:

$\mathcal{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ — zbiór liczb całkowitych nieujemnych.

Zasada indukcji zupełnej

2.1. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathcal{N}$ i każdego $x \in \mathcal{R}$, $x > -1$, jest prawdziwa *nierówność Bernoulliego*

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

2.2. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathcal{N}$ jest prawdziwa równość

a) $1^2+2^2+3^2+ ... +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $1^3+2^3+3^3+ ... +n^3 = \frac{(n^2+n)^2}{4}$

c) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+ ... +n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

d) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+ ... +\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

2.3. Udowodnić następujące nierówności

a) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+ ... +\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$ dla $n \in \mathcal{N}$

b) $2^n > n^3$ dla $n \in \mathcal{N}$, $n \geqslant 10$

c) $2^n \geqslant n^4$ dla $n \in \mathcal{N}$, $n \geqslant 16$

2.4. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathcal{N}$ zachodzi równość

a) $1^2+5^2+9^2+ ... +(4n-3)^2 = \frac{1}{3}n(16n^2-12n-1)$

b) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+ ... +n(n+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$

c) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+ ... +n(n+1)(n+2) =$

$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

2.5. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathcal{N}$

a) liczba 10^n-1 jest podzielna przez 9,

b) liczba n^7-n jest podzielna przez 7,

c) liczba n^3+3n^2+5n+3 jest podzielna przez 2,

d) liczba n^3-n jest podzielna przez 6.

2.6. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathcal{N}$ i każdego $x \in \mathcal{R}$, $x \geqslant 0$, jest prawdziwa nierówność Bernoulliego

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

2.7. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathcal{N}$ i każdego $x \in \mathcal{R}$, $x \neq k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, zachodzi równość

a) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n-1)x = \dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$

b) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n-1)x = \dfrac{1-\cos 2nx}{2\sin x}$

2.8. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathcal{N}$

a) liczba $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ jest podzielna przez 133,

b) liczba $2^{(2^n)} - 6$ jest podzielna przez 10, jeśli $n \geqslant 2$,

c) wielomian $W_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ jest podzielny przez trójmian $x^2 - 2x + 1$.

2.9. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathcal{N}$ zachodzi nierówność

a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \geqslant \sqrt{n^n}$ **b)** $\dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \geqslant \dfrac{4^n}{n+1}$

Rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych

2.10. Nie wykonując dzielenia, orzec, które z poniższych ułamków

$$\frac{7}{4}, \frac{11}{8}, \frac{6}{7}, \frac{57}{75}, \frac{79}{80}, \frac{59}{60}, \frac{121}{111}, \frac{1}{1280}, \frac{1}{1300}$$

mają rozwinięcia dziesiętne skończone.

2.11. Zwinąć (tzn. sprowadzić do postaci ułamka zwykłego) następujące ułamki dziesiętne okresowe

a) $0,(7) = 0,7777\ldots$ **b)** $0,2(4)$ **c)** $3,(15)$ **d)** $1,1(23)$

e) $0,(237)$ **f)** $0,01(34)$

Systemy pozycyjne

System pozycyjny o podstawie p $(p \in \mathcal{Z}, 0 \neq |p| \neq 1)$ jest to przedstawienie dowolnej liczby w postaci sumy potęg liczby p. Zapis $(abc,d)_p$ oznacza liczbę $ap^2 + bp^1 + cp^0 + dp^{-1}$.

2.12. Jaką liczbę oznacza zapis

a) $(1001)_2$ **b)** $(11001)_2$ **c)** $(120)_3$ **d)** $(5402)_6$ **e)** $(7,3)_8$

f) $(0,03)_7$ **g)** $(100101)_{-2}$ **h)** $(11010)_{-2}$ **i)** $(122)_{-3}$ **j)** $(41)_{-5}$

2.13. Zapisać liczbę

a) 17 **b)** 55 **c)** 81 **d)** 1000 **e)** -25 **f)** 0,1

w systemach pozycyjnych o podstawach: 9, 7, 5, 3, 2, -2.

Liczby niewymierne

Pierwiastek arytmetyczny $\sqrt[s]{c}$, $c > 0$, $s \in \mathcal{N}$, możemy obliczyć metodą przedstawioną w zadaniach 6.19 i 6.20. Liczbę $\pi = 3,1415926\ldots$(stosunek długości okręgu do jego średnicy) możemy obliczyć ze związków

$$\pi/6 = \arcsin\frac{1}{2}, \quad \arcsin x = x + \frac{1}{2}x^3/3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^5/5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^7/7 + \ldots \text{ dla } |x| < 1$$

Liczbę $e = \lim(1+1/n)^n = 2,7182818284\ldots$ (podstawę logarytmów naturalnych) obliczamy jako sumę szeregu

$$e = 1/0! + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \ldots$$

2.14. Udowodnić nierówność

a) $\sqrt[3]{30} < \pi < \sqrt{10}$ **b)** $\sqrt[3]{20} < e < \sqrt[3]{20,1}$

Wyrażenia niewymierne

Przekształcając wyrażenia niewymierne, korzystamy z tożsamości

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2) \qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Na przykład

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

U m o w a. W zadaniach 2.16–2.23 litery x, y oznaczają zmienne rzeczywiste.

2.15. Sprowadzić do prostszej postaci liczbę

a) $(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^2$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}+1}$

c) $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1} + \dfrac{4}{\sqrt{6}-2} - \dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+11)$

d) $\dfrac{2}{\sqrt{10}+5}+\dfrac{5}{\sqrt{10}-2}-\dfrac{7}{\sqrt{10}}$ e) $\dfrac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$

f) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

g) $\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2$

2.16. Obliczyć wartość wyrażenia

a) $x^3+3x-14$ dla $x=(7+5\sqrt{2})^{1/3}-(7+5\sqrt{2})^{-1/3}$

b) $(x+1)^{-1}+(y+1)^{-1}$ dla $x=(2+\sqrt{3})^{-1}$, $y=(2-\sqrt{3})^{-1}$

2.17. Sprowadzić następujące wyrażenie do prostszej postaci, zakładając, że x, y przyjmują wartości, dla których dane wyrażenie jest określone

a) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}}$

b) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}(x\sqrt{x}-1)$

c) $\dfrac{x\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2y\sqrt{x}}\right)^{-1}+y\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{y}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{x+\sqrt{xy}}{2xy}\right)^{-1}+\left(\dfrac{y+\sqrt{xy}}{2xy}\right)^{-1}}$

d) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}-\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}-\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^{-2}$

e) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}+1\right)$

f) $\left(\dfrac{3x^{-1/3}}{x^{2/3}-2x^{-1/3}}-\dfrac{x^{1/3}}{x^{4/3}-x^{1/3}}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$

g) $\dfrac{x\sqrt{x}-x}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}$

h) $\dfrac{x+10\sqrt{x}+\sqrt{20}(\sqrt[4]{x^3}+5\sqrt[4]{x})+25}{(x-25)(\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{125})^{-1}(\sqrt{x}+\sqrt[4]{25x}+5)}$

i) $\sqrt{x}\left(\dfrac{x+\sqrt[4]{x^3y^2}+y\sqrt[4]{xy^2}+y^2}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y})^2}-y\right)^{-1}+\dfrac{1}{x^{-1/4}y^{1/2}-1}$

j) $\dfrac{1}{x^{1/4}+x^{1/8}+1}+\dfrac{1}{x^{1/4}-x^{1/8}+1}-\dfrac{2x^{1/4}-2}{x^{1/2}-x^{1/4}+1}$

2.18. Sprowadzić poniższe wyrażenie do prostszej postaci i obliczyć jego wartość

a) $\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{\sqrt[3]{(x^2-xy)^2}}:\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{(\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3})\sqrt[3]{x^2}}$ dla $x=1,2$, $y=0,6$

b) $\sqrt{x^2+y}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y}}+y\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}}}{x+\sqrt{x^2+y}}$ dla $x=1,6$, $y=1,44$

c) $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2(1-x^2)$ dla $x=0,8$

d) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\sqrt{1+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}}$ dla $x=9$, $y=0,04$

2.19. Rozwiązać równanie

a) $\sqrt{12-x}=x$ b) $x-\sqrt{x+1}=5$ c) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$

d) $3x-\sqrt{18x+1}+1=0$ e) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$

f) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$ g) $\sqrt{3x-5}=3-\sqrt{x-2}$

h) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$

i) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$

j) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{6-x}$ k) $x^3=2\sqrt[3]{2x-1}-1$

l) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$

m) $\sqrt{x^2-5x+6}=\sqrt[8]{9x-10-2x^2}$

2.20. Rozwiązać nierówność

a) $\sqrt{9x-20}<x$ b) $\sqrt{2x-1}<x-2$ c) $\sqrt{2x-x^2}<5-x$

d) $x<\sqrt{x^2+x-2}$ e) $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x-2}<1$ f) $\dfrac{1-\sqrt{21-4x-x^2}}{x+1}\geqslant 0$

g) $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$ h) $\sqrt{x-6}-\sqrt{10-x}\geqslant 1$

i) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$

Wartość bezwzględna (moduł)

2.21. Rozwiązać równanie

a) $|x+2|=6-2x$ b) $|3x-2|+x=11$ c) $|x|-|x-2|=2$

d) $2|x|-|x+1|=2$ e) $x^2+|x-1|=1$

f) $|x^2+4x+2|=\dfrac{5x+16}{3}$ g) $|x^2-6x+7|=\dfrac{5}{3}x-3$

h) $|x+1|-|x^2-1|=0$ i) $|x^2-1|+|x^2-x|=x$

j) $2|x+6|+|x-6|-|x|=18$ k) $||x+1|-2|=x-1$

2.22. Rozwiązać nierówność

a) $|5-2x|<1$ b) $|2x-4|<x-1$ c) $x^2-5|x|+6<0$

d) $|x+2|-|x-1|\leqslant x-\dfrac{3}{2}$ e) $|x^2-2x|<x$

f) $|x-6|>|x^2-5x+9|$ g) $|x-2|-|x-1|\geqslant|x+1|-5$

h) $|x^3-1|<x^2+x+1$ i) $\left|\dfrac{1}{x+2}\right|<\left|\dfrac{2}{x-1}\right|$ j) $\left|\dfrac{5x-3}{2x+7}\right|<2$

2.23. Udowodnić, że poniższe nierówności są prawdziwe dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y

a) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ b) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$

c) $||x|-|y||\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$

Zbiory

Zbiór *skończony* A możemy określić, wymieniając wszystkie jego elementy $a_1,\dots,a_n$ i pisząc

$$A=\{a_1,\dots,a_n\}$$

Zbiór *nieskończony* A określamy za pomocą pewnego warunku W, pisząc

$$A=\{x\colon W(x)\}$$

co odczytujemy: „A jest zbiorem tych x, które spełniają warunek W", rozumiejąc przez to, że A jest zbiorem wszystkich x spełniających warunek W i tylko tych x, które spełniają warunek W. Na przykład *różnicę* zbiorów A, B określamy wzorem

$$A\setminus B=\{x\colon(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$$

a *produkt* zbiorów A, B określamy wzorem

$$A\times B=\{(x,y)\colon(x\in A)\wedge(y\in B)\}$$

2.24. Z ilu elementów składa się zbiór

a) $\{x\in\mathcal{N}\colon x^2<5\}$ b) $\{x\in\mathcal{Z}\colon x^2<5\}$ c) $\{x\in\mathcal{Q}\colon x^2<5\}$

d) $\{x\in\mathcal{R}\colon x^2<5\}$ e) $\{x\in\mathcal{Q}\colon x^2=2\}$ f) $\{x\in\mathcal{R}\colon x^2=2\}$

2.25. Które z poniższych zbiorów są skończone, a które — nieskończone? (W zadaniach a), b), c) x jest miarą łukową kąta).

a) $\{x\in\mathcal{R}\colon\sin x=0\}$ b) $\{x\in\mathcal{Q}\colon\sin x=0\}$ c) $\{x\in\mathcal{Q}\colon\sin\pi x=0\}$

d) $\{x\in\mathcal{R}\colon x^2+\pi x-1=0\}$ e) $\left\{x\in\mathcal{R}\colon|x|=2-\dfrac{11}{13}x\right\}$

f) zbiór wspólnych podzielników liczb 171 i 8427

g) zbiór wspólnych wielokrotności liczb 171 i 8427.

2.26. Dane są zbiory: A — prostokątów, B — rombów, C — czworokątów, D — trapezów, E — kwadratów, F — wielokątów, G — równoległoboków. Wypisać relacje zawierania między tymi zbiorami.

Uwaga: Do podzbiorów dowolnego zbioru A zaliczamy także zbiór A oraz zbiór pusty $\emptyset$.

2.27. **a)** Wypisać wszystkie podzbiory trójelementowego zbioru $T = \{a, b, c\}$. Ile podzbiorów ma zbiór T?
b) Ile podzbiorów ma czteroelementowy zbiór $U = \{a, b, c, d\}$?
c) Ile podzbiorów ma zbiór n-elementowy?

2.28. Dane są zbiory: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, d, f\}$, $C = \{b, d, f, g\}$. Wyznaczyć zbiór
a) $A \cup B \cup C$ **b)** $A \cap B \cap C$ **c)** $A \setminus B$ **d)** $B \setminus A$
e) $(A \setminus B) \setminus C$ **f)** $(B \setminus A) \setminus C$

2.29. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą równości
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (rozdzielność $\cap$ względem $\cup$)
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (rozdzielność $\cup$ względem $\cap$)
c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
e) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

2.30. Podać przykład zbiorów A, B, dla których
a) $(A \cup B) \setminus B \neq A$ **b)** $(A \setminus B) \cup B \neq A$

2.31. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C
a) jeśli $A = A \cap B$, to $A \subset B$,
b) jeśli $A = A \cup B$, to $B \subset A$,
c) jeśli $A = (A \cup B) \setminus B$, to zbiory A, B są rozłączne,
d) jeśli $A = (A \setminus B) \cup B$, to $B \subset A$,
e) jeśli $A = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, to $A \subset (B \cup C)$,
f) jeśli $A = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, to $(B \cap C) \subset A$.

2.32. Dane są zbiory $A = \{a, b\}$, $F = \{f, g\}$, $P = \{p, r\}$. Wyznaczyć produkty: $A \times F$, $A \times F \times P$, $F \times A$, $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$.

2.33. Udowodnić, że jeśli zbiory X i Y są niepuste, to z równości $X \times Y = Y \times X$ wynika równość $X = Y$.

Zbiory liczb

Kres górny, kres dolny, element największy i *element najmniejszy* zbioru Z są oznaczane symbolami

$$\sup Z, \inf Z, \max Z, \min Z$$

2.34. Dane są przedziały $A = (1; 2)$, $B = \langle 2; 4 \rangle$, $C = \langle 3; 5 \rangle$, $D = (2; \infty)$. Wyznaczyć zbiór
a) $A \cup B$ **b)** $B \cup C$ **c)** $A \cap B$ **d)** $B \cap C$ **e)** $C \cap D$ **f)** $A \setminus B$
g) $B \setminus A$ **h)** $B \setminus C$ **i)** $C \setminus B$ **j)** $B \setminus D$ **k)** $D \setminus B$ **l)** $C \setminus D$,
m) $D \setminus C$

2.35. Wyznaczyć min, inf, sup, max następujących zbiorów:
a) $\{\sqrt[3]{30}, \pi, \sqrt{10}\}$ **b)** $\left\{x: x = \frac{1}{n}, n \in \mathcal{N}\right\}$
c) $\left\{x: |x| = \frac{1}{n}, n \in \mathcal{N}\right\}$ **d)** $\left\{x: |x| = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathcal{N}\right\}$
e) $\{x: x = 2^k, k \in \mathcal{Z}\}$ **f)** $\{x: x = (-2)^n, n \in \mathcal{N}\}$
g) $(a; b)$, $a < b$ **h)** $\langle a; b \rangle$, $a < b$ **i)** $(a; \infty)$
j) $\langle a; \infty)$ **k)** $(-\infty; b)$ **l)** $(-\infty; b\rangle$

2.36. Które ze zbiorów występujących w poprzednim zadaniu są ograniczone?

2.37. Udowodnić, że suma skończenie wielu zbiorów ograniczonych jest zbiorem ograniczonym. Podać przykład wskazujący na to, że suma nieskończenie wielu zbiorów ograniczonych może być zbiorem nieograniczonym.

2.38. Podać interpretację geometryczną na płaszczyźnie Oxy następujących produktów:
a) $\langle 1; 2 \rangle \times \langle 1; 4 \rangle$ **b)** $(-1; 1) \times (-1; 1)$ **c)** $\langle 0; 1 \rangle \times \{2; 3\}$
d) $\mathcal{N} \times \{1\}$ **e)** $\mathcal{R} \times \{1\}$ **f)** $\mathcal{R} \times \langle 0; \infty)$ **g)** $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$

Odwzorowanie (funkcja). Obraz i przeciwobraz

Jeśli w pewnych rozważaniach ograniczamy się do elementów i podzbiorów pewnego ustalonego zbioru, to zbiór ten nazywamy *przestrzenią*.

Jeśli są dane: 1° przestrzeń X i pewien jej niepusty podzbiór D, 2° przestrzeń Y, 3° przepis f, który każdemu elementowi x zbioru D przyporządkowuje pewien (dokładnie jeden) element y przestrzeni Y, to mówimy, że jest określone *odwzorowanie* f zbioru D w przestrzeń Y albo *funkcja* f odwzorowująca zbiór D w przestrzeń Y, co zapisujemy

$$f: D \to Y \qquad (1)$$

Zbiór D nazywamy *dziedziną* funkcji, x — *argumentem* funkcji, y — *wartością funkcji* odpowiadającą argumentowi x i piszemy

$$y = f(x)$$

Zbiór wartości funkcji f nazywamy *przeciwdziedziną funkcji* f.

Niech będzie dane odwzorowanie (1) i niech $A \subset D$. Zbiór tych wartości funkcji f, które odpowiadają argumentom x należącym do A, nazywamy *obrazem zbioru* A *w odwzorowaniu* f i oznaczamy symbolem $f(A)$.

Niech $B \subset Y$. Zbiór tych argumentów funkcji f, którym odpowiadają wartości funkcji f należące do B, nazywamy *przeciwobrazem zbioru* B *w odwzorowaniu* f i oznaczamy symbolem $f^{-1}(B)$.

2.39. Dane jest odwzorowanie $f: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ określone wzorem $f(x) = |x|$. Wyznaczyć obraz zbioru

a) $\langle 0;1 \rangle$ **b)** $\langle -1;1 \rangle$ **c)** $\mathscr{R}$ **d)** $\mathscr{Z}$

Wyznaczyć przeciwobraz zbioru

e) $\langle 0;1 \rangle$ **f)** $\langle -1;1 \rangle$ **g)** $\mathscr{N}_0$ **h)** $\mathscr{Z}$

2.40. Dane jest odwzorowanie $f: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ określone wzorem $f(x) = x^2$. Wyznaczyć obraz zbioru

a) $\{-1, 0, 1\}$ **b)** $\langle 1;3 \rangle$ **c)** $\langle -4;3 \rangle$

Wyznaczyć przeciwobraz zbioru

d) $\mathscr{N}_0$ **e)** $\mathscr{Z}$ **f)** $\langle 1;9 \rangle$

2.41. Dane jest odwzorowanie $f: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ określone wzorem $f(x) = \sin x$, gdzie x jest miarą łukową kąta. Wyznaczyć obraz zbioru

a) $\langle 0;\pi \rangle$ **b)** $(0;\pi)$ **c)** $\mathscr{R}$ **d)** $\{x: x = k\pi, k \in \mathscr{Z}\}$

Wyznaczyć przeciwobraz zbioru

e) $\{0\}$ **f)** $(-1/2; 1/2)$ **g)** $(-\infty; 1\rangle$ **h)** $(1; \infty)$.

2.42. Dane jest odwzorowanie $f: D \to Y$ oraz podzbiory A, A_1, A_2 dziedziny D i podzbiory B, B_1, B_2 przestrzeni Y. Udowodnić, że

a) $A \subset f^{-1}(f(A))$, $B \supset f(f^{-1}(B))$

b) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,
$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

c) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,
$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

d) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$,
$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

Podać przykłady wskazujące na to, że w powyższych tezach żaden znak zawierania nie może być zastąpiony znakiem równości.

Funkcja jednej zmiennej

Jeśli w określeniu funkcji (1) przyjmiemy $X = Y = \mathscr{R}$, to otrzymamy funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej. Funkcję tę nazywamy krótko: *funkcją jednej zmiennej*. Określenie dziedziny funkcji jest częścią składową definicji tej funkcji i funkcje opisane tym samym wzorem w dwóch różnych dziedzinach — to dwie różne funkcje. Jeśli jednak funkcja jednej zmiennej jest *elementarna* (Zarys, s. 264) i nie ma zastrzeżeń co do jej dziedziny, to dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych, dla których działania występujące we wzorze określającym tę funkcję są wykonalne w zakresie $\mathscr{R}$.

2.43. Wyznaczyć dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji

a) $y = \sqrt{x}$ **b)** $y = 1/x$ **c)** $y = 10^x$
d) $y = \lg x$ **e)** $y = \lg\lg x$ **f)** $y = \lg\lg\lg x$

Funkcja odwrotna

Jeśli funkcja f o dziedzinie D i zbiorze wartości W jest *różnowartościowa* (tzn. różnym argumentom odpowiadają różne wartości funkcji), to istnieje funkcja *odwrotna* φ, która każdemu $y \in W$ przyporządkowuje ten element $x \in D$, któremu funkcja f przyporządkowała y

$$\varphi(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \quad \text{dla} \quad y \in W \tag{2}$$

Jeśli funkcja f nie jest różnowartościowa w dziedzinie D, ale zawężenie funkcji f do pewnego podzbioru D_1 dziedziny D jest funkcją różnowartościową, to istnieje funkcja ψ odwrotna do tego zawężenia

$$\psi(y) = x \Leftrightarrow (f(x) = y, x \in D_1) \quad \text{dla} \quad y \in W_1 \tag{3}$$

2.44. Wykazać, że funkcja elementarna dana poniższym wzorem jest różnowartościowa i wyznaczyć funkcję odwrotną

a) $y = \dfrac{1}{x}$ **b)** $y = 5x + 10$ **c)** $y = 10^x$

d) $y = x^3$ **e)** $y = \lg\lg x$ **f)** $y = x + 2\sqrt{x} + 1$

2.45. Funkcja elementarna dana poniższym wzorem nie jest różnowartościowa, ale pewne jej zawężenie jest różnowartościowe. Znaleźć funkcję odwrotną do tego zawężenia.

a) $y = x^2$ **b)** $y = 1/x^2$ **c)** $y = \sin x$
d) $y = \operatorname{tg} x$ **e)** $y = 1/(1+x^2)$ **f)** $y = x^2 - 4x + 3$

2.46. Funkcja $y = (x^2 - 1)^2$ (naszkicuj wykres) nie jest różnowartościowa, ale pewne jej zawężenia są różnowartościowe. Wyznaczyć funkcje odwrotne do tych zawężeń.

Uwagi o symbolach $c^{-1}, f^{-1}, f^{-1}(B)$

Jeśli c jest liczbą różną od 0, to symbol c^{-1} oznacza *odwrotność* liczby c, tj. $c^{-1} = 1/c$. W niektórych książkach symbolem f^{-1} oznacza się *funkcję odwrotną* do f. Grozi to kolizją oznaczeń, gdyż znak f^{-1} może być też odczytany jako $1/f$. Dlatego w tej książce nie wprowadzamy takiego oznaczenia funkcji odwrotnej.

Symbol $f^{-1}(B)$ oznacza *przeciwobraz* zbioru B w odwzorowaniu f (przy czym odwracalność funkcji f nie jest konieczna, zob. s. 32). Możliwy jest inny sposób odczytania tego symbolu. Jeśli bowiem ktoś uzna f^{-1} za znak funkcji odwrotnej do f, to odczyta $f^{-1}(B)$ jako obraz zbioru B w odwzorowaniu f^{-1}. Jest to pojęcie różne od poprzedniego. Jednakowoż, jeśli funkcja odwrotna do f istnieje i zbiór B zawiera się w jej dziedzinie, to symbol $f^{-1}(B)$ w obu sposobach odczytania oznacza ten sam zbiór.

Superpozycja funkcji

2.47. Dane są funkcje $f(x) = 2x-1$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sin x$. Utworzyć superpozycję
a) $f(g)$ **b)** $g(f)$ **c)** $f(h)$ **d)** $h(f)$ **e)** $g(h)$ **f)** $h(g)$
g) $f(f)$ **h)** $g(g)$ **i)** $h(h)$ **j)** $f[g(h)]$ **k)** $f[h(g)]$ **l)** $h[f(g)]$

Symbole sumy i iloczynu

Sumę i iloczyn wyrazów $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_q$, gdzie p, q są pewnymi liczbami całkowitymi, $p \leqslant q$, zapisujemy w następującej postaci

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q, \qquad \prod_{k=p}^{q} a_k = a_p \cdot a_{p+1} \cdot \ldots \cdot a_q$$

2.48. Napisać za pomocą symbolu sumy lub iloczynu wyrażenie
a) $1^r + 2^r + 3^r + 4^r + \ldots + 10^r$
b) $1^0 + 2^1 + 3^2 + 4^3 + \ldots + 10^9$
c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 99 \cdot 100$
d) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
e) $5 + 6x + 7x^2 + 8x^3 + 9x^4 + 10x^5$
f) $5 + 6x + 7x^2 + \ldots + (n+5)x^n \quad n \in \mathcal{N}_0$
g) $x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots + xy^{n-1} + y^n \quad n \in \mathcal{N}$
h) $(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+n) \quad n \in \mathcal{N}$
i) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$
j) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 101$
k) $1 \cdot 11 \cdot 102 \cdot 1003 \cdot 10004$

2.49. Napisać za pomocą symbolu sumy wyrażenia występujące w zadaniach 2.2 a), b), c), d); 2.3 a); 2.4 a), b), c); 2.7 a), b).

Wartości średnie

Wartości średnie ciągu n liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są określone następującymi wzorami:

średnia arytmetyczna $\quad A = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$

średnia geometryczna $\quad G = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$

średnia harmoniczna $\quad H = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$

średnia kwadratowa $\quad K = \sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + \ldots + a_n^2)}$

2.50. Obliczyć z dokładnością do 0,1 średnie: arytmetyczną, geometryczną, harmoniczną i kwadratową liczb
a) 4, 10, **b)** 16, 20, 18, 20, 27, 24

Silnia i podwójna silnia

$0! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$ dla $n \in \mathcal{N}$

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-2)n & \text{dla } n \text{ naturalnych nieparzystych} \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (n-2)n & \text{dla } n \text{ naturalnych parzystych} \end{cases}$$

2.51. Obliczyć $n!$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$.
2.52. Obliczyć 4!!, 5!!, 8!!, 11!!
2.53. Obliczyć $\frac{n!}{n!!}$ dla $n \geqslant 2$

Symbol Newtona

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}, \quad n \in \mathcal{R}, k \in \mathcal{N}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad n, k \in \mathcal{N}_0,\ k \leqslant n$$

2.54. Obliczyć dla $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ wartość symbolu Newtona
a) $\binom{4}{k}$ **b)** $\binom{5}{k}$ **c)** $\binom{-3}{k}$ **d)** $\binom{0,6}{k}$

2.55. Obliczyć $\binom{274}{2}$ i $\binom{274}{3}$, a następnie, korzystając z własności symbolu Newtona, obliczyć $\binom{274}{272}$, $\binom{274}{271}$ oraz $\binom{275}{3}$.

Wzór dwumienny Newtona

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \qquad a, b \in \mathscr{R}, n \in \mathscr{N}_0$$

2.56. Rozwinąć według wzoru dwumiennego Newtona wyrażenie
a) $(a+b)^5$ **b)** $(a-b)^5$ **c)** $(1+x)^6$ **d)** $(1-x)^6$
e) $(1+\sqrt{x})^4$ **f)** $(1+\sqrt{x})^4(1-\sqrt{x})^4$

2.57. Napisać czwarty wyraz rozwinięcia wyrażenia $(x^3 - 2/x^2)^{19}$

2.58. Dla jakiego n współczynniki w siódmym i dwunastym wyrazie rozwinięcia wyrażenia $(1+x)^n$ są jednakowe?

2.59. W rozwinięciu wyrażenia $(2+\sqrt[3]{x})^{10}$ znaleźć wyraz proporcjonalny do x^2.

2.60. Dla jakiej wartości n współczynniki drugiego, trzeciego i czwartego wyrazu rozwinięcia wyrażenia $(a+b)^n$ tworzą ciąg arytmetyczny?

2.61. Znaleźć wyraz niezależny od x w wyrażeniu

$$\left(\frac{x+1}{x^{2/3}-x^{1/3}+1} - \frac{x-1}{x-x^{1/2}}\right)^{10}$$

Przykłady przestrzeni metrycznych

Przestrzeń *arytmetyczna dwuwymiarowa* jest to zbiór par liczb rzeczywistych (x_1, x_2). Pary te nazywamy punktami tej przestrzeni i oznaczamy: $0 = (0,0)$, $x = (x_1, x_2)$, $p = (p_1, p_2)$ itp. Jeśli w tej przestrzeni wprowadzimy pewną *metrykę* (*Zarys*, s. 62), to otrzymamy pewną przestrzeń *metryczną*. Będziemy rozważać następujące metryki:

$$\varrho(p,q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$$

$$\lambda(p,q) = |p_1-q_1|+|p_2-q_2|$$

$$\sigma(p,q) = \begin{cases} |p_1-q_1|, & \text{gdy } p_2 = q_2 \\ |p_1|+|q_1|+|p_2-q_2|, & \text{gdy } p_2 \neq q_2 \end{cases}$$

$$\varphi(p,q) = \begin{cases} \varrho(p,q), & \text{gdy } 0, p, q \text{ leżą na prostej} \\ \varrho(p,0)+\varrho(0,q), & \text{gdy } 0, p, q \text{ nie leżą na prostej} \end{cases}$$

$$\zeta(p,q) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } p = q \\ 1, & \text{gdy } p \neq q \end{cases}$$

Metryki te mają nazwy: ϱ — *euklidesowa*, λ — *uliczna*, σ — *rzeczna*, φ — *kolejowa*, ζ — *zerojedynkowa*.

2.62. Dane są punkty: $p = (4,3)$, $q = (4,6)$, $r = (8,6)$. Obliczyć odległości między każdymi dwoma z tych punktów według każdej z powyższych pięciu metryk.

Średnica zbioru i odstęp dwóch zbiorów w przestrzeni metrycznej

Średnica zbioru A (symbol: dia A) jest określona wzorem

$$\operatorname{dia} A = \sup\{\varrho(x,y): x \in A \wedge y \in A\}$$

Odstęp zbiorów A, B (symbol: dist(A,B)) jest określony wzorem

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{\varrho(x,y): x \in A \wedge y \in B\}$$

2.63. W dwuwymiarowej przestrzeni arytmetycznej z metryką euklidesową dane są zbiory: trójkąt T o wierzchołkach: $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$ i zbiór U punktów (p_1, p_2), gdzie $p_1 = 1/n$, $n \in \mathscr{N}$, $p_2 = 0$. Wyznaczyć: dia T, dia U, dist(T,U).

Kula w przestrzeni metrycznej

Kula otwarta K o środku p i promieniu r, $r > 0$, jest to zbiór punktów x, których odległości (według danej metryki) od punktu p są mniejsze od r.

2.64. Interpretując przestrzeń arytmetyczną dwuwymiarową geometrycznie na płaszczyźnie z układem współrzędnych prostokątnych kartezjańskich, narysować kulę o środku $(1,3)$ i promieniu 2 wyznaczoną według metryki
a) euklidesowej **b)** ulicznej **c)** rzecznej **d)** kolejowej

Zbiory równoliczne

Dwa zbiory są *równoliczne*, gdy istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie jednego z tych zbiorów na drugi. Równoliczność dwóch zbiorów skończonych oznacza, że liczba elementów jednego zbioru jest równa liczbie elementów drugiego zbioru.

2.65. Wykazać, że zbiory: $\{n \in \mathcal{N}: 0 < n^2 < 20\}$, $\{n \in \mathcal{N}: 100 < n^2 < 200\}$ są równoliczne.

2.66. Wykazać, że każdy z następujących zbiorów:
a) zbiór liczb nieparzystych dodatnich,
b) zbiór liczb całkowitych,
c) zbiór liczb wymiernych należących do przedziału $(0; 1)$, jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{N}$.

2.67. Wykazać, że każdy z przedziałów:
a) $(0;2)$ **b)** $(a;b)$, $a < b$ **c)** $(-\infty;\infty)$
jest równoliczny z przedziałem $(0;1)$.

Rozdział 3

Równania liniowe, macierze, wyznaczniki

Funkcja liniowa

Funkcja liniowa zmiennej x wyraża się wzorem $y = ax+b$ $(a, b$ — stałe). *Wykresem* tej funkcji jest linia prosta.
Umowa. W tym rozdziale przez *wykres* rozumiemy wykres w układzie prostokątnym kartezjańskim.

3.1. Narysować w jednym układzie wykresy funkcji danych wzorem
a) $y = ax+2$ dla $a = 0, 1, -1, 2, -2$
b) $y = \frac{1}{2}x+b$ dla $b = 0, 1, -1, 2, -2$

3.2. Napisać wzór określający funkcję liniową, która
a) dla $x = 5$ ma wartość $y = 0$ i dla $x = 0$ ma wartość $y = 10$,
b) dla $x = a \neq 0$ ma wartość $y = 0$ i dla $x = 0$ ma wartość $y = b$,
c) dla argumentów x_1, x_2, $x_1 \neq x_2$, przyjmuje wartości y_1, y_2.

Funkcja przedziałami liniowa

3.3. W układzie Oxy dane są punkty $A = (-5,0)$, $B = (-3,2)$, $C = (-1,3)$, $D = (1,3)$, $E = (3,2)$, $F = (5,0)$. Narysować łamaną $ABCDEF$ i napisać wzory określające funkcję, której wykresem jest ta łamana.

3.4. Narysować wykres funkcji określonej wzorem (a, b — stałe, $a < b$)

a) $y = |x-a|$ **b)** $y = \frac{1}{2}(|x-a|+|x-b|)$

c) $y = \frac{1}{2}(|x-a|-|x-b|)$ **d)** $y = \frac{1}{2}\big||x-a|-|x-b|\big|$

3.5. Rozwiązać nierówność

a) $|x-3| < 2$ **b)** $|x-2| < |x+1|$ **c)** $\big||x-1|-2\big| \geqslant 2$

3.6. Rozwiązać względem x w zależności od parametru p równanie

a) $px+3 = 2x-p$ **b)** $px+9 = p^2+3x$

3.7. Rozwiązać względem x w zależności od parametru p następujące równanie, napisane w postaci proporcji (*Zarys*, s. 101)

a) $\dfrac{x+2p+1}{p-1} = \dfrac{x-1}{2}$ **b)** $\dfrac{2x+1}{p^3+2} = \dfrac{x}{p+1}$

Układy równań liniowych

Układ m równań liniowych o n niewiadomych $x_1, \dots, x_n$ zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

Rozwiązaniem układu (1) nazywamy każdy ciąg n liczb $(c_1, \dots, c_n)$, który spełnia wszystkie równania układu (1). Układ (1) nazywamy: *oznaczonym* — gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie, *sprzecznym* — gdy nie ma rozwiązań, *nieoznaczonym* — gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań. Z układem (1) są związane macierze

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n}\, b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn}\, b_m \end{bmatrix} \tag{2}$$

które nazywamy: $\boldsymbol{A}$ — *macierzą współczynników*, $\boldsymbol{B}$ — *macierzą (kolumną) wyrazów wolnych*, $\boldsymbol{M}$ — *macierzą układu (macierzą rozszerzoną)*.

3.8. Dany jest układ równań liniowych. Napisać macierz tego układu

a) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ x_2+x_3+x_4 &= 1 \\ x_3+x_4+x_5 &= 2 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x_1+x_4 &= 0 \\ x_2-x_3 &= 1 \end{aligned}$

3.9. Sprowadzić poniższą macierz do postaci *normalnej* (*Zarys*, s. 77)

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

3.10. Stosując metodę *eliminacji Gaussa* (*Zarys*, s. 80), rozwiązać następujący układ równań liniowych

a) $\begin{aligned} x+2y+3z &= 6 \\ 2x+3y-z &= 4 \\ 3x+y-4z &= 0 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x-2y+z &= 3 \\ 2x-4y+2z &= 5 \\ 3x-6y+3z &= 9 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x+2y-3z+4u &= 1 \\ 2x+3y-2z+3u &= 2 \\ 4x+2y-3z+2u &= 3 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} 2x+3y-5z+u-v &= 0 \\ x+2y+3z+2u+2v &= 3 \\ 4x+7y+z+5u+3v &= 1 \\ 5x+9y+4z+7u+5v &= 8 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x+3y-z+u &= -3 \\ 3x-y+2z+4u &= 8 \\ x+y+3z-2u &= 6 \\ -x+2y+3z+5u &= 3 \end{aligned}$ **f)** $\begin{aligned} x+2y+3z &= 3 \\ 2x-y+z &= 1 \\ x-2y-2z &= -1 \\ x+y+z &= 1 \\ 3x-y+2z &= 1 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} x+2y-3z+u-5v+2w &= 1 \\ 4x-13y+9z-5u+19v-10w &= 3 \\ 2x-3y+z-u+3v-2w &= 2 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} x+2y+3z &= 2 \\ 2x-y+z &= -1 \\ x-2y-2z &= -1 \\ x+y+z &= 2 \\ 3x-y+2z &= -1 \end{aligned}$ **i)** $\begin{aligned} x+y+2z &= 0 \\ 2x+3z &= 1 \\ 2y+z &= -1 \\ x-y+z &= 1 \\ 2x+4y+5z &= -1 \end{aligned}$

Wyznaczniki

Wyznaczniki stopni 2, 3 i 4 obliczamy według wzorów

$$\begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix} = ag-bf, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ p & q & r \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} g & h \\ q & r \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} f & h \\ p & r \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} f & g \\ p & q \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ f & g & h & k \\ p & q & r & s \\ t & u & v & w \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} g & h & k \\ q & r & s \\ u & v & w \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} f & h & k \\ p & r & s \\ t & v & w \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} f & g & k \\ p & q & s \\ t & u & w \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} f & g & h \\ p & q & r \\ t & u & v \end{vmatrix}$$

Podobnie obliczamy wyznaczniki wyższych stopni. Przy obliczaniu wyznaczników można korzystać z własności wyznaczników (*Zarys*, s. 89).

Obliczyć następujące wyznaczniki

3.11. **a)** $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x & x+1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} a^2+1 & ax+1 \\ ax+1 & x^2+1 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 496 & 498 \\ 497 & 499 \end{vmatrix}$

3.12. **a)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & x \\ 3 & 3 & y \\ 4 & 4 & z \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 2 & 1 \\ y & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 1 & x & z \\ 1 & x+y & z \\ 1 & x & z+u \end{vmatrix}$

3.13. **a)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ x & b & 0 & 0 \\ y & z & c & d \\ u & v & e & f \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & w \\ c & 0 & u & v \\ 0 & d & y & z \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & 5 & 8 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **k)** $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

3.14. **a)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **g)** $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

3.15. Obliczyć następujące pary wyznaczników trójkątnych

a) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ x & b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & x \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & x \\ c & z & y \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ x & b & 0 & 0 \\ y & z & c & 0 \\ u & v & w & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & x \\ 0 & c & z & y \\ d & w & v & u \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & b & 0 & 0 & 0 \\ y & z & c & 0 & 0 \\ u & v & w & d & 0 \\ p & q & r & s & e \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b & x \\ 0 & 0 & c & z & y \\ 0 & d & w & v & u \\ e & s & r & q & p \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & x_{32} & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_2 & x_{21} \\ 0 & \dots & a_3 & x_{32} & x_{31} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & \dots & x_{n3} & x_{n2} & x_{n1} \end{vmatrix}$

3.16. Obliczyć następujące wyznaczniki antysymetryczne

a) $\begin{vmatrix} 0 & -z \\ z & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 0 & -x & -z \\ x & 0 & -y \\ z & y & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & -u & -x & -z \\ u & 0 & -v & -y \\ x & v & 0 & -w \\ z & y & w & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & -p & -u & -x & -z \\ p & 0 & -q & -v & -y \\ u & q & 0 & -r & -w \\ x & v & r & 0 & -s \\ z & y & w & s & 0 \end{vmatrix}$

3.17. Obliczyć następujące wyznaczniki Van der Monde'a

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_n \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & \ldots & z_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & z_3^{n-1} & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}$

3.18. Obliczyć następujące wyznaczniki stopnia n, $n \geqslant 2$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2 & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & n \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n-1 & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 1-n & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 0 \end{vmatrix}$

3.19. Obliczyć następujące wyznaczniki stopnia n, $n \geqslant 3$

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_{13} & x_{14} & \ldots & x_{1n} \\ b_2 & a_2 & x_{23} & x_{24} & \ldots & x_{2n} \\ 0 & 0 & a_3 & x_{34} & \ldots & x_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & \ldots & x_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & y \\ y & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x_1-y_1 & x_1-y_2 & x_1-y_3 & \ldots & x_1-y_n \\ x_2-y_1 & x_2-y_2 & x_2-y_3 & \ldots & x_2-y_n \\ x_3-y_1 & x_3-y_2 & x_3-y_3 & \ldots & x_3-y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n-y_1 & x_n-y_2 & x_n-y_3 & \ldots & x_n-y_n \end{vmatrix}$

Wzory Cramera

Aby rozwiązać układ równań liniowych

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \tag{3}$$

tworzymy wyznaczniki

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ b_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots b_1 \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots b_n \end{vmatrix} \tag{4}$$

Jeśli $D \neq 0$, to układ (3) jest oznaczony i ma rozwiązanie dane *wzorami Cramera*: $x_1 = D_1/D, \ldots, x_n = D_n/D$.

Jeśli $D = 0$ i co najmniej jeden z wyznaczników $D_1, \ldots, D_n$ jest różny od 0, to układ (3) jest sprzeczny.

Jeśli $D = 0$ i $D_1 = \ldots = D_n = 0$, to układ (3) jest nieoznaczony lub sprzeczny (rozstrzygnięcie wymaga dodatkowych badań).

3.20. Rozwiązać układ równań

a) $\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + 3y &= 18 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} -x + 4y &= 0 \\ 3x - 12y &= -11 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + y + z &= 4 \\ 3x + y - 4z &= 0 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= -13 \\ x + 2y - 3z &= 10 \\ 5x - y + 2z &= -1 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 2y - z &= 0 \\ x - 5y + 4z &= 1 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} x + y + 2z &= 5 \\ 2x + y + z &= 6 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 8x + 6y + 5z + 2u &= 21 \\ 7x + 5y + 5z + 2u &= 18 \\ 7x + 7y + 4z + 2u &= 23 \\ 7x + 4y + 5z + 2u &= 18 \end{aligned}$ h) $\begin{aligned} 5x - y + z - 2u &= 3 \\ 7x - u &= 3 \\ 4x - 2u &= 5 \\ 5x + y - z + 2u &= -1 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} x-2y+3z-4u+2v &= -2 \\ 2x+y+z-3u-v &= 7 \\ x+z-2u-2v &= 5 \\ 2x+3y-z+u+4v &= 1 \\ 5x+3y+2z-5u+3v &= 1 \end{aligned}$ j) $\begin{aligned} x+7y-5z-5u+5v &= 0 \\ 3x-y-2z+u-v &= 0 \\ x+y+z+u+v &= 2 \\ x-2y+z+u-v &= 0 \\ 2x+y-z-u+v &= 0 \end{aligned}$

3.21. Rozwiązać w zależności od parametru a układ równań

a) $\begin{aligned} ax+y &= 1 \\ x+a^3y &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} ax-y+2az &= 1 \\ 2x+ay+z &= 0 \\ x+ay+2z &= 3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} ax+y-z &= 0 \\ x+ay+z &= 1 \\ ax-y+az &= 0 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} ax+y+z &= 1 \\ x+ay+z &= a \\ x+y+az &= a^2 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} ax+y-az+u &= 1 \\ x+ay+z-u &= 2 \\ x+ay-az-2u &= 0 \\ ax+y-z+au &= 1 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} x\sin a-y\cos a-z &= 0 \\ x\cos a-y\sin a-z &= 1 \\ x+y+z &= -1 \end{aligned}$

3.22. Rozwiązać w zależności od parametrów a, b układ równań

a) $\begin{aligned} ax+by &= 1 \\ bx+ay &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} a^2x+y &= 0 \\ ax+by &= 1 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} ax+by+z &= 1 \\ x+aby+z &= b \\ x+by+az &= 1 \end{aligned}$

3.23. Rozwiązać układ n równań liniowych o n niewiadomych $x_1, \dots, x_n$, którego macierz jest dana poniżej

a) $\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 & 1 \\ \dots & & & & & & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n & 1 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n & 1 \\ \dots & & & & & & \dots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$

Rząd macierzy

Rząd macierzy jest równy r, jeśli w macierzy istnieje niezerowy *minor* stopnia r, ale nie istnieje niezerowy minor stopnia wyższego niż r. Rząd macierzy zerowej jest równy 0. Rząd macierzy A oznaczamy symbolem rz A.

3.24. Wyznaczyć rząd macierzy

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 4 & -8 & -4 & 12 & 18 \\ 3 & -6 & -3 & 9 & 12 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ j) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ k) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

l) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ m) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

n) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$ o) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

p) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Warunek Kroneckera — Capellego

Układ równań liniowych (1) (s. 40) jest *rozwiązalny* (oznaczony lub nieoznaczony) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A współczynników i macierz M układu mają ten sam rząd. Jeśli rz A = rz $M = r$, to rozwiązanie ogólne tego układu zależy od $n-r$ parametrów.

3.25. Zbadać, czy poniższy układ równań jest rozwiązalny, a jeśli jest rozwiązalny, to sprawdzić, czy jest oznaczony, czy nieoznaczony i od ilu parametrów zależy rozwiązanie.

a) $\begin{aligned} x+3y &= 5 \\ 3x-y &= 4 \\ x-7y &= -1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x-2y+5z &= 0 \\ 2x-y+z &= 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x-y+2z&=-3\\ -x+2y-z&=5\\ 2x+y-z&=8 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x+2y-3z+u&=-2\\ 4x+8y-12z+4u&=0 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x+2y-z-u&=1\\ -x+3y+u&=-3\\ 2y-z-3u&=2\\ -2x+2y+2z+5u&=-6 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} -3x+y+z&=-1\\ -2x+2y+z&=1\\ x+y+z&=3\\ -3x+y+2z&=1 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 4x+11y+16z-13u&=0\\ 3x+4y+7z-5u&=0\\ 7x-2y+3z+u&=0\\ 2x-3y-2z+3u&=0 \end{aligned}$ h) $\begin{aligned} -8x+2y+5z&=8\\ -7x+y+8z&=12\\ -5x+2y+3z&=7\\ -9x+4y+3z&=9 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} 5x+4y-2z+3u&=2\\ 3x+2y-6z+9u&=4\\ 4x+3y-4z+6u&=3 \end{aligned}$ j) $\begin{aligned} 8x+2y+9z+2u-3v&=2\\ 3x+y+3z+u-2v&=1\\ 5x+3y+3z+3u-2v&=1\\ 4x+2y+3z+2u-v&=2 \end{aligned}$

3.26. Dla jakich wartości parametru a poniższy układ równań jest rozwiązalny?

a) $\begin{aligned} x+2y-z+4u&=2\\ x+7y-4z+11u&=a\\ 2x-y+z+u&=1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} ax+y+2z+u&=4\\ x-2y+3z-u&=3\\ x+3y-z+2u&=2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x-2y+z&=a\\ x+y+u&=0\\ x+4y-z+2u&=0 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x+ay+z-u&=0\\ x+z+u&=0 \end{aligned}$

Układy jednorodne

Układ jednorodny n równań liniowych o n niewiadomych

3.27. Rozwiązać poniższy układ równań liniowych

a) $\begin{aligned} x-2y+3z&=0\\ 4x+7y+z&=0\\ 3x+6y+7z&=0 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x+y-3z&=0\\ -x+2y+z&=0\\ x+8y-3z&=0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x+3y-4z+u&=0\\ x-y-z+2u&=0\\ 2x+11y-8z&=0\\ y+3z-u&=0 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x-y+z+2u&=0\\ x+y+z+u&=0\\ 2x-y-u&=0\\ x+z+2u&=0 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x-2y+z-u&=0\\ x+3y+z+14u&=0\\ x+y+z+8u&=0\\ x-y+z+2u&=0 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 6x-y&=0\\ y+3z&=0\\ 2z-u&=0\\ x+u&=0 \end{aligned}$

Układ jednorodny $n-1$ równań liniowych o n niewiadomych

3.28. Rozwiązać poniższy układ równań liniowych i przedstawić rozwiązanie w postaci proporcji

a) $\begin{aligned} 2x+y-3z&=0\\ 3x-2y+z&=0 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 5x-2y+3z&=0\\ x+4y-6z&=0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x+y-3z+u&=0\\ x-y+2z&=0\\ 2y-z-5u&=0 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x+y-2z-u&=0\\ -x+3y+2z+2u&=0\\ 2x+5y-4z+3u&=0 \end{aligned}$

Rozdział 4

Wektory w przestrzeni geometrycznej

Wektory w przestrzeni bez układu współrzędnych

4.1. Dwa wektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ mają wspólny początek, ten sam moduł h i tworzą kąt φ. Narysować te wektory oraz ich sumę i różnicę. Obliczyć moduł sumy i moduł różnicy tych wektorów.

4.2. Dany jest równoległobok o bokach AB, BC, CD i DA. Wyrazić wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ przez wektory $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$.

4.3. W trapezie $OABC$ jest $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{CB}$. Wyrazić: **a)** wektor $\overrightarrow{OA}$ przez wektory $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$, **b)** wektor $\overrightarrow{OB}$ przez wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$.

4.4. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ środek oznaczono S. Za pomocą wektorów $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{AF}$ wyrazić wektory $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{AE}$.

4.5. Jaki warunek spełniają wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, jeśli ich suma $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ i różnica $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ spełniają warunek
a) $\boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{r}$ **b)** $\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{r}$ **c)** $s = r$ **d)** $\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{r}$ oraz $s = r$

4.6. Posługując się dodawaniem i odejmowaniem wektorów oraz mnożeniem wektora przez liczbę, udowodnić, że
a) odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku trójkąta i równy jego połowie,

b) środkowa trapezu jest równoległa do podstaw trapezu i ma długość równą średniej arytmetycznej długości tych podstaw,
c) środki boków czworokąta są wierzchołkami równoległoboku,
d) jeśli punkt P jest środkiem ciężkości trójkąta ABC (tj. punktem przecięcia się środkowych tego trójkąta), to $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = 0$.

4.7. Dany jest prostopadłościan o podstawie $ABCD$ i krawędziach bocznych AP, BQ, CR i DS. Zbadać, czy następujące dwa wektory są *kolinearne* (*Zarys*, s. 110).
a) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ **b)** $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AP}$, **c)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{QR}$ **d)** $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{DR}$ **e)** $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{DS}$
f) $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BS}$
Zbadać czy następujące trzy wektory są komplanarne (*Zarys*, s. 110)
g) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{PB}$ **h)** $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{DP}$ **i)** $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AS}$
j) $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AR}$ **k)** $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{DA}$ **l)** $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{BS}$

4.8. Dany jest równoległościan o podstawie $ABCD$ i krawędziach bocznych AP, BQ, CR i DS. Wyrazić
a) wektor $\overrightarrow{AR}$ przez wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{AP}$,
b) wektor $\overrightarrow{AR}$ przez wektory $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AQ}$ i $\overrightarrow{AS}$,
c) wektor $\overrightarrow{AC}$ przez wektory $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{SR}$ i $\overrightarrow{RQ}$.

4.9. W czworościanie $OABC$ środkami krawędzi OA i BC są punkty F i G. Wyrazić wektor $\overrightarrow{FG}$ przez wektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$.

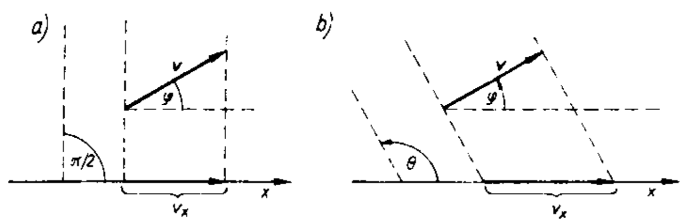
4.10. Wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ o modułach $u = 1$, $v = 2$ tworzą kąt $\varphi = 60°$. Obliczyć $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|$ oraz $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|$.

4.11. Wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ o modułach u, v tworzą kąt φ. Obliczyć $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|$ oraz $|a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}|$, uważając liczby u, v, a, b, φ za wiadome.

4.12. Wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ mają moduły: $u = 4$, $v = 2$, $w = 6$ i każde dwa z tych wektorów tworzą kąt równy 60°. Obliczyć $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}|$.

Współrzędna wektora

Współrzędna na osi x wektora $\boldsymbol{v}$, oznaczana symbolami: $\text{wsp}_x\,\boldsymbol{v}$ lub v_x, jest to miara na osi x rzutu wektora $\boldsymbol{v}$ na oś x. Jeśli $\boldsymbol{v} = 0$, to $v_x = 0$. Załóżmy, że $\boldsymbol{v}$ jest wektorem niezerowym o module v.



Jeśli rzut wektora $\boldsymbol{v}$ na oś x jest prostokątny (rys. a), to współrzędna v_x nazywa się *prostokątną* i wyraża się wzorem

$$v_x = v\cos\varphi \qquad (1)$$

gdzie φ jest kątem nieskierowanym między osią x a wektorem $\boldsymbol{v}$. Jeśli rzut wektora $\boldsymbol{v}$ na oś x jest ukośnokątny (rys. b), to współrzędna v_x nazywa się *ukośnokątną* i wyraża się wzorem

$$v_x = v(\cos\varphi - \sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta) \qquad (2)$$

gdzie φ i θ są kątami skierowanymi od osi x do wektora $\boldsymbol{v}$ i od osi x do kierunku rzutu. Wzór (1) jest prawdziwy dla rzutu w przestrzeni i na płaszczyźnie, wzór (2) tylko na płaszczyźnie skierowanej. Dla współrzędnej wektora, zarówno prostokątnej jak i ukośnokątnej, zachodzi równość

$$(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})_x = au_x+bv_x \qquad (3)$$

gdzie a, b są dowolnymi liczbami, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ — dowolnymi wektorami.

4.13. W prostopadłościanie o podstawie $ABCD$ i krawędziach bocznych AP, BQ, CR i DS mamy $AB = 5$, $BC = 2$, $BQ = 3$. Korzystając ze wzorów (1) oraz (3), obliczyć współrzędne prostokątne na osi AR wektorów

a) $\overrightarrow{AQ}$ **b)** $\overrightarrow{QR}$ **c)** $\overrightarrow{CB}$ **d)** $\overrightarrow{AS}$ **e)** $\overrightarrow{SD}$ **f)** $\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{QR}$
g) $2\overrightarrow{AQ}+3\overrightarrow{CB}$ **h)** $4\overrightarrow{AS}-2\overrightarrow{SD}$

Rozkład wektora

Rozkładem wektora $\boldsymbol{v}$ względem *bazy* $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ nazywamy przedstawienie wektora $\boldsymbol{v}$ w postaci *kombinacji liniowej* wektorów tworzących bazę

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{u}_n \qquad (4)$$

4.14. W trójkącie ABC środek boku BC oznaczono D. Wyznaczyć rozkład

a) wektora $\overrightarrow{AD}$ względem bazy $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$,
b) wektora $\overrightarrow{AB}$ względem bazy $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$.

4.15. W prostopadłościanie z zad. 4.13 wyznaczyć rozkład wektora $\overrightarrow{AB}$ względem bazy:

a) $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ})$ **b)** $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AR})$ **c)** $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AQ})$ **d)** $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$
gdzie $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}/AC$, $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{AR}/AR$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{AQ}/AQ$ są wersorami wektorów $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AR}$ i $\overrightarrow{AQ}$.

4.16. Dane są punkty O, A, B nie leżące na jednej prostej. Wykazać, że jeśli punkt P leży na prostej AB, to wektor $\overrightarrow{OP}$ jest kombinacją liniową wektorów $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, a suma współczynników tej kombinacji jest równa 1.

Mnożenie wektorów

Iloczyn skalarny wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ oznaczamy symbolem $\boldsymbol{uv}$. Jest to liczba, która w przypadku $\boldsymbol{u} = 0$ lub $\boldsymbol{v} = 0$ jest zerem, a w przypadku $\boldsymbol{u} \neq 0$ i $\boldsymbol{v} \neq 0$ jest dana wzorem

$$\boldsymbol{uv} = uv\cos\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \qquad (5)$$

gdzie $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ jest kątem (nieskierowanym) między wektorami $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$. Własności

$$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}, \quad \boldsymbol{uu} = \boldsymbol{u}^2 = u^2$$

Jeśli $\boldsymbol{u} \neq 0$, to $\boldsymbol{uv} = uv_u$, gdzie v_u jest miarą rzutu prostokątnego wektora $\boldsymbol{v}$ na oś wektora $\boldsymbol{u}$.

Iloczyn wektorowy wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ oznaczamy symbolem $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. Jest to wektor, który w przypadku $\boldsymbol{u} = 0$ lub $\boldsymbol{v} = 0$ lub $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$ jest zerowy, a w przypadku $\boldsymbol{u} \neq 0$, $\boldsymbol{v} \neq 0$ i $\boldsymbol{u} \nparallel \boldsymbol{v}$ jest prostopadły do $\boldsymbol{u}$ i do $\boldsymbol{v}$, ma moduł

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = uv\sin\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \qquad (6)$$

oraz zwrot taki, aby trójka wektorów $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ miała orientację dodatnią (*Zarys*, s. 123). Własności

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 0$$

Jeśli $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \neq 0$, to $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$ = *pole równoległoboku zbudowanego na wektorach* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

Iloczynem mieszanym wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ nazywamy iloczyn $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ oraz iloczyn $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$. Są one równe i każdy z nich oznaczamy symbolem $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$. Jeśli $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] \neq 0$, to $|[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]|$ = *objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.

Iloczyny wektorowe podwójne: $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ i $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w}$ są to dwa wektory, na ogół różne. Zachodzą równości

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{uw}) - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{uv}) \qquad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{uw}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{vw}) \qquad (7)$$

Prostopadłość, równoległość i komplanarność wektorów

Prostopadłość i *równoległość* dwóch wektorów są związane z iloczynem skalarnym i iloczynem wektorowym tych wektorów

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \text{ lub } \mathbf{u} = 0 \quad \text{lub} \quad \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \quad \mathbf{uv} = 0 \tag{8}$$

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \text{ lub } \mathbf{u} = 0 \quad \text{lub} \quad \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0 \tag{9}$$

Przyjmując umowę, że wektor zerowy jest prostopadły i równoległy do dowolnego wektora, zapisujemy (8) i (9) w postaci

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{uv} = 0 \qquad \mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0 \tag{10}$$

Komplanarność trzech wektorów jest związana z iloczynem mieszanym tych wektorów

$$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ są komplanarne} \Leftrightarrow [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0 \tag{11}$$

4.17. Obliczyć iloczyn skalarny $\mathbf{uv}$, wiedząc, że

a) $u = 2$, $v = 3$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = 60°$ **b)** $u = 1$, $v = 5$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = 90°$
c) $u = 2$, $v = 5$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = 0°$ **d)** $u = 2$, $v = 5$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = 180°$
e) $u = 2$, $v = 5$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = 120°$

4.18. Obliczyć kąt $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, wiedząc, że

a) $u = \sqrt{2}$, $v = 5$, $\mathbf{uv} = 5$ **b)** $u = 2$, $v = 4$, $\mathbf{uv} = -4$
c) $u = 2$, $v = 3$, $\mathbf{uv} = 6$ **d)** $u = 2$, $v = 3$, $\mathbf{uv} = -6$
e) $u = 2$, $v = 3$, $\mathbf{uv} = 0$

4.19. Mając dane dwa wzajemnie prostopadłe wersory $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, utworzono wektory: $\mathbf{u} = 5\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{w} = 3\mathbf{q}$. Obliczyć

a) $\mathbf{u}^2$ **b)** $\mathbf{v}^2$ **c)** $\mathbf{w}^2$ **d)** $\mathbf{uv}$ **e)** $\mathbf{vw}$ **f)** $\mathbf{uw}$ **g)** $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w})$
h) $(2\mathbf{u} - \mathbf{v})(\mathbf{v} + \mathbf{w})$

4.20. Wektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ mają moduły $u = \sqrt{3}$, $v = 2$ i tworzą kąt $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = 150°$. Obliczyć

a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})^2$ **b)** $(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2$ **c)** $(\mathbf{u} + 2\mathbf{v})(2\mathbf{u} - \mathbf{v})$
d) $(3\mathbf{u} - 2\mathbf{v})(5\mathbf{u} - 4\mathbf{v})$

4.21. Wyznaczyć kąt $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, wiedząc, że $u = v \neq 0$ oraz że wektory $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $4\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$ są prostopadłe.

4.22. Mając dane trzy wzajemnie prostopadłe wektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ o modułach $u = 2$, $v = 10$, $w = 11$, utworzono wektor $\mathbf{s} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$. Obliczyć s oraz: $\cos\{\mathbf{s}, \mathbf{u}\}$, $\cos\{\mathbf{s}, \mathbf{v}\}$, $\cos\{\mathbf{s}, \mathbf{w}\}$.

4.23. Wykazać, że dla dowolnych trzech wektorów $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ wektor $\mathbf{p} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{v}(\mathbf{uw}) - \mathbf{u}(\mathbf{vw})$ jest albo zerowy, albo prostopadły do wektora $\mathbf{w}$.

4.24. Mając dane wersory $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ tworzące kąt 45°, utworzono wektory $\mathbf{u} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ i zbudowano na tych wektorach równoległobok. Obliczyć długości przekątnych tego równoległoboku.

4.25. W trapezie równoramiennym $ABCD$ o kącie przy A równym 60° i bokach $BC = CD = DA = a$ punkty F i G są środkami boków BC i CD. Obliczyć $\cos\{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\}$.

4.26. W trójkącie równoramiennym środkowe ramion są wzajemnie prostopadłe. Obliczyć kąt między ramionami tego trójkąta.

4.27. Obliczyć moduł iloczynu wektorowego $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, wiedząc że

a) $u = 3$, $v = 8$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = 30°$ **b)** $u = \sqrt{3}$, $v = 2$, $\mathbf{uv} = -3$

4.28. Obliczyć $\mathbf{uv}$, wiedząc, że $u = 2$, $v = 7$, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 3\sqrt{3}$.

4.29. Wiedząc, że $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, $u = v = 1$, obliczyć

a) $\mathbf{u}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ **b)** $(\mathbf{u} + \mathbf{v})(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ **c)** $\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ **d)** $|\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{u})|$

4.30. Sprowadzić do prostszej postaci wyrażenie

a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{u}$ **b)** $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ **c)** $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v})$
d) $(2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (3\mathbf{u} - \mathbf{v})$ **e)** $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})$.

4.31. Równoległobok zbudowany na wektorach $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ma pole równe 10. Obliczyć pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $3\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

4.32. Dane są dwa wzajemnie prostopadłe wersory $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$. Obliczyć

a) pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathbf{u} = 3\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ oraz obie wysokości tego równoległoboku;
b) pole trójkąta zbudowanego na wektorach $\mathbf{u} = 3\mathbf{p}$, $\mathbf{v} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$ oraz wszystkie trzy wysokości tego trójkąta.

4.33. Objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ wynosi 24. Obliczyć objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$.

4.34. Dane są trzy wzajemnie prostopadłe wersory $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$. Obliczyć

a) objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r};$$

b) objętość czworościanu zbudowanego na wektorach

$$\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{q}+3\boldsymbol{r}$$

zaczepionych w punkcie A oraz wysokość tego czworościanu odpowiadającą wierzchołkowi A.

4.35. Udowodnić tożsamość

a) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = 0$

b) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}) = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]\,\boldsymbol{u}$

c) $[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]^2$

d) $[\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})]\times[\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w})] = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}](\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$

4.36. Wykazać, że wektory $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}$ są komplanarne.

4.37. Wykazać, że wektory $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}$ są komplanarne.

Punkty, wektory i ich współrzędne w przestrzeni

W przestrzeni wprowadzamy prostokątny kartezjański układ współrzędnych $Oxyz$ o początku O i osiach Ox, Oy, Oz. *Wersory* tych osi oznaczamy $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Wówczas punkty i wektory są określone przez trójki ich współrzędnych i wyznaczenie punktu, względnie wektora, polega na wyznaczeniu współrzędnych punktu, względnie wektora. Jeśli punkt P ma współrzędne x, y, z, to piszemy $P = (x, y, z)$. Jeśli wektor $\boldsymbol{v}$ ma współrzędne v_x, v_y, v_z, to piszemy $\boldsymbol{v} = [v_x, v_y, v_z]$ i zachodzą równości

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}, \quad |\boldsymbol{v}| = v = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

Jeśli $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, to

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1]$$

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

a środek odcinka P_1P_2 ma współrzędne $\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}, \dfrac{z_1+z_2}{2}$.

Niech będą dane wektory $\boldsymbol{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\boldsymbol{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\boldsymbol{w} = [w_x, w_y, w_z]$ o modułach u, v, w oraz liczby a, b. Wówczas

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = [u_x+v_x, u_y+v_y, u_z+v_z] \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} = [u_x-v_x, u_y-v_y, u_z-v_z] \tag{13}$$

$$a\boldsymbol{u} = [au_x, au_y, au_z] \tag{14}$$

$$a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v} = [au_x+bv_x, au_y+bv_y, au_z+bv_z] \tag{15}$$

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z \tag{16}$$

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} + \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \tag{17}$$

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \tag{18}$$

Jeśli $\boldsymbol{u} \neq 0$ i $\boldsymbol{v} \neq 0$, to z porównania (5) i (16) otrzymujemy

$$\cos\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} = \frac{1}{uv}(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z) \tag{19}$$

Cosinusy kierunkowe niezerowego wektora $\boldsymbol{u}$ są dane wzorami

$$\cos\{\boldsymbol{u}, x\} = \frac{u_x}{u}, \quad \cos\{\boldsymbol{u}, y\} = \frac{u_y}{u}, \quad \cos\{\boldsymbol{u}, z\} = \frac{u_z}{u} \tag{20}$$

i zachodzi równość $\cos^2\{\boldsymbol{u}, x\}+\cos^2\{\boldsymbol{u}, y\}+\cos^2\{\boldsymbol{u}, z\} = 1$. Cosinusy kierunkowe osi otrzymujemy, biorąc cosinusy kierunkowe dowolnego wektora równoległego do tej osi i zgodnie z nią skierowanego. Kąt $\{p, s\}$ między osiami p, s wyznaczamy z równości $\cos\{p, s\} = \cos\{p, x\}\cos\{s, x\}+\cos\{p, y\}\cos\{s, y\}+\cos\{p, z\}\cos\{s, z\}$

4.38. Dane są punkty $A = (1, 1, 3)$, $B = (0, -1, 4)$, $C = (3, -5, 0)$. Wyznaczyć wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ oraz wektory $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$.

4.39. Dany jest punkt $A = (1, -2, 3)$. Wyznaczyć punkt B, wiedząc, że

a) $\overrightarrow{AB} = [3, 5, -4]$ b) $\overrightarrow{AB} = [0, 2, 0]$ c) $\overrightarrow{AB} = [-1, 2, -3]$

4.40. Dany jest punkt $B = (3, 7, -2)$. Wyznaczyć punkt A, wiedząc, że

a) $\overrightarrow{AB} = [5, 0, -3]$ b) $\overrightarrow{AB} = [6, 1, 2]$ c) $\overrightarrow{AB} = [3, 7, -2]$

4.41. Dane są cztery wektory: $\boldsymbol{a} = [1, 3, 4]$, $\boldsymbol{b} = [-3, 0, 1]$, $\boldsymbol{c} = [1, 3, 3]$, $\boldsymbol{d} = [-1, -3, -2]$. Wyznaczyć

a) wektory $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}$, $2\boldsymbol{a}$, $-3\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}+4\boldsymbol{d}$, $2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}$;

b) iloczyny skalarne $\boldsymbol{aa}$, $\boldsymbol{ab}$, $\boldsymbol{ac}$, $\boldsymbol{ad}$, $\boldsymbol{bb}$, $\boldsymbol{bc}$, $\boldsymbol{bd}$, $\boldsymbol{cc}$, $\boldsymbol{cd}$, $\boldsymbol{dd}$;

c) moduły wektorów $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$;

d) cosinusy kierunkowe wektorów $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$;

e) cosinusy kątów $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}\}$, $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$, $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}\}$, $\{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$;

f) iloczyny wektorowe $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$;

g) iloczyny mieszane $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}]$, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$.

4.42. Posługując się iloczynem mieszanym, napisać wzór na objętość czworościanu o wierzchołkach $P_j = (x_j, y_j, z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

4.43. Wektor tworzy z osiami Ox i Oy kąty 60° i 45°. Obliczyć kąt, który ten wektor tworzy z osią Oz.

4.44. Zbadać, czy oś o cosinusach kierunkowych $1/2$, $1/2$, $1/\sqrt{2}$ jest prostopadła do osi o cosinusach kierunkowych 0, $-2/\sqrt{5}$, $1/\sqrt{5}$.

4.45. Oś p ma cosinusy kierunkowe $1/3$, $-2/3$, $2/3$. Obliczyć cosinusy kierunkowe osi s, wiedząc, że $s \perp p$, $s \perp Oz$.

Prostopadłość, równoległość i komplanarność wektorów, wyrażone za pomocą współrzędnych

Związki (10) i (11) na mocy wzorów (16), (17) i (18) przyjmują postać

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0 \qquad (21)$$

$$\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = 0 \qquad (22)$$

$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \text{ są komplanarne} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (23)$$

Zależność liniowa wektorów

Powiedzenie, że pewne wektory są liniowo zależne, oznacza, że jeden z tych wektorów jest liniową kombinacją pozostałych.
Dwa wektory są liniowo zależne, gdy są równoległe.
Trzy wektory są liniowo zależne, gdy są komplanarne.
Cztery wektory są zawsze liniowo zależne.

4.46. Dane są punkty $A = (0, -1, 3)$, $B = (6, 5, -2)$, $C = (1, -2, 3)$. Wykazać, że $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

4.47. Dane są punkty $A = (1, 2, 1)$, $B = (9, 6, 2)$, $C = (10, 5, -2)$, $D = (2, 1, -3)$. Wykazać, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

4.48. Dla jakich wartości parametru m
a) wektory $[m^2+1, m, 1]$, $[10, 4, m]$ są równoległe?
b) wektory $[m^2, -3, 0]$, $[m, m, m+2]$ są prostopadłe?

4.49. Zbadać, czy poniższe dwa wektory są równoległe. W przypadku równoległości wyrazić jeden z nich przez drugi
a) $\boldsymbol{u} = [1, 5, 0]$, $\boldsymbol{v} = [2, 10, 1]$
b) $\boldsymbol{u} = [2, -3, 1]$, $\boldsymbol{v} = [-4, 6, -2]$
c) $\boldsymbol{u} = [1, 1, 1]$, $\boldsymbol{v} = [1, -1, 1]$
d) $\boldsymbol{u} = [1, 3, -5]$ $\boldsymbol{v} = [1/3, 1, -5/3]$

4.50. Zbadać czy poniższe trzy wektory są komplanarne. W przypadku ich komplanarności, wyrazić jeden z nich przez pozostałe
a) $\boldsymbol{u} = [1, 3, 1]$, $\boldsymbol{v} = [0, 1, -2]$, $\boldsymbol{w} = [2, 9, -4]$
b) $\boldsymbol{u} = [4, 1, -3]$, $\boldsymbol{v} = [2, 0, 5]$, $\boldsymbol{w} = [7, 1, -3]$
c) $\boldsymbol{u} = [2, 1, 1]$, $\boldsymbol{v} = [1, 2, 4]$, $\boldsymbol{w} = [4, -1, -5]$
d) $\boldsymbol{u} = [1, 0, 0]$, $\boldsymbol{v} = [0, 1, 0]$, $\boldsymbol{w} = [1, 1, 1]$

4.51. Dane są cztery wektory. Wyrazić jeden z nich przez pozostałe
a) $\boldsymbol{e} = [1, 2, 1]$, $\boldsymbol{f} = [-1, 0, 1]$, $\boldsymbol{g} = [3, 0, 0]$, $\boldsymbol{h} = [0, 1, -2]$
b) $\boldsymbol{p} = [6, 0, 1]$, $\boldsymbol{q} = [1, 1, 2]$, $\boldsymbol{r} = [-1, 0, 1]$, $\boldsymbol{s} = [0, 0, 1]$
c) $\boldsymbol{t} = [3, 0, 1]$, $\boldsymbol{u} = [1, 4, -2]$, $\boldsymbol{v} = [5, 8, -3]$, $\boldsymbol{w} = [2, -4, 3]$

4.52. Wykazać, że trójkąt o wierzchołkach $A = (1, 1, 5)$, $B = (4, 2, 3)$, $C = (7, 1, 1)$ jest równoramienny.

4.53. Dane są punkty $P_1 = (1, 1, 4)$, $P_2 = (5, 3, 2)$. Wyznaczyć środek S odcinka $P_1 P_2$ i obliczyć odległość punktu S od początku układu.

4.54. Znaleźć na osi Ox punkt równoodległy od punktów $(5, 1, 4)$ i $(-4, 5, 3)$.

4.55. Znaleźć na płaszczyźnie Oxz punkt równoodległy od punktów $(2, 3, 0)$, $(-1, 4, -4)$, $(6, 0, -1)$.

4.56. Znaleźć punkt równoodległy od punktów $(6, -1, 3)$, $(3, 2, 3)$, $(2, -1, -1)$, $(2, -6, 4)$.

4.57. Znaleźć punkt równoodległy od punktu $(1, 1, 1)$ i od wszystkich trzech płaszczyzn układu $Oxyz$.

4.58. W równoległoboku $ABCD$ dane są kolejne wierzchołki $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 1, 3)$, $C = (1, 5, -2)$. Wyznaczyć wierzchołek D. Obliczyć cosinus kąta między przekątnymi.

4.59. W równoległoboku $ABCD$ dane są dwa kolejne wierzchołki $A = (2, 4, -1)$, $B = (3, 0, 2)$ oraz środek równoległoboku $S = (0, 0, 2)$. Wyznaczyć pozostałe dwa wierzchołki i pole.

4.60. O trójkącie ABC wiemy, że $\overrightarrow{AB} = [3, 1, -1]$ i $\overrightarrow{BC} = [1, 0, 2]$. Obliczyć pole tego trójkąta, jego wysokość h należącą do boku BC i długość środkowej AK (K — środek boku BC).

4.61. Obliczyć pole koła opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (1, 3, 0)$, $B = (6, 1, 2)$, $C = (1, 0, 3)$.

4.62. Obliczyć objętość i pole powierzchni całkowitej równoległościanu zbudowanego na wektorach $\boldsymbol{u} = [1, 0, 0]$, $\boldsymbol{v} = [1, 1, 2]$, $\boldsymbol{w} = [2, 1, 0]$.

4.63. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach $A = (0, 0, 1)$, $B = (2, 0, 0)$, $C = (2, 2, 2)$, $D = (0, 1, 5)$ oraz wszystkie cztery wysokości tego czworościanu.

4.64. Dane są trzy wierzchołki czworościanu $A = (4, 0, -2)$, $B = (6, -2, 2)$, $C = (4, -4, 6)$. Wyznaczyć czwarty wierzchołek D, wiedząc, że D leży na osi Oy, a objętość czworościanu jest równa 40.

4.65. Obliczyć objętość kuli ograniczonej sferą przechodzącą przez punkty $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (1, 0, 3)$.

Środek mas

Środkiem mas punktów materialnych $P_1 = (x_1, y_1, z_1), \ldots, P_n = (x_n, y_n, z_n)$ o masach $m_1, \ldots, m_n$ jest punkt o współrzędnych

$$\frac{m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + \ldots + m_n}, \quad \frac{m_1 y_1 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + \ldots + m_n}, \quad \frac{m_1 z_1 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + \ldots + m_n} \tag{24}$$

4.66. Wyznaczyć środek mas punktów materialnych

a) $P_1 = (1, 2, -3)$, $P_2 = (0, 4, 1)$ o masach $m_1 = 2$, $m_2 = 3$;
b) $P_1 = (1, 0, 3)$, $P_2 = (3, 0, 1)$, $P_3 = (0, 0, 0)$ o masach $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 2$;
c) $P_1 = (2, 2, 0)$, $P_2 = (1, 0, 5)$, $P_3 = (-1, 0, 1)$, $P_4 = (0, 0, -2)$ o masach $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = m_4 = 1$.

Punkty, wektory i ich współrzędne na płaszczyźnie

Zakładamy, że wszystkie punkty i wektory rozważane poniżej leżą na płaszczyźnie, na której wprowadzono prostokątny kartezjański układ współrzędnych Oxy o początku O i osiach Ox, Oy. Wersory tych osi oznaczamy $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Rozważane punkty i wektory są określone przez pary współrzędnych. Jeśli punkt P ma współrzędne x, y, to piszemy $P = (x, y)$. Jeśli wektor $\boldsymbol{v}$ ma współrzędne v_x, v_y, to piszemy $\boldsymbol{v} = [v_x, v_y]$ i mamy równości

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} \qquad |\boldsymbol{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Jeśli $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2)$, to

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1], \qquad P_1 P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ a środek odcinka $P_1 P_2$ ma współrzędne $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}$. Niech będą dane wektory $\boldsymbol{u} = [u_x, u_y]$, $\boldsymbol{v} = [v_x, v_y]$ o modułach u, v oraz liczby a, b. Wówczas

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y] \tag{25}$$
$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = [u_x - v_x, u_y - v_y] \tag{26}$$
$$a\boldsymbol{u} = [au_x, au_y] \tag{27}$$
$$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = [au_x + bv_x, au_y + bv_y] \tag{28}$$
$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = u_x v_x + u_y v_y \tag{29}$$

Jeśli $\boldsymbol{u} \neq 0$ i $\boldsymbol{v} \neq 0$, to kąt skierowany $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ spełnia równości

$$\cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{uv}(u_x v_x + u_y v_y), \qquad \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{uv}\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \tag{30}$$

Kąt $\alpha = (x, \boldsymbol{v})$ skierowany od osi Ox do wektora $\boldsymbol{v}$ nazywamy *kątem kierunkowym wektora* $\boldsymbol{v}$. Zachodzą równości $v_x = v \cos\alpha$, $v_y = v \sin\alpha$.

Prostopadłość i *równoległość wektorów* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, zgodnie z umową o wektorze zerowym (s.54), wyraża się związkami

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow u_x v_x + u_y v_y = 0, \qquad \boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v} \Leftrightarrow u_x v_y - u_y v_x = 0 \tag{31}$$

Jeśli $\boldsymbol{u} \nparallel \boldsymbol{v}$, to $|u_x v_y - u_y v_x| =$ *pole równoległoboku zbudowanego na wektorach* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

4.67. Dane są punkty $A = (1, -3)$, $B = (2, 0)$, $C = (-3, 5)$. Wyznaczyć wektory

a) $\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{AC}$ **c)** $5\overrightarrow{BC}$ **d)** $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ **e)** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
f) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$

4.68. Dany jest punkt $A = (3, -2)$. Wyznaczyć punkt B, wiedząc, że

a) $\overrightarrow{AB} = [2, 5]$ **b)** $\overrightarrow{AB} = [0, -3]$ **c)** $\overrightarrow{AB} = [-3, 2]$

4.69. Dany jest punkt $B = (4, 1)$. Wyznaczyć punkt A, wiedząc, że

a) $\overrightarrow{AB} = [3, -4]$ **b)** $\overrightarrow{AB} = [-2, 0]$ **c)** $\overrightarrow{AB} = [4, 1]$

4.70. Wyznaczyć cosinus kąta między wektorami u, v, mając dane
a) $u = [3,5]$, $v = [1,2]$ **b)** $u = [-2,1]$, $v = [0,6]$
c) $u = [6,8]$, $v = [-1,-3]$ **d)** $u = [2,5]$, $v = [-10,4]$

4.71. Wyznaczyć miarę rzutu wektora u na oś wektora v, mając dane
a) $u = [3,5]$, $v = [2,7]$ **b)** $u = [1,-2]$, $v = [-3,5]$
c) $u = [0,2]$, $v = [1,3]$ **d)** $u = [2,1]$, $v = [-1,2]$

4.72. Wyznaczyć punkt $P = (x,y)$, którego odległość od punktu $A = (-3,1)$ oraz odległość od osi Ox są równe 5.

4.73. Wyznaczyć na osi Oy punkt, którego odległość od punktu $A = (1,1)$ jest równa 3.

4.74. Wyznaczyć na osi Ox punkt równoodległy od punktów $A = (1,7)$ i $B = (-1,-1)$.

4.75. Punkty $A = (1,1)$ i $C = (2,6)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu. Wyznaczyć wierzchołki B i D tego kwadratu.

4.76. Wyznaczyć środek S i promień r okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (6,3)$, $B = (-1,6)$, $C = (-4,-1)$.

4.77. Zbadać, czy na czworokącie o wierzchołkach $A = (-2,6)$, $B = (5,5)$, $C = (4,-2)$, $D = (-3,5)$ można opisać okrąg.

4.78. Znaleźć środek S i promień r okręgu przechodzącego przez punkt $A = (2,3)$ i stycznego do osi Oy w punkcie $B = (0,-3)$.

4.79. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1,2)$, $B = (5,-1)$, $C = (3,4)$ oraz wszystkie trzy wysokości tego trójkąta.

4.80. Wyznaczyć wierzchołki trójkąta, znając środki jego boków $F = (3,2)$, $G = (6,5)$, $H = (4,6)$.

4.81. Punkty $A = (-2,4)$, $C = (-1,6)$, $D = (-4,-2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznaczyć wierzchołek B i pole tego równoległoboku oraz cosinus kąta φ między przekątnymi.

4.82. O równoległoboku $ABCD$ wiadomo, że $\overrightarrow{AB} = [8,2]$, $\overrightarrow{BC} = [2,3]$ oraz że środkiem boku CD jest punkt $M = (8,5)$. Wyznaczyć pole, wierzchołki i środek równoległoboku.

4.83. Wyznaczyć punkt $Q = (x,y)$ symetryczny do punktu $P = (1,3)$ względem prostej przechodzącej przez punkty $A = (5,5)$ i $B = (2,-4)$.

4.84. O trójkącie ABC wiadomo, że $A = (-1,3)$, $B = (2,2)$, C leży na osi Oy, a pole trójkąta jest równe 4. Wyznaczyć rzędną wierzchołka C.

4.85. O równoległoboku $ABCD$ wiadomo, że $A = (1,3)$, $B = (6,2)$ są kolejnymi wierzchołkami, że pole jest równe 22, a środek równoległoboku leży na osi Ox. Wyznaczyć wierzchołki C i D.

4.86. W trapezie $ABCD$ punkty $A = (3,1)$, $B = (7,3)$, $C = (6,5)$ są kolejnymi wierzchołkami, boki AB i CD są równoległe, a pole jest równe 15/2. Wyznaczyć wierzchołek D.

4.87. Dane są dwa okręgi: K_1 o środku $S_1 = (2,2)$ i promieniu $r_1 = 2$ i K_2 o środku $S_2 = (5,6)$ i promieniu $r_2 = 1$. Istnieją 4 proste a, b, c, d, z których każda jest styczna do K_1 i do K_2, przy czym K_1 i K_2 leżą po jednej stronie prostej a i po jednej stronie prostej b, natomiast po różnych stronach prostej c i po różnych stronach prostej d. Wyznaczyć punkt M przecięcia się prostych a, b oraz punkt N przecięcia się prostych c, d.

4.88. Wyznaczyć kąt kierunkowy wektora
a) $[1,1]$ **b)** $[-5,3]$ **c)** $[-3,-3]$ **d)** $[1,-3]$

4.89. Wyznaczyć współrzędne v_x, v_y wektora v o module równym 10 i kącie kierunkowym równym
a) $45°$ **b)** $90°$ **c)** $-120°$ **d)** $200°$

Translacja układu współrzędnych

Rozważmy na płaszczyźnie dwa prostokątne kartezjańskie układy: Oxy — układ „stary" i QXY — układ „nowy". Załóżmy, że osie tych układów są odpowiednio równoległe i zgodnie skierowane, a początek Q nowego układu ma w starym układzie współrzędne x_0, y_0. Wówczas dowolny punkt P ma dwojakie współrzędne: *stare* x, y oraz *nowe* X, Y, co zapisujemy

$$P = (x,y)_{Oxy} = (X,Y)_{QXY}$$

Przejście od układu starego do nowego nazywamy *translacją układu* o wektor $[x_0, y_0]$, a związki między współrzędnymi starymi i nowymi

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0 \tag{32}$$

nazywamy *wzorami przejścia* od układu Oxy do układu QXY.

Translacja układu współrzędnych w przestrzeni o wektor $[x_0, y_0, z_0]$ wyraża się wzorami

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0, \quad Z = z - z_0 \tag{33}$$

4.90. Układ QXY powstał z układu Oxy przez translację o wektor $[3, 2]$. Napisać wzory przejścia. Wyznaczyć stare współrzędne punktu Q oraz nowe współrzędne punktu O. Wyznaczyć nowe współrzędne punktu $A = (2, 4)_{Oxy}$ oraz stare współrzędne punktu $B = (2, 4)_{QXY}$. Wyznaczyć nowe równanie prostej $2x + 3y = 12$.

4.91. Krzywa ma równanie $x^2 + 4x + y + 5 = 0$. Wyznaczyć translację układu sprowadzającą to równanie do prostszej postaci.

4.92. Układ $QXYZ$ powstał z układu $Oxyz$ przez translację o wektor $[1, 2, 3]$. Napisać wzory przejścia. Wyznaczyć nowe współrzędne punktu $A = (1, 0, 5)_{Oxyz}$ oraz stare współrzędne punktu $B = (1, 0, 5)_{QXYZ}$. Wyznaczyć nowe równanie płaszczyzny $5x + 6y + 7z + 8 = 0$.

4.93. Powierzchnia ma równanie $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 8z - 20 = 0$. Wyznaczyć translację układu, sprowadzającą to równanie do prostszej postaci.

Obrót układu współrzędnych na płaszczyźnie

Rozważmy na płaszczyźnie dwa prostokątne układy kartezjańskie o wspólnym początku: Oxy — układ „stary" i OXY — układ „nowy". Załóżmy, że układy te są zgodnie skrętne i niech $\alpha = (x, X)$ oznacza kąt skierowany od Ox do OX. Wówczas dowolny punkt płaszczyzny ma dwojakie współrzędne: *stare* x, y i *nowe* X, Y i zachodzą związki

$$\begin{aligned} x &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{aligned} \tag{34}$$

Przejście od układu Oxy do układu OXY nazywamy *obrotem układu współrzędnych* o kąt α, a związki (34) wzorami na ten obrót.

4.94. Układ OXY powstał z układu Oxy przez obrót o kąt: **a)** 45°, **b)** 30°. Napisać wzory na ten obrót. Wyprowadzić wzory odwrotne wyrażające X, Y przez x, y. Wyznaczyć stare współrzędne punktu $A = (2, 5)_{OXY}$ oraz nowe współrzędne punktu $B = (2, 5)_{Oxy}$. Wyznaczyć nowe równanie prostej $y = \sqrt{\frac{1}{3}}\,x$.

Obrót układu współrzędnych w przestrzeni

Rozważmy w przestrzeni dwa prostokątne układy kartezjańskie o wspólnym początku: $Oxyz$ — układ „stary" i $OXYZ$ — układ „nowy". Załóżmy, że są to układy zgodnie skrętne i niech c_{ij} (dla $i = 1, 2, 3$ oraz $j = 1, 2, 3$) oznacza cosinus kąta między i-tą osią układu starego i j-tą osią układu nowego, tzn. $c_{11} = \cos(x, X)$, $c_{12} = \cos(x, Y)$ itd. Wówczas dowolny punkt przestrzeni ma dwojakie współrzędne: *stare* x, y, z i *nowe* X, Y, Z oraz zachodzą związki

$$\begin{aligned} x &= c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z \qquad & X &= c_{11}x + c_{21}y + c_{31}z \\ y &= c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z & Y &= c_{12}x + c_{22}y + c_{32}z \\ z &= c_{31}X + c_{32}Y + c_{33}Z & Z &= c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z \end{aligned} \tag{35}$$

Przejście od układu $Oxyz$ do układu $OXYZ$ nazywamy *obrotem układu współrzędnych w przestrzeni* wyznaczonym przez macierz $[c_{ij}]$, a wzory (35) wzorami na ten obrót albo wzorami przejścia od $Oxyz$ do $OXYZ$. Macierz $[c_{ij}]$ jest *ortogonalna*, tzn. jej kolumny są wersorami wzajemnie prostopadłymi. Wyznacznik tej macierzy jest równy 1.

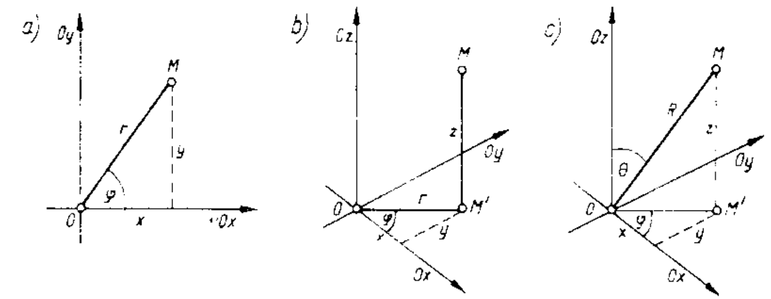
4.95. Dane są związki: $x = \frac{1}{3}(X + 2Y + 2Z)$, $y = \sqrt{\frac{1}{5}}(2X - Z)$, $z = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}(2X - 5Y + 4Z)$. Napisać macierz współczynników i sprawdzić, że jest to macierz ortogonalna o wyznaczniku równym 1, a więc że są to wzory na obrót układu współrzędnych w przestrzeni. Wyznaczyć nowe równanie płaszczyzny $3x + \sqrt{5}(y + 3z) = 0$. Wyznaczyć stare współrzędne punktu $A = (0, 1, 0)_{OXYZ}$ oraz nowe współrzędne punktu $B = (1, 0, 0)_{Oxyz}$.

4.96. W poniższej tablicy zastąpić pytajniki liczbami tak, aby otrzymać macierz ortogonalną o wyznaczniku równym 1

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & ? \\ \frac{3}{10} & -\frac{4}{10} & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Będzie to macierz wyznaczająca obrót układu współrzędnych w przestrzeni. Obliczyć kąt między osiami Oz i OZ.

Współrzędne biegunowe, cylindryczne i sferyczne



Współrzędne biegunowe punktu $M = (x, y)$ płaszczyzny Oxy (rys. a) są to liczby r, φ określone następująco:

1° $r = OM$

2° $\varphi = (Ox, \overrightarrow{OM})$, jeśli $OM \neq 0$; φ jest liczbą dowolną, jeśli $OM = 0$.

Zachodzą związki

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \tag{36}$$

Współrzędne cylindryczne punktu $M = (x, y, z)$ przestrzeni $Oxyz$ (rys. b) są to liczby r, φ, z określone następująco:

1° liczby r, φ są współrzędnymi biegunowymi na płaszczyźnie Oxy rzutu punktu M na tę płaszczyznę;

2° z jest współrzędną prostokątną punktu M na osi Oz.

Zachodzą związki

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z \tag{37}$$

Współrzędne sferyczne punktu $M = (x, y, z)$ przestrzeni $Oxyz$ (rys. c) są to liczby R, θ, φ określone następująco:

1° $R = OM$

2° $\theta = (Oz, \overrightarrow{OM})$, jeśli $OM \neq 0$; θ jest liczbą dowolną, jeśli $OM = 0$

3° niech $M' = \text{rzut}_{Oxy} M$; $\varphi = (Ox, \overrightarrow{OM'})$, jeśli $OM' \neq 0$; φ jest liczbą dowolną, jeśli $OM' = 0$. Zachodzą związki

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = R\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = R\cos\theta \tag{38}$$

4.97. Na płaszczyźnie Oxy za pomocą współrzędnych prostokątnych kartezjańskich, są dane punkty: $A = (1, 1)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 2)$, $D = (-1, -3)$, $E = (0, -3)$, $F = (0{,}5, -1{,}2)$. Wyznaczyć współrzędne biegunowe tych punktów.

4.98. Na płaszczyźnie Oxy za pomocą współrzędnych biegunowych są dane punkty: $A = (r = 3, \varphi = 0)$, $B = (r = 1, \varphi = 135°)$, $C = (r = 2, \varphi = 90°)$, $D = (r = 5, \varphi = 180°)$, $E = (r = 1, \varphi = -60°)$, $F = (r = 4, \varphi = -90°)$. Wyznaczyć współrzędne prostokątne tych punktów.

4.99. W przestrzeni $Oxyz$ za pomocą współrzędnych prostokątnych kartezjańskich są dane punkty: $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (1, 0, 1)$, $D = (-1, 1, 0)$, $E = (-1, -1, -1)$, $F = (4, -5, -2)$. Wyznaczyć współrzędne sferyczne tych punktów.

4.100. W przestrzeni $Oxyz$ za pomocą współrzędnych sferycznych są dane punkty: $A = (R = 2, \varphi = 45°, \theta = 0)$, $B = (R = 1, \varphi = 0, \theta = 60°)$, $C = (R = 1, \varphi = 90°, \theta = 90°)$, $D = (R = 12, \varphi = -30°, \theta = -45°)$. Wyznaczyć współrzędne prostokątne tych punktów.

Translacja i obrót figury w płaszczyźnie Oxy

Translacja o wektor $[a, b]$ przekształca punkt $P = (x, y)$ w punkt $P' = (x', y')$, gdzie

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b \tag{39}$$

Obrót dokoła punktu O o kąt skierowany α przekształca punkt $P = (x, y)$ w punkt $P' = (x', y')$, gdzie

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y &= -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

4.101. Parabolę $y = 2x^2 + 1$ poddać translacji o wektor $[2, -3]$.

4.102. Trójkąt o wierzchołkach $A = (1, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, 2)$ obrócić dokoła punktu O o kąt $30°$.

4.103. Prostą $y = 2x - 1$ obrócić dokoła punktu O o kąt: **a)** $60°$, **b)** $-60°$.

4.104. Okrąg $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ obrócić dokoła punktu O o kąt $90°$.

4.105. Wyznaczyć obraz prostej $y = -x + 2$ otrzymany w wyniku

a) obrotu dokoła punktu O o kąt $90°$, a następnie translacji o wektor $[1, 1]$;

b) translacji o wektor $[1, 1]$, a następnie obrotu dokoła punktu O o kąt $90°$.

Rozdział 5

Proste i płaszczyzny

Prosta na płaszczyźnie

Niech $P = (x, y)$ oznacza punkt dowolny płaszczyzny Oxy i niech $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ będą punktami danymi. Prosta przechodząca przez punkt P_0 i równoległa do niezerowego wektora $\mathbf{v} = [p, q]$, ma równanie *wektorowe*

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}, \qquad t \in \mathscr{R} \tag{1}$$

które zapisujemy w postaci parametrycznej

$$x - x_0 = pt, \qquad y - y_0 = qt; \qquad t \in \mathscr{R} \tag{2}$$

lub w postaci *proporcji*

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} \tag{3}$$

Zapis (3), jako skrót zapisu (2), jest używany także wtedy, gdy jedna z liczb p, q jest zerem, np. jeśli $p = 0$, to (3) oznacza: $x - x_0 = 0$, y — dowolne. Każdy z warunków (1), (2), (3) jest równaniem pewnej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{v} = [p, q] \neq 0$.

Prosta przechodząca przez dwa różne punkty P_0 i P_1 ma równanie wynikające z (1), (2) lub (3) przez zastąpienie wektora $\mathbf{v}$ wektorem $\overrightarrow{P_0P_1}$.

Prosta przechodząca przez punkt P_0 i prostopadła do niezerowego wektora $N = [A, B]$ ma równanie wektorowe

$$N\overrightarrow{P_0P} = 0 \tag{4}$$

które zapisujemy w *postaci ogólnej*, ukazującej punkt P_0

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{5}$$

lub w *postaci ogólnej* zredukowanej

$$Ax + By + C = 0 \tag{6}$$

gdzie $C = -Ax_0 - By_0$. Każde z równań (4), (5), (6) jest równaniem pewnej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{n} = [A, B] \neq 0$.

Prosta l przechodząca przez punkt P_0 nie prostopadła do osi Ox i tworząca z osią Ox kąt skierowany $\sphericalangle(x, l)$ taki, że $\operatorname{tg}(x, l) = m$, ma *równanie kierunkowe* ukazujące punkt P_0

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{7}$$

i *równanie kierunkowe* zredukowane

$$y = mx + b \tag{8}$$

gdzie $b = y_0 - mx_0$. Liczbę m nazywamy *współczynnikiem kierunkowym* prostej l.

Prosta przecinająca osie Ox i Oy w punktach $(a, 0)$ i $(0, b)$, $ab \neq 0$, ma równanie *odcinkowe*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{9}$$

Odległość punktu $M = (x_M, y_M)$ od prostej $l: Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem

$$\operatorname{dist}(M, l) = \frac{1}{N}|Ax_M + By_M + C| \tag{10}$$

gdzie $N = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Niech będą dane dwie różne proste (równoległe lub przecinające się)

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Pęk prostych wyznaczony przez proste l_1 i l_2 ma równanie

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \tag{11}$$

w którym liczby λ, μ mają wartości dowolne z wyjątkiem wartości, dla których $\lambda A_1 + \mu A_2 = \lambda B_1 + \mu B_2 = 0$.

Jeśli proste l_1 i l_2 przecinają się, to *dwusieczne* d_1 i d_2 prostych l_1, l_2 mają równania

$$\begin{aligned} d_1&: \frac{1}{N_1}(A_1x + B_1y + C_1) + \frac{1}{N_2}(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \\ d_2&: \frac{1}{N_1}(A_1x + B_1y + C_1) - \frac{1}{N_2}(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie $N_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$, $N_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$.

5.1. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $(4, 2)$ i

a) równoległej do wektora $[3, 5]$,
b) prostopadłej do wektora $[3, 5]$,
c) równoległej do wektora $[1, 0]$,
d) prostopadłej do wektora $[1, 0]$,
e) przechodzącej przez punkt $(1, -1)$,
f) tworzącej z osią Ox kąt $60°$,
g) tworzącej z osią Ox kąt $-45°$.

5.2. Napisać w postaci ogólnej równanie prostej, która przechodzi przez punkt $(1,3)$ i
a) jest równoległa do wektora $[4,-1]$,
b) jest prostopadła do wektora $[4,-1]$,
c) przechodzi przez punkt $(2,5)$,
d) przechodzi przez punkt $(2,3)$,
e) przechodzi przez punkt $(1,5)$.

5.3. Napisać równanie prostej, odcinającej na osi Ox wektor $\overrightarrow{OA}$ o mierze 3 i na osi Oy wektor $\overrightarrow{OB}$ o mierze 5.

5.4. Napisać równanie prostej o współczynniku kierunkowym $m = 3/4$
a) przechodzącej przez początek układu,
b) przechodzącej przez punkt (x_0, y_0),
c) przecinającej oś Oy w punkcie o rzędnej równej 5,
d) przechodzącej przez punkt $(3,6)$,
e) przecinającej oś Ox w punkcie o odciętej równej -1,
f) nie podlegającej żadnemu dodatkowemu warunkowi.

5.5. Prosta ma równanie: $x = 4t$, $y = -3t+3$; $t \in \mathscr{R}$. Napisać równanie tej prostej w postaci: a) proporcji, b) ogólnej, c) kierunkowej, d) odcinkowej.

5.6. Prosta ma równanie $2x-5y+3=0$. Napisać równanie tej prostej w postaci: a) odcinkowej, b) kierunkowej, c) proporcji, d) parametrycznej.

5.7. Które z prostych
$l_1: 2x+3y+1=0$, $l_2: 2x+2y+3=0$ $l_3: y=x$, $l_4: y=1-x$, $l_5: y=1$, $l_6: x=2$, $l_7: 3x-2y-1=0$
są wzajemnie prostopadłe? Które z tych prostych są wzajemnie równoległe?

5.8. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $(-1,4)$ i równoległej do prostej
a) $2x-5y-7=0$ b) $x-3y=0$ c) $y=x$ d) $y=3$ e) $x=3$

5.9. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $(-1,4)$ i prostopadłej do prostej
a) $2x-5y-7=0$ b) $x-3y=0$ c) $y=x$ d) $y=3$ e) $x=3$

5.10. Obliczyć cosinus lub tangens kąta prostych l_1, l_2 (*Zarys*, s. 164), mając dane
a) $l_1: 2x+3y+1=0$, $l_2: 6x-5y-10=0$
b) $l_1: y=2x+1$, $l_2: y=-7x+1$
c) $l_1: y=-2x$, $l_2: x=2t$, $y=6t-11$; $t \in \mathscr{R}$

5.11. Obliczyć współczynnik kierunkowy prostej p, która z prostą l o równaniu $y=2x$ tworzy kąt skierowany o mierze (l,p) równej
a) $\pi/4$ b) $-\pi/4$ c) $\pi/3$ d) $-\pi/3$

5.12. Wyznaczyć punkt wspólny dwóch prostych (*Zarys*, s. 165)
a) $l_1: 3x+2y-6=0$, $l_2: 2x-3y+6=0$
b) $l_1: x+y-10=0$, $l_2: x=t$, $y=2t+1$; $t \in \mathscr{R}$
c) $l_1: x=4-2t$, $y=1-t$; $t \in \mathscr{R}$, $l_2: x=-2-4t$, $y=3+3t$; $t \in \mathscr{R}$
d) $l_1: x\cos\alpha + y\sin\alpha = a$, $l_2: x\cos\beta + y\sin\beta = b$
e) $l_1: y=m_1x+b_1$, $l_2: y=m_2x+b_2$

5.13. Dla jakiej wartości k punkt przecięcia się prostych $l_1: kx-2y=k-1$, $l_2: x-ky=3$ leży na osi Oy?

5.14. Obliczyć odległość punktu P od prostej l, mając dane
a) $P=(5,7)$, $l: 3x+4y+12=0$
b) $P=(-1,-2)$, $l: 2x-y-10=0$
c) $P=(4,-2)$, $l: y=-x+5$
d) $P=(0,0)$, $l: x=at+b$, $y=ct+d$, $|a|+|c|>0$, $t \in \mathscr{R}$

5.15. Wyznaczyć na osi Ox punkty, których odległość od prostej $l: 5x-3y-5=0$ jest równa 5.

5.16. Napisać równania dwusiecznych d_1, d_2 prostych
a) $l_1: 3x+4y+5=0$, $l_2: 12x-5y=0$
b) $l_1: x=3$, $l_2: y=2$ c) $l_1: y=x$, $l_2: y=0$
d) $l_1: y=2x$, $l_2: y=0$
e) $l_1: x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$, $l_2: x\cos\beta + y\sin\beta = 0$
f) $l_1: x\cos\alpha + y\sin\alpha = a$, $l_2: x\cos\beta + y\sin\beta = b$

5.17. Napisać równanie pęku prostych
a) o wierzchołku (x_0, y_0),
b) równoległych do wektora $\boldsymbol{v} = [1, m]$,
c) prostopadłych do wektora $\boldsymbol{e} = [\cos\alpha, \sin\alpha]$,

d) równoległych do wektora $e = [\cos\alpha, \sin\alpha]$,
e) wyznaczonego przez proste $l_1: x+y = 1$, $l_2: x-y = 2$,
f) wyznaczonego przez proste $l_1: 2x+3y = 5$, $l_2: 4x+6y = -1$,
g) wyznaczonego przez proste $l_1: y = mx$, $l_2: x = a$.

5.18. W pęku prostych wyznaczonym przez proste $l_1: 2x+3y+4 = 0$ i $l_2: 5x+6y+7 = 0$ znaleźć prostą l
a) przechodzącą przez początek układu,
b) równoległą do prostej $8x+9y+10 = 0$,
c) prostopadłą do prostej $8x+9y+10 = 0$.

5.19. Zbadać, czy prosta $l: y = 3x-5$ należy do pęku prostych wyznaczonego przez proste $l_1: y = x+1$, $l_2: y = -2x$.

Rzut prostokątny na płaszczyźnie

Rzut punktu M na prostą l jest to punkt przecięcia się prostej l z prostą przechodzącą przez punkt M i prostopadłą do prostej l.

5.20. Znaleźć rzut punktu M na prostą l, mając dane
a) $M = (-2,5)$, $l: x-4y+1 = 0$
b) $M = (5,0)$, $l: y = x-1$
c) $M = (0,0)$, $l: x/a+y/b = 1$, $ab \neq 0$
d) $M = (1,2)$, $l: x = 2t$, $y = t-1$; $t \in \mathscr{R}$

5.21. Znaleźć punkt symetryczny do punktu M względem prostej l, mając dane
a) $M = (3,1)$, $l: y = x-1$
b) $M = (0,0)$, $l: x-2y+10 = 0$

Zagadnienia dotyczące prostej na płaszczyźnie

5.22. Dane są punkty $A = (7,0)$, $B = (8,6)$. Znaleźć na prostej $y = x$ punkt C taki, aby pole trójkąta ABC było równe 11.

5.23. Dane są punkty $A = (3,0)$, $B = (11,0)$, $C = (3,6)$. Wyznaczyć
a) proste zawierające dwusieczne kątów trójkąta ABC,
b) środek G i promień r okręgu wpisanego w trójkąt ABC,
c) środek H i promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC.

5.24. O trójkącie ABC wiadomo, że bok AB leży na prostej $3x-4y+24 = 0$, wysokość AD leży na prostej $2x-3y+19 = 0$, a wysokość BE na prostej $y = 6$. Znaleźć równanie prostej, na której leży: **a)** bok AC, **b)** bok BC, **c)** wysokość CF.

5.25. O trójkącie ABC wiadomo, że bok AB leży na prostej $4x+3y = 5$, dwusieczna kąta BAC leży na prostej $y+5 = 0$, a dwusieczna kąta ABC na prostej $7x+4y = 5$. Znaleźć równanie prostej, na której leży: **a)** bok AC, **b)** bok BC.

5.26. O trójkącie ABC wiadomo, że $A = (6,2)$, $B = (0,5)$ i że w punkcie $M = (1,2)$ przecinają się proste zawierające wysokości tego trójkąta. Znaleźć wierzchołek C.

5.27. Wyznaczyć wierzchołki trójkąta równoramiennego, którego podstawa leży na prostej $x+y = 5$, jedno ramię leży na prostej $2x-3y = 0$, a drugie ramię leży na prostej przechodzącej przez punkt $P = (4,6)$.

Prosta i płaszczyzna w przestrzeni

Niech $P = (x,y,z)$ oznacza dowolny punkt przestrzeni $Oxyz$ i niech $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 0,1,2$, będą punktami danymi.

Prosta przechodząca przez punkt P_0 i równoległa do niezerowego wektora $v = [p,q,r]$ ma równanie *wektorowe*

$$\overrightarrow{P_0P} = tv, \qquad t \in \mathscr{R} \tag{13}$$

które zapisujemy w *postaci parametrycznej*

$$x-x_0 = pt, \quad y-y_0 = qt, \quad z-z_0 = rt; \quad t \in \mathscr{R} \tag{14}$$

lub w postaci *proporcji podwójnej*

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} \tag{15}$$

Zapis (15), jako skrót zapisu (14), jest używany także wtedy, gdy jedna lub dwie z liczb p,q,r są zerami, np. jeśli $q = 0$, $pr \neq 0$, to (15) oznacza: $y-y_0 = 0$, $(x-x_0)/p = (z-z_0)/r$, a jeśli $p = q = 0$, $r \neq 0$, to (15) oznacza $x-x_0 = 0$, $y-y_0 = 0$, z — dowolne. Każdy z warunków (13), (14), (15) jest równaniem pewnej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $v = [p,q,r] \neq 0$.

Prosta przechodząca przez dwa różne punkty P_0 i P_1 ma równanie wynikające z (13), (14) lub (15) przez zastąpienie wektora v wektorem $\overrightarrow{P_0P_1}$. Płaszczyzna przechodząca przez punkt P_0 i prostopadła do niezerowego wektora $N = [A,B,C]$ ma równanie wektorowe

$$N\,\overrightarrow{P_0P} = 0 \tag{16}$$

które zapisujemy w *postaci ogólnej* ukazującej punkt P_0

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0 \tag{17}$$

lub w *postaci ogólnej* zredukowanej

$$Ax+By+Cz+D = 0 \tag{18}$$

gdzie $D = -Ax_0-By_0-Cz_0$. Każde z równań (16), (17), (18) jest równaniem pewnej płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy $N = [A, B, C] \neq 0$.

Płaszczyzna przechodząca przez punkt P_0 i równoległa do wektorów $\mathbf{v}_1 = [p_1, q_1, r_1]$, $\mathbf{v}_2 = [p_2, q_2, r_2]$, $\mathbf{v}_1 \nparallel \mathbf{v}_2$, ma *równanie wektorowe*

$$\overline{P_0P} = t\mathbf{v}_1+s\mathbf{v}_2 \qquad t, s \in \mathscr{R} \tag{19}$$

które zapisujemy w *postaci parametrycznej*

$$\begin{aligned} x-x_0 &= p_1t+p_2s \\ y-y_0 &= q_1t+q_2s \qquad t, s \in \mathscr{R} \\ z-z_0 &= r_1t+r_2s \end{aligned} \tag{20}$$

lub w *postaci wyznacznikowej*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & p_1 & p_2 \\ y-y_0 & q_1 & q_2 \\ z-z_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{21}$$

Równanie tej płaszczyzny można też zapisać w postaciach (16), (17) lub (18), przyjmując $N = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Każdy z warunków (19), (20), (21) jest równaniem pewnej płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \neq 0$.

Płaszczyzna przechodząca przez trzy niekolinearne punkty P_0, P_1, P_2 ma równanie wynikające z (21) przez podstawienie $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}$, $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{P_0P_2}$.

Płaszczyzna G przechodząca przez punkt P_0 i nierównoległa do osi Oz ma *równanie kierunkowe* ukazujące punkt P_0

$$z-z_0 = m(x-x_0)+n(y-y_0) \tag{22}$$

i *równanie kierunkowe* zredukowane

$$z = mx+ny+c \tag{23}$$

gdzie $c = z_0-mx_0-ny_0$. Liczby m i n są współczynnikami kierunkowymi prostych, wzdłuż których G przecina płaszczyzny Oxz i Oyz.

Płaszczyzna przecinająca osie Ox, Oy i Oz w punktach $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ i $(0, 0, c)$, $abc \neq 0$, ma *równanie odcinkowe*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1 \tag{24}$$

Odległość punktu $M = (x_M, y_M, z_M)$ od płaszczyzny $G: Ax+By+Cz+D = 0$ wyraża się wzorem

$$\operatorname{dist}(M, G) = \frac{1}{N}|Ax_M+By_M+Cz_M+D| \tag{25}$$

gdzie $N = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

Niech będą dane dwie różne płaszczyzny (równoległe lub przecinające się)

$$G_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0, \quad G_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$$

Pęk płaszczyzn wyznaczony przez płaszczyzny G_1 i G_2 ma równanie analogiczne do równania (11). Jeśli płaszczyzny G_1 i G_2 przecinają się, to *płaszczyzny dwusieczne* H_1 i H_2 płaszczyzn G_1, G_2 mają równania analogiczne do równań (12).

Jeśli płaszczyzny G_1 i G_2 przecinają się, to układ równań

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0 \tag{26}$$

jest *równaniem krawędziowym* prostej $l = G_1 \cap G_2$. Prosta l jest równoległa do wektora $[A_1, B_1, C_1] \times [A_2, B_2, C_2]$.

Jeśli prosta l jest nie prostopadła do osi Ox, to jej równanie może być sprowadzone do postaci

$$y = mx+b, \quad z = nx+c \tag{27}$$

i wówczas równania $y = mx+b$, $z = 0$ wyznaczają rzut l na Oxy, a równania $z = nx+c$, $y = 0$ wyznaczają rzut l na Oxz.

5.28. Napisać w postaci proporcji podwójnej równanie prostej przechodzącej przez punkt P_0 i równoległej do wektora $\mathbf{v}$, mając dane

a) $P_0 = (1, -3, 0)$, $\mathbf{v} = [3, -2, 5]$
b) $P_0 = (2, 3, 4)$ $\mathbf{v} = [1, 1, 0]$
c) $P_0 = (2, 3, 4)$, $\mathbf{v} = [0, 1, 0]$
d) $P_0 = (2, 3, 4)$, $\mathbf{v} = [1, 0, 0]$

5.29. Napisać w postaci parametrycznej równanie prostej

a) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-5}{6}$ **b)** $2x+3 = 4y+5 = 8z$

c) $2x+3 = y-x = z+y$ **d)** $2x+3y+4z = 5$, $6x+7y+8z = 9$

5.30. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkty

a) $P_0 = (2, 3, 4)$, $P_1 = (5, 4, 3)$
b) $P_0 = (2, 3, -1)$, $P_1 = (0, 7, 2)$
c) $P_0 = (2, 3, 4)$, $P_1 = (2, 3, 5)$
d) $P_0 = (2, 2, 2)$, $P_1 = (1, 1, 1)$

5.31. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do prostej

a) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-5}{6}$ **b)** $x+1 = y-2 = z+3$

c) $\dfrac{x-1}{2} = 3-y = z$ **d)** $2x = x+y = x+y+z$

5.32. Napisać równanie płaszczyzny, która przechodzi przez:
a) punkt $(1, -2, -1)$ i jest prostopadła do wektora $[1, -3, 2]$,
b) punkt $(0, 2, 5)$ i jest równoległa do wektorów $[1, 0, 0]$ i $[2, 1, -3]$,
c) punkty $(1, 0, 2)$, $(-1, 2, 2)$ i $(0, 3, 4)$,
d) dwie proste równoległe $l_1\colon x/2 = y-1 = (z+2)/3$, $l_2\colon (x-3)/2 = y = z/3$,
e) prostą $x/2 = y-1 = (z+2)/3$ i jest równoległa do prostej $x = y = z/3$.

5.33. Wskazać wektor prostopadły do płaszczyzny

a) $z = mx+ny+c$ b) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1$, $abc \neq 0$

5.34. Obliczyć objętość czworościanu ograniczonego płaszczyzną $z = 2x-3y+6$ i płaszczyznami układu $Oxyz$.

5.35. Wyznaczyć punkt wspólny
a) prostej $x+1 = 2y+2 = z$ i płaszczyzny $x+2y-z = 0$,
b) prostej $x+1 = z, y = 0$ i płaszczyzny $x+2y-z+1 = 0$,
c) prostej $x+1 = z, y = 0$ i płaszczyzny $x+2y-z = 0$.

5.36. Zbadać, czy istnieje punkt wspólny prostych l_1 i l_2

a) $l_1\colon 3x = y = \frac{z+1}{3}$, $l_2\colon 4x = y+1 = z-4$

b) $l_1\colon \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x-y-z = 2 \end{cases}$, $l_2\colon \begin{cases} x+y-z = 1 \\ x-y+z = 2 \end{cases}$

c) $l_1\colon 2x-3 = y+1 = z$, $l_2\colon x = y = z$

5.37. Wyznaczyć cosinus kąta prostych l_1 i l_2

a) $l_1\colon \frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$, $l_2\colon \frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$

b) $l_1\colon \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$, $l_2\colon y = mx+b, z = nx+c$

c) $l_1\colon x = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$, $l_2\colon \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{6}$

d) $l_1\colon \frac{x-1}{3} = y = \frac{z-5}{2}$, $l_2\colon x = 3t$, $y = t$, $z = -2t+3$, $t \in \mathscr{R}$

e) $l_1\colon x = y = -z$, $l_2\colon 2x-3y = 0$, $5y-2z+1 = 0$

5.38. Wyznaczyć cosinus kąta płaszczyzn G_1 i G_2
a) $G_1\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$, $G_2\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$
b) $G_1\colon Ax+By+Cz+D = 0$, $G_2\colon z = mx+ny+c$
c) $G_1\colon z = mx+ny+c$, $G_2\colon x = 0$
d) $G_1\colon x+y = 0$, $G_2\colon x-z = 0$

5.39. Wyznaczyć sinus kąta prostej l i płaszczyzny G

a) $l\colon \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$, $G\colon Ax+By+Cz+D = 0$

b) $l\colon \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{6}$, $G\colon 7x+8y+9z+10 = 0$

c) $l\colon x-1 = -y = \frac{z-2}{\sqrt{2}}$, $G\colon x+y-z\sqrt{2} = 0$

Rzut prostokątny w przestrzeni

Rzut prostokątny punktu M na płaszczyznę G jest to punkt wspólny płaszczyzny G i prostej g przechodzącej przez M i prostopadłej do G. Rzut prostokątny punktu M na prostą l jest to punkt wspólny prostej l i płaszczyzny L przechodzącej przez M i prostopadłej do l.

5.40. Wyznaczyć
a) rzut punktu $(0, 3, 3)$ na płaszczyznę $2x+3y-z+1 = 0$
b) rzut punktu $(1, 0, -2)$ na prostą $x+y-2z = 0$, $x-y+3 = 0$.

5.41. Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu $(6, 2, 9)$ względem
a) płaszczyzny $2x+y+z+4 = 0$,
b) prostej $\frac{x+7}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+6}{4}$.

5.42. Wyznaczyć rzut prostej $\frac{x-1}{4} = y-1 = \frac{z+8}{7}$ na płaszczyznę $2x-y+3z+23 = 0$.

5.43. Obliczyć odległość punktu M od płaszczyzny G, mając dane
a) $M = (3, 5, 1)$, $G\colon 2x-3y+4z-10 = 0$
b) $M = (2, 3, -5)$, $G\colon z = 4x-8y+1$

5.44. Na prostej $x = y = z$ znaleźć punkt, którego odległość od płaszczyzny $6x-2y+3z-14 = 0$ jest równa 1.

5.45. Wykazać, że prosta $\frac{x+3}{2} = y = z-1$ i płaszczyzna $x+3y-5z+2 = 0$ są równoległe i obliczyć ich odległość.

5.46. Obliczyć odległość punktu M od prostej l, mając dane

a) $M = (5,4,3)$, $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{6}$

b) $M = (3,4,5)$, $l: x+y-z = 0$, $x-y+z = 2$

5.47. Obliczyć odległość prostej l_1 od prostej l_2, mając dane

a) $l_1: \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z-2}{2}$, $l_2: \begin{cases} 2x-2y-z+11 = 0 \\ 3x-2y-2z+16 = 0 \end{cases}$

b) $l_1: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-4}{3} = -z-2$, $l_2: \begin{cases} x = -2t \\ y = 9t-7 \\ z = 2t+2 \end{cases}$ $t \in \mathscr{R}$

Zadania trudniejsze

5.48. Wykazać, że prosta $l: \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-7}{-2}$ jest równoległa do płaszczyzny $G: 2x-2y+z = 0$, a następnie wyznaczyć równanie prostej p zawartej w G, równoległej do l i odległej od l o 5.

5.49. Dane są dwie płaszczyzny $G: x+2y-2z+1 = 0$ oraz $H: 3x-4z+2 = 0$. Znaleźć prostą p równoległą do G i do H i odległą od G i od H o 2.

5.50. Dana jest prosta $l: 2x = y = z-1$ i na niej punkt $P_0 = (0,0,1)$ oraz prosta $k: x = y, z = 0$. Wyznaczyć równanie prostej p przechodzącej przez P_0, prostopadłej do l i mającej punkt wspólny z prostą k.

5.51. Czworościan $ABCD$ o wierzchołkach $A = (0,0,0)$, $B = (3,0,0)$, $C = (0,2,0)$, $D = (0,0,5)$ przecięto płaszczyzną $G: 20x-15y-24z+48 = 0$ na dwie bryły. Obliczyć objętości tych brył i pole przekroju.

5.52. Czworościan $ABCD$ o wierzchołkach $A = (0,0,0)$, $B = (3,0,0)$, $C = (0,3,1)$, $D = (3,3,5)$ przecięto płaszczyzną $G: z = c$ na dwie bryły o równych objętościach. Wyznaczyć c.

5.53. Płaszczyzny $G_1: 2x-y+5z-1 = 0$, $G_2: x+y+2 = 0$ wyznaczają pewien pęk płaszczyzn. Wyznaczyć płaszczyznę G należącą do tego pęku i spełniającą jeden z następujących warunków:

a) G przechodzi przez punkt $P = (3,4,5)$,
b) G jest równoległa do płaszczyzny $x+y+z = 0$,
c) G jest równoległa do prostej $x = y = z$,
d) G jest prostopadła do prostej $x = y = z$,
e) G jest równoległa do płaszczyzny $x+y+z = 0$.

Rozdział 6

Ciągi i szeregi liczbowe

Ciąg liczbowy

Ciąg liczbowy nieskończony (krótko: *ciąg*) jest to funkcja, której dziedziną jest zbiór $\mathcal{N}$ lub $\mathcal{N}_0$, a przeciwdziedziną dowolny podzbiór zbioru $\mathcal{R}$. Argument tej funkcji nazywamy *wskaźnikiem* i oznaczamy zwykle literą n; wartość tej funkcji (odpowiadającą wskaźnikowi n) nazywamy *n-tym wyrazem* ciągu i oznaczamy zwykle symbolem a_n; ciąg zaś oznaczamy

$$(a_n) \quad \text{lub} \quad (a_1, a_2, \ldots)$$

Umowa. Jeśli ciąg jest dany wzorem określającym n-ty wyraz w zależności od wskaźnika n, np. wzorem $a_n = n(n+1)$, to w poniższych zadaniach piszemy tylko prawą stronę tego wzoru.

6.1. Obliczyć pięć początkowych wyrazów ciągu, którego n-ty wyraz jest dany wzorem

a) $\dfrac{n+1}{n^2+1}$ **b)** $(-1)^{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{4}$ **c)** $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$

6.2. Obliczyć pięć początkowych wyrazów ciągu określonego rekurencyjnie (*Zarys*, s. 27)

a) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n+1}{a_n}$ **b)** $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$

Monotoniczność i ograniczoność ciągu

6.3. Zbadać, czy poniższy ciąg jest monotoniczny i podać rodzaj monotoniczności (*Zarys*, s. 185)

a) $\dfrac{n+1}{n^2+1}$ **b)** $\dfrac{3n^2+5n-3}{n^2+2n}$ **c)** $\cos\dfrac{n\pi}{6}$ **d)** $\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$ **e)** $\dfrac{n^n}{n!}$

f) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{n}{a_n}$ **g)** $\cos\dfrac{1}{n}$ **h)** $1000n - n^2$ **i)** $\dfrac{2^n}{n^2}$

6.4. Zbadać, czy poniższy ciąg jest ograniczony

a) $\dfrac{n+3}{n^2}$ **b)** $\left(\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)^n$ **c)** $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{n}$ **d)** $\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$

e) $\sqrt{n}$ **f)** $\sqrt[n]{n}$ **g)** $n\cos\dfrac{n\pi}{6}$ **h)** $1000n - n^2$

Granica skończona ciągu

Powiedzenie, że *granicą ciągu* (a_n) jest liczba g, albo że *ciąg* (a_n) *jest zbieżny* do granicy g, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \text{lub} \quad \lim a_n = g \quad \text{lub} \quad a_n \to g$$

oznacza, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba δ taka, że dla każdej liczby naturalnej n jeśli $n > \delta$, to $|a_n - g| < \varepsilon$.

6.5. Udowodnić według powyższej definicji, że

a) $\dfrac{3}{n+5} \to 0$ **b)** $\dfrac{n}{n^2+1} \to 0$ **c)** $\dfrac{n+2}{n+7} \to 1$ **d)** $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{n} \to 1$

e) $\dfrac{\sqrt[5]{n^5+n+1}}{n} \to 1$ **f)** $\dfrac{n^2-n}{n^2+n} \to 1$ **g)** $\dfrac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} \to 1$

Granica nieskończona ciągu

Powiedzenie, że *granicą ciągu* (a_n) jest *plus nieskończoność*, albo że ciąg (a_n) jest *rozbieżny do* ∞, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{lub} \quad \lim a_n = \infty \quad \text{lub} \quad a_n \to \infty$$

oznacza, że dla każdej liczby A istnieje liczba δ taka, że dla każdej liczby naturalnej n jeśli $n > \delta$, to $a_n > A$.

Powiedzenie, że *granicą ciągu* (a_n) jest *minus nieskończoność*, albo że ciąg (a_n) jest *rozbieżny do* $-\infty$, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{lub} \quad \lim a_n = -\infty \quad \text{lub} \quad a_n \to -\infty$$

oznacza, że dla każdej liczby A istnieje liczba δ taka, że dla każdej liczby naturalnej n jeśli $n > \delta$, to $a_n < A$.

6.6. Udowodnić według definicji, że

a) $n! \to \infty$ b) $\lg n \to \infty$ c) $2^n \to \infty$ d) $a^n \to \infty$ dla $a > 1$

e) $a^n \to 0$ dla $|a| < 1$ f) $\frac{2^n}{n} \to \infty$ g) $\frac{2^n}{n^2} \to \infty$ h) $\frac{2^n}{n!} \to 0$

f) $\frac{n^n}{n!} \to \infty$

6.7. Udowodnić według definicji, że

a) $\sqrt[3]{100-n} \to -\infty$ b) $100n - n^2 \to -\infty$ c) $\lg\frac{1}{n} \to -\infty$

Rachunek granic ciągów

Jeśli $a_n \to a$, $b_n \to b$, to $a_n + b_n \to a+b$, $a_n - b_n \to a-b$, $a_n b_n \to ab$.
Jeśli $a_n \to a$, $b_n \to b$, $b_n \neq 0$, $b \neq 0$, to $a_n/b_n \to a/b$.
Jeśli $a_n \to 0$, $a_n > 0$, to $1/a_n \to \infty$.
Jeśli $a_n \to 0$, $a_n < 0$, to $1/a_n \to -\infty$.
Jeśli $|a_n| \to \infty$, to $1/a_n \to 0$.
Jeśli $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, to $a_n b_n \to \infty$.
Jeśli $a_n \to \infty$, $b_n \to b > 0$, to $a_n b_n \to \infty$.
Jeśli $a_n \to \infty$, $b_n \to b < 0$, to $a_n b_n \to -\infty$.
Jeśli $a_n \to \infty$, $b_n \to 0$, to wyznaczenie granicy ciągu $a_n b_n$ wymaga szczegółowych badań.
Jeśli $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, to $a_n + b_n \to \infty$.
Jeśli $a_n \to \infty$, $|b_n| < M$, to $a_n + b_n \to \infty$.
Jeśli $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$, to wyznaczenie granicy ciągu $a_n + b_n$ wymaga szczegółowych badań.

6.8. Wyznaczyć granicę poniższego ciągu, o ile ta granica istnieje

a) $\frac{1}{n}$ b) $1+\frac{1}{n}$ c) $\frac{1}{100} - \frac{100}{n}$ d) $\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)$

e) $\frac{1}{n}\left(100+\frac{1}{n}\right)$ f) $\dfrac{8-\frac{3}{n}}{2+\frac{5}{n}}$ g) $\frac{3n+1}{5n-1}$ h) 1^n i) 0^n

j) 3^n k) $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ l) $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ m) n^n n) $\left(\frac{n}{100}\right)^n$ o) $\left(\frac{100}{n}\right)^n$

p) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100}$ q) $\left(1+\frac{1}{100}\right)^n$ r) $\left(1-\frac{1}{100}\right)^n$ s) $\sqrt[10]{n}$

t) $\sqrt[n]{10}$ u) $\sqrt[n]{10n}$ v) $\frac{100^n}{n^{100}}$ w) $\frac{100^n}{n!}$ z) $\frac{100^{(n^2)}}{n^n}$

6.9. Wyznaczyć granicę poniższego ciągu (a, b — liczby stałe)

a) $\sqrt{\frac{1}{n}}$ b) $\frac{10}{3n}+3$ c) $a+\frac{b}{n}$ d) $\left(a+\frac{1}{n}\right)\left(b+\frac{1}{n}\right)$

e) $\left(\frac{100}{n}-4\right)\frac{100}{n}$ f) $\frac{10}{2+3/n}$ g) $\frac{3n-1/n}{2n-1/n}$ h) $\sin^n\frac{\pi}{2}$

i) $\sin^n\frac{\pi}{4}$ j) $\sin^n\pi$ k) $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ l) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ m) $(1+a^2)^n$

n) $(1+a^2)^{-n}$ o) $(2n)^n$ p) n^{-n} q) $(-n)^{-n}$ r) $\sqrt[100]{n}$

s) $\sqrt[n]{100}$ t) $\sqrt[n]{100n^2}$ u) $\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{10}$ v) $\left(1-\frac{1}{10}\right)^{2n}$

w) $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ x) $\frac{1{,}01^n}{100n^2}$ y) $\frac{100^{100n}}{n!}$ z) $\frac{n!}{n^n}$

6.10. Wyznaczyć granicę ciągu

a) $1-100n^3+n^4$ b) n^2-n^3 c) $\frac{6n^5-2n}{2n^5+1}$ d) $\frac{6n^5-2n}{2n^6+1}$

e) $\sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+4}}$ f) $\frac{5^n+1000}{5^{n+1}+1}$ g) $\frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{(n+2)^3+(n-2)^3}$

h) $\frac{n^8}{(2n+1)^9}$ i) $\frac{n^8}{(2n+1)^8}$ j) $\frac{n^8}{(2n+1)^7}$

k) $\sqrt{n+4}-\sqrt{n}$ l) $\sqrt{3n^2+2n-5}-2n$ m) $\sqrt{2n+5}-\sqrt{2n+3}$

n) $\sqrt{2n+5}-\sqrt{n+3}$ o) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

p) $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$

6.11. Wyznaczyć granicę ciągu

a) $n^5-(100n)^4$ b) $\frac{2n^3-10n^2-n}{3n^3+12n^2+1}$ c) $\frac{n^5+n+1}{n^4-n^3+n}$

d) $\frac{(n+1)^{100}}{(n+2)^{101}}$ e) $\frac{(n+1)^{100}}{(n+2)^{100}}$ f) $\frac{(n+1)^{100}}{(n+2)^{99}}$

g) $\frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{(n+2)^3+(n+1)^3}$ h) $\frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{(n+2)^2+(n-2)^2}$

i) $\sqrt{4n^2+2n-5}-2n$ j) $\sqrt{5n^2+2n-5}-2n$

k) $\frac{5n^2+\sqrt{n^3+2}}{2n^2-n+4}$ l) $\frac{\sqrt{3n}+\sqrt{5n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

6.12. Wyznaczyć granicę ciągu (c, k — stałe, $c\in\mathcal{R}$, $k\in\mathcal{N}$)

a) $\frac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+2)^3+(n-2)^3}$ b) $\frac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+2)^2+(n-2)^2}$

c) $\sqrt[3]{n^3+7n}-n$ d) $\sqrt[3]{1-n^3}+n$

e) $\sqrt[3]{2n^3+7n}-n$ f) $\sqrt[3]{n^3+7n^2}-n$

g) $\frac{1}{\sqrt[4]{n^4+n^3}-n}$ h) $\frac{1}{\sqrt[4]{n^4+n^2}-n}$

i) $\frac{c^n}{n^k}$ j) $\frac{c^n}{n!}$ k) $\sqrt[n]{c}, c>0$ l) $\sqrt[n]{n}$ m) $\sqrt[n]{cn}, c>0$

n) $\sqrt[n]{cn^k}, c>0$ o) $a_1=1, a_{n+1}=\frac{n}{a_n}$

6.13. Dla jakiej wartości parametru k ciąg $a_n=\frac{kn+k}{(k+1)n-5}$ ma granicę równą

a) 2 b) 1/2 c) ∞ d) 0

Jaka liczba nie może być granicą tego ciągu?

6.14. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}\sin^2(n!\pi x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x\in\mathcal{Q} \\ 1 \text{ dla } x\notin\mathcal{Q}\end{cases}$$

6.15. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}[\lim_{k\to\infty}\cos^{2k}(n!\,\pi x)] = \begin{cases} 1 \text{ dla } x\in\mathcal{Q} \\ 0 \text{ dla } x\notin\mathcal{Q}\end{cases}$$

6.16. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, wyznaczyć granicę ciągu

a) $\sqrt[n]{2^n+3^n}$ b) $\sqrt[n]{5+n^3}$ c) $\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$

d) $\frac{3^n+(-3)^n}{4^n}$ e) $a_n=\begin{cases}(2^n-1)/2^n \text{ dla } n \text{ parzystych}\\ (2^n+5)/2^n \text{ dla } n \text{ nieparzystych}\end{cases}$

6.17. Wykazać, że ciąg (a_n) określony poniższym wzorem nie ma granicy

a) $(-1)^n$ b) $\cos\frac{n\pi}{2}$ c) $\cos\frac{n\pi}{3}$ d) $(-2)^n$ e) $(-n)^n$

f) $\frac{3^n+(-3)^n}{3^n}$ g) $\frac{1+(-1)^n}{2-(-1)^n}$ h) $\sin\frac{n\pi}{3}$

6.18. Wykazać zbieżność i wyznaczyć granicę ciągu (a_n) określonego poniższym wzorem rekurencyjnym

a) $a_1=\sqrt{6},\ a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$

b) $a_1=\frac{1}{4},\ a_{n+1}=a_1+\frac{1}{2}a_n^2$

c) $a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+1/a_n)$

6.19. Pierwiastek kwadratowy $\sqrt{c}$, $c>0$, wyznaczamy z dowolną dokładnością za pomocą pary ciągów

a_0 — dowolna liczba dodatnia $b_0=c/a_0$
$a_1=(a_0+b_0)/2$ $b_1=c/a_1$
$a_2=(a_1+b_1)/2$ $b_2=c/a_2$
... ...

Wykazać, że dla $c = 2$, $a_0 = 1$ otrzymujemy

$$1{,}414211 = b_3 < \sqrt{2} < a_3 = 1{,}414216$$

Niech $a_0 \neq \sqrt{c}$. Wykazać, że

1° $b_1 < b_2 < \ldots < b_n < \ldots < \sqrt{c} < \ldots < a_n < \ldots < a_2 < a_1$

2° $\lim a_n = \lim b_n = \sqrt{c}$

6.20. Pierwiastek sześcienny $\sqrt[3]{c}$, $c > 0$, wyznaczamy z dowolną dokładnością za pomocą pary ciągów

$$\begin{array}{ll} a_0 - \text{dowolna liczba dodatnia} & b_0 = c/a_0^2 \\ a_1 = (2a_0 + b_0)/3 & b_1 = c/a_1^2 \\ a_2 = (2a_1 + b_1)/3 & b_2 = c/a_2^2 \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

Wykazać, że dla $c = 100$, $a_0 = 5$ otrzymujemy

$$4{,}641586 = b_3 < \sqrt[3]{100} < a_3 = 4{,}641589$$

Wykazać, że ciągi (a_n), (b_n) spełniają związki analogiczne do związków 1° i 2° w poprzednim zadaniu.

U w a g a. W podobny sposób można obliczyć $\sqrt[s]{c}$, $c > 0$, $s \in \mathcal{N}$.

6.21. Korzystając z równości

$$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \quad \lim\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

wyznaczyć granice poniższych ciągów

a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ **b)** $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ **c)** $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$

d) $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$ **e)** $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n}$ **f)** $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{5n}$

g) $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n}$ **h)** $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+1}$ **i)** $\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$

j) $\left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{n}$ **k)** $\left(1 - \frac{1}{5n}\right)^{n}$ **l)** $\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n}$

m) $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n}$ **n)** $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n}$ **o)** $\left(1 + \frac{1}{3n-1}\right)^{4n+3}$

p) $\left(1 - \frac{1}{2n+5}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ **q)** $\left(1 + \frac{1}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n^2+2}{3}}$

6.22. Obliczyć granicę ciągu

a) $\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+1}$ **b)** $\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{(n+1)^2}$

c) $\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{(n+1)^3}$ **d)** $\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$, $|a| < 1, |b| < 1$

e) $\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+6+\ldots+2n}$ **f)** $\dfrac{1+5+9+\ldots+(4n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$

g) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

i) $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$, (a_n), (b_n) są ciągami arytmetycznymi.

Szereg liczbowy i jego suma

Jeśli jest dany ciąg liczbowy o wyrazach $a_1, a_2, \ldots$, to ciąg sum $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ nazywamy *szeregiem liczbowym* (krótko: *szeregiem*) o wyrazach $a_1, a_2, \ldots$ i oznaczamy

$$a_1 + a_2 + \ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

a sumy s_n nazywamy *sumami częściowymi* szeregu (1). Jeśli granica $\lim s_n = s$ istnieje i jest skończona, to mówimy, że szereg (1) jest *zbieżny* i ma sumę s (i wówczas symbol (1) oznacza zarówno szereg, jak i jego sumę). Jeśli zaś granica ta nie istnieje lub jest nieskończona, to mówimy, że szereg (1) jest *rozbieżny* (nie ma sumy).

6.23. Obliczając s_n i $\lim s_n$, orzec czy poniższy szereg jest zbieżny i jaką ma sumę

a) $\dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{100} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{100}$

b) $400 + 200 + 100 + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 400\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c) $\dfrac{1}{400} + \dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{100} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{400}\cdot 2^n$

d) $\dfrac{1}{100} - \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{100} - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{100}(-1)^n$

e) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

f) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

Warunek konieczny zbieżności szeregu

Jeśli szereg (1) jest zbieżny, to $\lim a_n = 0$. Jeśli ta równość nie zachodzi, to szereg jest rozbieżny. Jeśli zaś ta równość zachodzi, to nie wynika z niej zbieżność szeregu i rozpoznanie, czy szereg jest zbieżny, wymaga dalszych badań.

6.24. Zbadać, czy poniższy szereg spełnia warunek konieczny zbieżności, a jeśli spełnia, to obliczyć $\lim s_n$ i orzec, czy szereg jest zbieżny i jaką ma sumę

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n}{n^2+n}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n+b^n}{a^nb^n}$, $a>1, b>1$

g) $\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{n!\pi}{6}$ h) $\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n!\pi}{6}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(an+1-a)(an+1)}, a>0$

l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ m) $\sum_{n=1}^{\infty}\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)$ n) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\lg n}$

6.25. Wyznaczyć zbiór wartości x, dla których dany poniżej szereg geometryczny jest zbieżny. Wyznaczyć sumę tego szeregu

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(x^2-3x+1)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x}{x^2-3}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n x$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^n x$

Kryterium porównawcze

Jeśli nierówność $0 < a_n \leqslant b_n$ zachodzi dla prawie wszystkich wskaźników n, to:
1° ze zbieżności szeregu o wyrazach b_n wynika zbieżność szeregu o wyrazach a_n,
2° z rozbieżności szeregu o wyrazach a_n wynika rozbieżność szeregu o wyrazach b_n.

6.26. Korzystając z tego, że szereg *harmoniczny* rzędu r

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}$$

jest zbieżny dla $r>1$ i rozbieżny dla $r\leqslant 1$ oraz stosując kryterium porównawcze, orzec, czy dany szereg jest zbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+3}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n+1}{n^2-3}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^2-2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n+2}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sin^2 n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{5n^2+2}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{5n-4}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$

j) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3-3}$ k) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n^3-n^2}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$

m) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n^2-n}$ n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}$ o) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n-1}{n^3-n^2}}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n}$ q) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{n+1}}{n}$

r) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ s) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$ t) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n}$

Kryterium ilorazowe i kryterium pierwiastkowe

Szereg $a_1+a_2+\ldots$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, jeśli $\lim a_{n+1}/a_n < 1$ lub $\lim\sqrt[n]{a_n} < 1$, natomiast jest rozbieżny, jeśli $\lim a_{n+1}/a_n > 1$ lub $\lim\sqrt[n]{a_n} > 1$.

6.27. Zbadać, czy poniższy szereg jest zbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)!}{n^{5n}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}+0.01)^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-0,01)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}2^n}{(n+1)^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)!\,3^n}{n^{4n}}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!\,4^n}{n^{4n}}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!\,5^n}{n^{4n}}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}$ n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n}$ o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{(n!)^n\,10^n}$ p) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{n}$

6.28. Zbadać, czy poniższy szereg jest zbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,2^n}{n^{2n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,2^n}{n^{3n}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+5}}{n^2}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^7+1}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!-n!}{n^{2n}+n^2}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 5^{n-1}}$

j) $1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

Umowa. Niekiedy, dla uproszczenia zapisu, piszemy znak sumy Σ, nie podając granic sumowania.

6.29. Zakładając, że liczby $a_1, a_2, \ldots$ są dodatnie, udowodnić, że:
a) jeśli szereg $\Sigma\, a_n$ jest zbieżny, to szereg $\Sigma\, a_n^2$ jest zbieżny;
b) jeśli szereg $\Sigma\, a_n^2$ jest zbieżny, to szereg $\Sigma \frac{1}{n} a_n$ jest zbieżny.

6.30. Udowodnić, że jeśli szeregi $\Sigma\, a_n^2$ i $\Sigma\, b_n^2$ są zbieżne, to szereg $\Sigma\,(a_n+b_n)^2$ jest zbieżny.

Kryterium Leibniza

Szeregiem *naprzemiennym* nazywamy szereg, którego wyrazy są na przemian dodatnie i ujemne. Jeśli w szeregu naprzemiennym moduły wyrazów tworzą ciąg malejący do 0, to szereg ten jest zbieżny.

6.31. Zbadać czy poniższy szereg jest zbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^r}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2(-1)^n}{n}$

Zbieżność bezwzględna i zbieżność warunkowa

Mówimy, że szereg $a_1+a_2+\ldots$ jest *zbieżny bezwzględnie*, jeśli szereg $|a_1|+|a_2|+\ldots$ jest zbieżny. Szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny. Mówimy, że szereg $a_1+a_2+\ldots$ jest *zbieżny warunkowo*, gdy szereg ten jest zbieżny, ale szereg $|a_1|+|a_2|+\ldots$ jest rozbieżny.

6.32. Zbadać, czy poniższy szereg jest zbieżny bezwzględnie, czy zbieżny warunkowo, czy rozbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^r}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{(n+1)^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{\sqrt{n}}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n\pi/4)+\cos(n\pi/4)}{\sqrt{3}}\right)^n$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$

Mnożenie szeregów sposobem Cauchy'ego (*Zarys*, s. 214)

6.33. Zakładając, że $|x| < 1$, $a \in \mathscr{R}$, $b \in \mathscr{R}$, sprawdzić równości

a) $(1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots) = 1+2x+3x^2+\ldots$

b) $(1+x+x^2+\ldots)(1-x+x^2-\ldots) = 1+x^2+x^4+\ldots$

c) $\left(1+a+\frac{a^2}{2!}+\ldots\right)\left(1+b+\frac{b^2}{2!}+\ldots\right) = 1+(a+b)+\frac{(a+b)^2}{2!}+\ldots$

Rozdział 7

Funkcje jednej zmiennej (granice, pochodne)

Funkcja jednej zmiennej

Funkcja rzeczywista jednej zmiennej rzeczywistej, zwana krótko *funkcją jednej zmiennej*, jest to funkcja, której argumenty i wartości są liczbami rzeczywistymi. Niech f oznacza funkcję jednej zmiennej, D — dziedzinę tej funkcji, x — argument. Niech y oznacza wartość funkcji f odpowiadającą argumentowi x. Wówczas piszemy

$$y = f(x) \tag{1}$$

Zachodzą związki: $x \in D \subset \mathscr{R}$, $y \in \mathscr{R}$. Zbiór $\mathscr{R}$ występuje w podwójnej roli: jest przestrzenią zawierającą argumenty funkcji i przestrzenią zawierającą wartości tej funkcji (mówimy, że są tu dwa egzemplarze tego samego zbioru $\mathscr{R}$). Zbiór $\mathscr{R}$ uważamy za przestrzeń z metryką euklidesową; punktami tej przestrzeni są liczby rzeczywiste, a odległością punktów a, b jest $|a-b|$. Przestrzeń $\mathscr{R}$ interpretujemy geometrycznie na osi liczbowej; w odniesieniu do argumentów jest to oś Ox, a w odniesieniu do wartości funkcji — oś Oy.

Wykres funkcji f jest to zbiór par liczb x, y takich, że $x \in D$, $y = f(x)$. Stanowi on podzbiór przestrzeni $\mathscr{R}^2$. W interpretacji geometrycznej na płaszczyźnie Oxy jest to zbiór punktów (na ogół linia).

Otoczenie, sąsiedztwo

7.1. Napisać nierówność, która zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

a) x należy do otoczenia punktu c o promieniu δ,

b) y należy do otoczenia liczby g o promieniu ε,

c) x należy do sąsiedztwa punktu c o promieniu δ,

d) x należy do pewnego sąsiedztwa punktu ∞,

e) x należy do pewnego sąsiedztwa punktu $-\infty$,

f) x należy do prawostronnego sąsiedztwa punktu c o promieniu δ,

g) x należy do lewostronnego sąsiedztwa punktu c o promieniu δ.

7.2. Wskazać liczbę δ taką, aby otoczenie punktu $\sqrt{2}$ o promieniu δ

a) nie zawierało żadnej liczby całkowitej,

b) zawierało dokładnie jedną liczbę całkowitą,

c) zawierało dokładnie dwie liczby całkowite.

Punkt skupienia

Niech C oznacza liczbę rzeczywistą lub ∞ lub $-\infty$. Punkt C nazywamy *punktem skupienia* zbioru Z, $Z \subset \mathscr{R}$, gdy w każdym sąsiedztwie punktu C znajduje się co najmniej jeden punkt zbioru Z.

7.3. Zbiór Z jest sumą trzech zbiorów: zbioru liczb naturalnych, zbioru odwrotności liczb naturalnych i przedziału $(1; 2)$. Wskazać wszystkie punkty skupienia zbioru Z.

7.4. Zbadać, czy punkt 0 jest punktem skupienia dziedziny funkcji

a) $\sin\frac{1}{x}$ **b)** $\ln x$ **c)** $\sqrt{x-1}$ **d)** $\sqrt{\sin\frac{1}{x}}$

7.5. Zbadać, czy punkt ∞ jest punktem skupienia dziedziny funkcji

a) $\operatorname{arc\,tg} x$ **b)** $\sin x$ **c)** $\arcsin x$ **d)** $\sqrt{\sin x}$

7.6. Zbadać, czy punkt $-\infty$ jest punktem skupienia dziedziny funkcji

a) 2^x **b)** $\sqrt{x^2-1}$ **c)** $\sqrt{1-x^2}$ **d)** $\operatorname{tg} x$

Definicja granicy funkcji

Niech C oznacza liczbę c, lub ∞, lub $-\infty$. Niech G oznacza liczbę g, lub ∞, lub $-\infty$. Niech C będzie punktem skupienia dziedziny D funkcji f. Powiedzenie, że *granicą* funkcji f w punkcie C jest G albo, że $f(x)$ dąży do G, gdy x dąży do C, co zapisujemy

$$\lim_{x \to C} f(x) = G \quad \text{albo} \quad f(x) \to G, \text{ gdy } x \to C \tag{2}$$

oznacza, że dla każdego otoczenia U punktu G istnieje sąsiedztwo S punktu C takie, że każdemu argumentowi x należącemu do S odpowiada wartość funkcji $f(x)$ należąca do U.

Tę „otoczeniową" definicję granicy wyrażamy za pomocą nierówności, rozróżniając 9 przypadków w zależności od tego, co oznacza C i co oznacza G (*Zarys*, s. 218–220).

7.7. Napisać za pomocą kwantyfikatorów, nierówności i implikacji definicję granicy funkcji (według Cauchy'ego) w przypadku

a) $\lim_{x \to c} f(x) = g$ **b)** $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ **c)** $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \to \infty} f(x) = g$ **e)** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ **f)** $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

g) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = g$ **h)** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ **i)** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

7.8. Udowodnić według definicji Cauchy'ego, że

a) $\lim_{x \to 7} \frac{x^2-49}{x-7} = 14$ **b)** $\lim_{x \to 1} \frac{5x^2-5}{x-1} = 10$ **c)** $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x+1} = 3$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$ **e)** $\lim_{x \to 0} (1+x^2) = 1$ **f)** $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

g) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ **h)** $\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$ **i)** $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

7.9. Udowodnić według definicji Cauchy'ego, że

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ **b)** $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$ **c)** $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = 1$

d) $\lim_{x \to \infty} (x^2-5x+8) = +\infty$ **e)** $\lim_{x \to \infty} (1-x^2) = -\infty$

f) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ **g)** $\lim_{x \to -\infty} (x^2-5x+8) = +\infty$

h) $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

Granice jednostronne

Jeśli funkcja f jest określona w prawostronnym sąsiedztwie punktu c, to granicę w punkcie c funkcji f zawężonej do tego sąsiedztwa nazywamy *prawostronną* granicą funkcji f w punkcie c i oznaczamy

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x) \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to c+0} f(x) \tag{3}$$

Analogicznie definiujemy *lewostronną* granicę funkcji f w punkcie c, którą oznaczamy

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x) \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to c-0} f(x) \tag{4}$$

Jeśli funkcja f jest określona w obustronnym sąsiedztwie punktu c, to granica funkcji f w punkcie c istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy obie granice jednostronne funkcji f w punkcie c istnieją i są równe.

7.10. Napisać definicję granicy jednostronnej funkcji (według Cauchy'ego) w przypadku

a) $\lim\limits_{x \to c+0} f(x) = p$ **b)** $\lim\limits_{x \to c+0} f(x) = \infty$ **c)** $\lim\limits_{x \to c+0} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = q$ **e)** $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = \infty$ **f)** $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = -\infty$

7.11. Wyznaczyć w punkcie $c = 0$ granice jednostronne funkcji

a) $1/x$ **b)** $\dfrac{x}{x}$ **c)** $\dfrac{x}{|x|}$ **d)** $[x]$

7.12. Wyznaczyć w punktach $c = 1$ i $c = 2$ granice jednostronne funkcji

a) $\dfrac{1}{\sin \pi x}$ **b)** $[x]$ **c)** $\dfrac{x-1}{x-2}$ **d)** $\sqrt{2-x}$

Monotoniczność i ograniczoność funkcji

7.13. Wskazać przedziały, w których poniższa funkcja jest monotoniczna i podać rodzaj monotoniczności w tych przedziałach

a) x^2 **b)** $1/x$ **c)** e^x **d)** $\ln x$ **e)** $\ln|x|$ **f)** $\operatorname{tg} x$

g) $0{,}3^x$ **h)** $0{,}3^{x^2+1}$ **i)** $[x]$ **j)** $\operatorname{sgn} \ln|x|$

7.14. Zbadać, czy poniższa funkcja jest ograniczona w całej swej dziedzinie oraz wskazać ograniczenia górne i dolne (o ile istnieją)

a) $y = 5\cos 3x$ **b)** $y = 0{,}3^x$ **c)** $y = 0{,}3^{x^2+1}$ **d)** $y = \ln x$

e) $y = \ln(1-x^2)$ **f)** $y = \ln(-x^2+3x-2)$

Granice niektórych funkcji

Funkcja $f(x)$	Granica funkcji $f(x)$, gdy		
	$x \to -\infty$	$x \to c$	$x \to \infty$
const $= a$	a	a	a
x	$-\infty$	c	∞
e^x	0	e^c	∞
$\sin x$	[1]	$\sin c$	[1]

Funkcja $f(x)$	Granica funkcji $f(x)$, gdy			
	$x \to -\infty$	$x \to 0-0$	$x \to 0+0$	$x \to \infty$
$1/x$	0	$-\infty$	∞	0
$e^{1/x}$	1	0	∞	1
$\dfrac{\sin x}{x}$	0	1	1	0
$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}$	e	[2]	[3]	e

[1] Granica nie istnieje, ponieważ w każdym sąsiedztwie punktu ∞, względnie $-\infty$, funkcja przyjmuje wszystkie wartości między 1 i -1.
[2] Granica nie istnieje, bo dla $-1 \leqslant x \leqslant 0$ funkcja jest nieokreślona.
[3] Granica ta jest tematem zadania 8.22 m.

Rachunek granic

Zakładamy, że funkcje występujące w poniższych wypowiedziach są określone w sąsiedztwie punktu c, a ich granice odpowiadają przypadkowi, gdy argument x dąży do c.

Jeśli $f(x) \to F$, $g(x) \to G$, to $\begin{cases} f(x)+g(x) \to F+G \\ f(x)-g(x) \to F-G \\ f(x)g(x) \to FG \end{cases}$

Jeśli $f(x) \to F$, $g(x) \neq 0$, $g(x) \to G \neq 0$, to $f(x)/g(x) \to F/G$.
Jeśli $f(x) > 0$, $f(x) \to 0$, to $1/f(x) \to \infty$.
Jeśli $f(x) < 0$, $f(x) \to 0$, to $1/f(x) \to -\infty$.
Jeśli $f(x) \to \infty$, $g(x) \to G > 0$, to $f(x)g(x) \to \infty$.
Jeśli $f(x) \to \infty$, $g(x) \to G < 0$, to $f(x)g(x) \to -\infty$.
Jeśli $f(x) \to \infty$, $g(x) \to 0$, to wyznaczenie granicy iloczynu $f(x)g(x)$ wymaga szczegółowych badań.

Jeśli $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$, to $f(x)+g(x) \to \infty$.
Jeśli $f(x) \to \infty$, $|g(x)| <$ const, to $f(x)+g(x) \to \infty$.
Jeśli $f(x) \to \infty$, $g(x) \to -\infty$, to wyznaczenie granicy sumy $f(x)+g(x)$ wymaga szczegółowych badań.

Analogiczne twierdzenia odnoszą się do przypadków $x \to c+0$, $x \to c-0$, $x \to \infty$ i $x \to -\infty$.

Granica funkcji złożonej $y = f(u)|_{u=g(x)}$

Niech X oznacza jednostronne sąsiedztwo punktu x_0 oraz U — jednostronne sąsiedztwo punktu u_0. Jeśli

1° funkcja $u = g(x)$ odwzorowuje X w U,
2° funkcja $u = g(x)$ dąży do u_0, gdy x należąc do X dąży do x_0,
3° funkcja $y = f(u)$ dąży do y_0, gdy u należąc do U dąży do u_0,

to funkcja złożona $y = f(g(x))$ dąży do y_0, gdy x należąc do X dąży do x_0.

W twierdzeniu tym x_0 może oznaczać liczbę lub ∞ lub $-\infty$ i to samo odnosi się do u_0 i do y_0.

Wyznaczanie granic

Znając granice niektórych funkcji i korzystając z twierdzeń o granicach, można obliczać granice innych funkcji.

7.15. Obliczyć granice

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-1}{x^2-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)e^x}{\cos x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+x^2-x-1}{5x^3+x^2-x+1}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+x^2-x+1}{5x^2+x-1}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x+3}{5x^3+x^2+4}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x\sqrt{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ k) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{5x}-5}{x-5}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{5x}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{7x}$ n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$

p) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$ q) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$ r) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

s) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2-2x+1)}{\ln(x^{10}+3x+1)}$

7.16. Obliczyć granice

a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-3x-10}{x^2-8x+15}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+x^2-5x-2}{x^4-2x^3-10x+20}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{27}{x^3-27}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+1}{7x^3-x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+1}{7x^2-x}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+1}{7x^4-x}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4+1}{5x^2-x}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^4+1}{5x^2-x}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+7}{x+\sqrt[3]{x^2+1}}$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{3x}$ n) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{1+2x}}{2-\sqrt{x}}$ o) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$ r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$

s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$ t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos 2x}$

u) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \left[\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x\right]$ v) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$ w) $\lim\limits_{x\to\pi/6} \dfrac{\sin x-1/2}{x-\pi/6}$

x) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$ y) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^x$ z) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+3}{x^2+7}\right)^{x^2}$

7.17. Obliczyć granice

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4-4x^3-3x^2+18x}{2x^3-19x^2+60x-63}$ b) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^5+4x^4+5x^3+3x^2-4}{x^3+4x^2+7x+6}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^3}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^3}$

e) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ f) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$

g) $\lim_{x\to\infty}\frac{-x^5+3x^2}{x^3-x}$ h) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^5+3x^2}{x^3-x}$ i) $\lim_{x\to\infty}\frac{-x^5+3x^2}{x^4-x}$

j) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^5+3x^2}{x^4-x}$ k) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+3}{x^3-2}$ l) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})$

m) $\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$ n) $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

o) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$ p) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{1+x}}{x}$

7.18. Obliczyć granice

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{2\,\mathrm{tg}\,4x}{3\,\mathrm{tg}\,3x}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 5x}{\mathrm{tg}^2\,2x}$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$ f) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\mathrm{tg}\,x}$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$ h) $\lim_{x\to\pi/6}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

i) $\lim_{x\to\pi/6}\frac{\mathrm{ctg}\,x-\sqrt{3}}{x-\pi/6}$ j) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{x}$

k) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$ l) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

m) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$ n) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$

7.19. Wyznaczyć granicę prawostronną i granicę lewostronną funkcji $y=f(x)$ w punkcie c, mając dane

a) $y=\frac{1}{x-3}$, $c=3$ b) $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-1}$, $c=1$

c) $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-1}$, $c=-1$ d) $y=e^{1/(x-1)}$, $c=1$

e) $y=e^{1/(1-x^2)}$, $c=1$

Ciągłość funkcji

O funkcji f określonej w otoczeniu punktu x_0 mówimy, że jest *ciągła* w punkcie x_0, jeśli $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

7.20. Udowodnić, że funkcja $\cos x$ jest ciągła w dowolnym punkcie x_0.

7.21. Jaką wartość należy nadać w punkcie 0 funkcji

a) $\frac{\sin 3x}{5x}$ b) $\frac{1-\cos x}{x^2}$ c) $\frac{1-\cos^2 x}{x^2}$

aby otrzymać funkcję ciągłą w punkcie 0?

7.22. Wykazać, że *funkcja Dirichleta* określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ gdy } x \text{ jest liczbą wymierną}\\ 0, \text{ gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną}\end{cases}$$

nie jest ciągła w żadnym punkcie.

7.23. Funkcję f określamy w przedziale $(0;1)$ następująco: jeśli x jest liczbą niewymierną, to $f(x)=0$; jeśli zaś x jest ułamkiem skróconym m/n (*Zarys*, s. 29), to $f(x)=1/n$. Wykazać, że funkcja f jest w punkcie x ciągła, jeśli x jest liczbą niewymierną, oraz nieciągła, jeśli x jest liczbą wymierną.

Ciągłość jednostronna

O funkcji f określonej w prawostronnym otoczeniu punktu x_0 mówimy, że jest *prawostronnie ciągła* w punkcie x_0, jeśli $\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$. Analogicznie definiujemy *ciągłość lewostronną*.

7.24. Funkcja $[\lg x]$ zwana *cechą* logarytmu dziesiętnego i funkcja $\lg x - [\lg x]$ zwana *mantysą* logarytmu dziesiętnego są określone dla $x > 0$. Wykazać, że każda z tych funkcji jest prawostronnie ciągła w każdym z punktów $x_0 = 10^k, k \in \mathscr{Z}$, oraz ciągła (obustronnie) w pozostałych punktach swej dziedziny.

Asymptoty

Jeśli funkcja f jest ciągła w prawostronnym sąsiedztwie punktu c i $f(x) \to \infty$, gdy $x \to c+0$, to prosta $x = c$ jest *asymptotą pionową prawostronną* funkcji f. Jeśli funkcja f jest ciągła w sąsiedztwie punktu ∞ i $f(x)/x \to m$ oraz $f(x) - mx \to b$, gdy $x \to \infty$, to prosta $y = mx + b$ jest *asymptotą* funkcji f dla $x \to \infty$, przy czym jest to asymptota *pozioma*, gdy $m = 0$, i *ukośna*, gdy $m \neq 0$. Analogicznie definiujemy *asymptotę pionową lewostronną* i *asymptotę* dla $x \to -\infty$.

7.25. Wyznaczyć asymptoty funkcji

a) $\dfrac{1}{x^2-1}$ **b)** $\dfrac{x^2}{x^2-1}$ **c)** $\dfrac{x^3}{x^2-1}$ **d)** $\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$

e) $\sqrt[3]{x^3-x}$ **f)** $\sqrt[3]{x^3-x^2}$ **g)** $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ **h)** $e^{1/(x^2-1)}$

Przekształcanie wykresu

Jeśli jest dany wykres funkcji $y = g(x)$, to wykresy poniższych funkcji otrzymujemy z wykresu funkcji $y = g(x)$ w wyniku obok podanych przekształceń

$y = -g(x)$	symetria względem osi Ox
$y = g(-x)$	symetria względem osi Oy
$y = g(x)+a$	translacja o wektor $[0, a]$
$y = g(x-a)$	translacja o wektor $[a, 0]$
$y = ag(x)$	pomnożenie rzędnych przez a
$y = g(ax), a \neq 0$	podzielenie odciętych przez a
$y = 1/g(x)$	zastąpienie rzędnych ich odwrotnościami
$y = g(x)h(x)$	pomnożenie rzędnych $g(x)$ przez $h(x)$
$y = g(x)+h(x)$	dodanie rzędnych obu funkcji g i h

7.26. Narysować w jednym układzie wykresy następujących funkcji

a) $y = x^2 - 1, \ y = 1/(x^2-1)$

b) $y = (x-1)^2, \ y = 1/(x-1)^2$

c) $y = \dfrac{1}{(x+2)^3}, \ y = x, \ y = \dfrac{1}{(x+2)^3} + x$

d) $y = \ln x, \ y = 1/\ln x$

e) $y = \sin x, \ y = \sin 3x, \ y = 2 \sin 3x$

f) $y = \sin bx, \ y = ae^{kx}, \ y = ae^{kx} \sin bx; \ a = 2, \ b = 3, \ k = -\dfrac{1}{4}$

Pochodna

Jeśli funkcja f jest określona w otoczeniu punktu x i granica

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{5}$$

jest skończona, to tę granicę nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie x, a o funkcji f mówimy, że jest w punkcie x *różniczkowalna*.

Zamiast $f'(x)$ piszemy też $\dfrac{df}{dx}(x)$ lub $\dfrac{d}{dx}f(x)$.

7.27. Obliczyć na podstawie definicji (5) pochodną $f'(x)$ funkcji

a) $f(x) = x^2$ **b)** $f(x) = x^3$ **c)** $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **e)** $f(x) = \log_a x$ **f)** $f(x) = \ln x$

g) $f(x) = \sin x$ **h)** $f(x) = \cos x$

Pochodna jako współczynnik kierunkowy stycznej

7.28. Napisać równanie stycznej i równanie normalnej do wykresu funkcji

a) $y = x^3$ w punkcie o odciętej $x = 2$,
b) $y = e^x$ w punkcie o odciętej $x = 0$,
c) $y = \sin x$ w punkcie o odciętej $x = \pi/2$.

7.29. Na wykresie funkcji
a) $y = x^3$ **b)** $y = \ln x$ **c)** $y = \sin x$
znaleźć punkty, w których styczna jest równoległa do prostej $y = x$.

Pochodna jako prędkość

7.30. Punkt materialny M porusza się po osi Ox według równania

a) $x = \sin t$ **b)** $x = 10t - 5t^2$ **c)** $x = 1 - e^{-t}$

Obliczyć prędkość punktu M w chwili $t = 0$ oraz wyznaczyć chwilę t, w której prędkość punktu M jest równa 0.

Pochodne jednostronne

Jeśli funkcja f jest określona w prawostronnym otoczeniu punktu x i granica

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{6}$$

jest skończona, to tę granicę nazywamy *pochodną prawostronną* funkcji f w punkcie x. Analogicznie definiujemy *pochodną lewostronną*

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0-0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{7}$$

Różniczkowalność w przedziale

Różniczkowalność funkcji f w przedziale otwartym oznacza istnienie pochodnej $f'(x)$ w każdym punkcie x tego przedziału. Różniczkowalność funkcji f w przedziale $\langle a; b \rangle$ oznacza różniczkowalność tej funkcji w $(a; b)$ oraz istnienie $f'_+(a)$ i $f'_-(b)$.

Istnienie pochodnej a ciągłość funkcji

Z istnienia pochodnej $f'(x)$ wynika ciągłość funkcji f w punkcie x. Z istnienia pochodnej $f'_+(x)$, względnie $f'_-(x)$, wynika ciągłość prawostronna, względnie lewostronna, funkcji f w punkcie x.

Pochodne nieskończone

Jeśli granica (5) (ewentualnie (6) lub (7)) jest nieskończona, to mówimy, że w punkcie x istnieje *pochodna* $f'(x)$ (ewentualnie $f'_+(x)$ lub $f'_-(x)$) *nieskończona*. Z istnienia pochodnej nieskończonej nie wynika ciągłość funkcji.

7.31. Zbadać, czy funkcja f określona wzorem

a) $|x|$ **b)** $|x(x+1)|$ **c)** $|x^3|$ **d)** $[x]$ **e)** $\operatorname{sgn} x$ **f)** $\sqrt[3]{x}$

jest w punkcie $x = 0$ ciągła, ewentualnie ciągła jednostronnie i czy istnieją pochodne $f'(0), f'_+(0), f'_-(0)$ skończone lub nieskończone.

Pochodna funkcji odwrotnej

Jeśli funkcja $y = f(x)$ określona w przedziale D jest funkcją odwrotną do funkcji $x = \varphi(y)$ określonej w przedziale W i $\varphi'(y) \neq 0$ w każdym punkcie y przedziału W, to

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{dla} \quad x \in D \tag{8}$$

7.32. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej, wyprowadzić wzór na pochodną funkcji

a) $y = \sqrt{x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{x}$ **c)** $y = e^x$ **d)** $y = a^x$, $0 < a \neq 1$
e) $y = \arcsin x$ **f)** $y = \operatorname{arctg} x$ **g)** $y = \arccos x$ **h)** $y = \operatorname{arcctg} x$

Wzory podstawowe na pochodne

$(\text{const})' = 0$	$(\lvert x\rvert)' = \operatorname{sgn} x,\ x \neq 0$
$(x)' = 1$	$(1/x)' = -1/x^2$
$(x^r)' = rx^{r-1},\ r \neq 0$	$(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$
$(e^x)' = e^x$	$(a^x) = a^x \ln a$
$(\ln x)' = 1/x$	$(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(\arccos x)'$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = -(\operatorname{arcctg} x)'$$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$(\operatorname{th} x)' = 1/\operatorname{ch}^2 x$	$(\operatorname{cth} x)' = -1/\operatorname{sh}^2 x$
$(\operatorname{arsh} x)' = 1/\sqrt{x^2+1}$	$(\operatorname{arch} x)' = 1/\sqrt{x^2-1}$

$$\underset{|x|<1}{(\operatorname{arth} x)'} = \frac{1}{1-x^2} = \underset{|x|>1}{(\operatorname{arcth} x)'}$$

Rachunek pochodnych

Jeśli funkcje f, g, h są różniczkowalne w punkcie x oraz k jest stałą, to

$$[kf(x)]' = kf'(x)$$
$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$
$$[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$$
$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$[f(x)g(x)h(x)]' = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{dla} \quad g(x)\neq 0$$

Pochodna funkcji złożonej. Jeśli funkcja $y=f(u)$ jest różniczkowalna w przedziale U, funkcja $u=g(x)$ jest różniczkowalna w przedziale X oraz $g(X)\subset U$, to

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) \quad \text{dla} \quad x\in X \tag{9}$$

Jeśli funkcje $y=f(u)$, $u=g(v)$, $v=h(x)$ są różniczkowalne odpowiednio w przedziałach U, V, X oraz $h(X)\subset V$, $g(V)\subset U$, to

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) \quad \text{dla} \quad x\in X \tag{10}$$

7.33. Korzystając ze wzorów podstawowych na pochodne i rachunku pochodnych, obliczyć pochodną funkcji określonej poniższym wzorem (x — zmienna, a, b, c — stałe).

a) $ax+b$ **b)** ax^2+bx+c **c)** $\dfrac{1}{ax+b}$ **d)** $\dfrac{1}{x^2+a^2}$

e) $x\sqrt{x}$ **f)** x^4+c **g)** $2x^3-x^2+2$ **h)** $\dfrac{x}{x+1}$

i) $\dfrac{x-1}{x+1}$ **j)** $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ **k)** $\sqrt{2x+3}$ **l)** $\sqrt[3]{x-1}$

m) $(x+1)^4$ **n)** $\sqrt{x^2+x}$ **o)** $\operatorname{tg} x$ **p)** $\operatorname{ctg} x$

7.34. Obliczyć pochodną funkcji określonej wzorem

a) $2x^2-3x+5$ **b)** $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x$ **c)** $\dfrac{3x+5}{7}$ **d)** $x+\sqrt{x}$

e) $\sin 5x$ **f)** $\cos^2 x$ **g)** $\sqrt{6x+7}$ **h)** $(2x-1)^6$

i) $(x^2-3x+2)(2x-1)$ **j)** $(\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$ **k)** $\dfrac{1-x}{1+x}$

l) $\dfrac{x^2-x-1}{x^2-x+1}$ **m)** $(x^2+1)^5$ **n)** $\sqrt{1+x^2}$ **o)** $\cos\sqrt{x}$

p) $\sqrt{\cos x}$ **q)** $\dfrac{3x-2\sqrt{x}+1}{x}$ **r)** $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ **s)** $\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$

t) $\operatorname{tg}\sin x$ **u)** $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ **v)** $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ **w)** $\ln\sin x$

z) $\sin\ln x$

7.35. Obliczyć pochodną każdej z poniższych funkcji

a) $\ln(1+x^2)$, $\log_2(1+x^2)$, $\log_{1/2}(1+x^2)$, $\lg(1+x^2)$

b) e^{1+x^2}, 2^{1+x^2}, $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+x^2}$, 10^{1+x^2}

c) $\arcsin x$, $\arcsin(x^2)$, $\arcsin\sqrt{x}$, $\arccos x$

d) $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg}(x^2)$, $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $\operatorname{arcctg} x$

e) $\ln x+\ln\frac{1}{x}$, e^{x+3} e^{2-x}, $\arcsin x+\arccos x$, $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x$

7.36. Obliczyć pochodną funkcji określonej wzorem

a) $\sin x-\cos x$ **b)** $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$ **c)** $x\sin x$ **d)** $\dfrac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$

e) $e^x\sin x$ **f)** xe^x **g)** $\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$ **h)** 2^x

i) $x\ln x$ **j)** $\dfrac{x}{\ln x}$ **k)** $\ln\operatorname{tg} x$ **l)** $\dfrac{\ln x}{1+x^2}$

m) $\dfrac{2x}{1-\cos x}$ **n)** $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ **o)** $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ **p)** $e^{-x}\sin x$

q) $\dfrac{e^x}{1+x}$ **r)** xe^{-x} **s)** $e^{\sin x}$ **t)** $5^x+\dfrac{1}{5^x}$

u) $\sqrt{e^x}$ **v)** $\exp(x^2)$ **w)** $\exp(-1/x^2)$ **z)** $\exp(\ln|x|)$

Uwaga. Symbol $\exp w$ oznacza to samo, co symbol e^w.

7.37. Dane są cztery funkcje

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

Odpowiedzieć na następujące pytania odnoszące się do każdej z tych funkcji: 1) Czy funkcja jest ciągła w punkcie $x = 0$? 2) Czy istnieje pochodna tej funkcji w punkcie $x = 0$? 3) Czy pochodna tej funkcji jest ciągła w punkcie $x = 0$?

Pochodna logarytmiczna

Aby obliczyć pochodną funkcji $y(x) = p(x)^{w(x)}$, tworzymy logarytm tej funkcji $\ln y = w \ln p$ i ten logarytm różniczkujemy $y'/y = w' \ln p + wp'/p$. Stąd otrzymujemy $y' = y(w' \ln p + wp'/p)$. Iloraz y'/y nazywamy *pochodną logarytmiczną* funkcji y.

7.38. Obliczyć pochodną funkcji

a) $y = x^x$ **b)** $y = x^{\sin x}$ **c)** $y = (\sin x)^x$ **d)** $y = x^{\ln x}$

e) $y = x^{(e^x)}$ **f)** $y = (\ln x)^x$ **g)** $y = (\sin x)^{\cos x}$

h) $y = \dfrac{x^x + 1}{x^x - 1}$ **i)** $y = \sin(x^x)$

Funkcja potęgowa

Funkcja *potęgowa* $y = x^r$ (x — zmienna, r — stała) ma dziedzinę zależną od wykładnika r. Jeśli $r = n$, $n \in \mathcal{N}$, to funkcja $y = x^n$ jest określona dla wszystkich x. Jeśli $r = -n$, $n \in \mathcal{N}$, to funkcja $y = x^{-n} = 1/x^n$ jest określona dla $x \neq 0$. Jeśli r jest liczbą wymierną postaci m/n, to funkcja $y = x^{m/n}$ jest określona dla $x > 0$ i zachodzi równość $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$. Jeśli r jest liczbą niewymierną, to funkcja $y = x^r$ jest określona dla $x > 0$ i zachodzi równość $y = x^r = e^{r \ln x}$. We wszystkich przypadkach pochodna funkcji potęgowej jest dana wzorem $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Na przykład

$$\left(\frac{1}{x^2}\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2}\right)' = (x^{-2}x^{1/2}x^{2/3})' = (x^{-5/6})' = -\frac{5}{6}x^{-11/6} = -\frac{5}{6}\sqrt[6]{\frac{1}{x^{11}}}$$

7.39. Obliczyć pochodną funkcji

a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ **b)** $\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **d)** $\dfrac{4\sqrt{x} + 12\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$

e) $\dfrac{(1-x^2)^2}{x^4}$ **f)** $\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[4]{x^3}$ **g)** $\dfrac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **h)** $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x^2}}$

Funkcje hiperboliczne

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

7.40. Wykazać, że funkcja ch jest parzysta, a funkcje sh, th, cth są nieparzyste.

7.41. Udowodnić tożsamości

a) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ **b)** $\operatorname{th} x = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ **c)** $\operatorname{cth} x = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

d) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ **e)** $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

f) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ **g)** $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$

7.42. Wyprowadzić wzory na pochodne funkcji hiperbolicznych.

7.43. Obliczyć pochodną funkcji

a) $\operatorname{sh}^2 x$ **b)** $x - \operatorname{th} x$ **c)** $\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x$ **d)** $\ln \operatorname{ch} x$

e) $\operatorname{th} \ln x$ **f)** $\operatorname{ch} \operatorname{sh} x$ **g)** $\operatorname{arcctg} \operatorname{cth} x$ **h)** $\arccos \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$

Funkcje area

Funkcje *area* są to funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych. Są one określone związkami

$$y = \operatorname{arsh} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sh} y \qquad y = \operatorname{arth} x \Leftrightarrow x = \operatorname{th} y$$
$$y = \operatorname{arch} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ch} y,\ y \geqslant 0 \qquad y = \operatorname{arcth} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cth} y$$

7.44. Udowodnić tożsamości

a) $\operatorname{arsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

b) $\operatorname{arch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ dla $x \geqslant 1$

c) $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ dla $|x| < 1$

d) $\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ dla $|x| > 1$

7.45. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej, wyprowadzić wzory na pochodne funkcji area.

7.46. Obliczyć pochodną funkcji

a) $x \operatorname{arsh} x$ b) $\operatorname{arsh} x^2$ c) $x \operatorname{arth} x$ d) $\operatorname{arth}\frac{1}{x}$

e) $x^2 \operatorname{arch} x$ f) $\operatorname{arch} e^x$ g) $\operatorname{arcth}\frac{1}{x}$ h) $\operatorname{arth} e^x$

Wykresy, granice i pochodne

7.47. Ustawić w ciąg rosnący następujące liczby

a) $0, \ln x, \lg x, \log_2 x, \log_{1/2} x, \log_3 x$ dla $x > 1$

b) 1, sin 1, tg 1, arcsin 1, arctg 1

7.48. Narysować w jednym układzie wykresy następujących funkcji

a) $\ln x, x-1, x+1, e^x$

b) $x, x^2, x^4, \sqrt{x}, \sqrt[4]{x}$ dla $0 \leqslant x < 1{,}2$

c) $\operatorname{th} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arsh} x$, x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arth} x$ dla $x \geqslant 0$

d) $1/x$, $\operatorname{cth} x$

7.49. Obliczyć następujące wartości

a) $\arcsin\frac{1}{2}$, $\arccos(-\sqrt{3}/2)$, $\operatorname{arctg} 0$, $\operatorname{arcctg}(-1)$, $\operatorname{arctg}(-1)$

b) $\arcsin(-1)$, $\arccos 1$, $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$, $\operatorname{arcctg} 0$, $\operatorname{arctg} 1$

7.50. Obliczyć granice

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{x-4}{(x-2)^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \operatorname{arctg}\frac{x-4}{(x-2)^2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin\frac{1-x}{1+x}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$ f) $\lim\limits_{x\to 1+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x+\operatorname{arctg} x}{\sin x}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{\sin x}$ m) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\operatorname{arctg} x}{\sin x}$ n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}$

o) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}$ p) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{th} x$ q) $\lim\limits_{x\to -\infty}\operatorname{th} x$ r) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{cth} x$

s) $\lim\limits_{x\to -\infty}\operatorname{cth} x$ t) $\lim\limits_{x\to\infty}(\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)$ u) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)$

v) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln \operatorname{ch} x)$ w) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arsh} x}{\ln x}$ y) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arch} x}{\ln x}$

z) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arsh} x}{\operatorname{arch} x}$

7.51. Obliczyć pochodną każdej z poniższych funkcji

a) $\ln \operatorname{tg}^2 x$, $\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$, $\frac{\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}}$, $x \operatorname{sh}^2 x$

b) $\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$, x^{x+1}, $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $\arcsin\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

c) $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arsh} x$, $\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$, $\frac{1}{x}\sqrt{x^3\sqrt[3]{x^2}}$, $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$

d) $\sqrt{1+\ln^2 x}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $\frac{1}{x}\sqrt[4]{\frac{1}{x^3}\sqrt[3]{x}}$, $\frac{\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}$

e) $\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}$, x^{1-x}, $\ln(\sin^2 x+\sqrt{1+\sin^4 x})$, $\arccos\sqrt{1-x^2}$

f) $(1-x^2)\operatorname{arth} x$, $\ln\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$, $x\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$, $\operatorname{arctg} x+\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

g) $e^{\sqrt{\ln x}}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$, $x\sqrt[3]{x^2\sqrt{\frac{1}{x}}}$, $\ln\operatorname{th} x$

h) $\sqrt{x^3\sqrt[3]{x}}$, $(1-x)^x$, $\sqrt{x^2+1}-x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$

i) $x^2\operatorname{arsh} x$, $\ln\sqrt{\frac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}$, $x\sqrt{\frac{1}{x}}\sqrt[3]{x}$, $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$

j) $\ln\ln\operatorname{tg} x$, $\frac{1+x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\sqrt{x}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$, $x\operatorname{ch}^2 x$

k) $\sqrt[3]{x^4\sqrt{x}}$, $(x+1)^x$, $\ln\sqrt[4]{1+\sqrt{x}}$, $\arccos\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

l) $(1+x^2)\operatorname{arsh} x$, $\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$, $\frac{1}{x}\sqrt[3]{x^5}\sqrt{\frac{1}{x}}$, $\frac{\operatorname{arcctg} x}{\operatorname{arctg} x}$

Wykresy empiryczne (*Zarys*, s. 276)

7.52. Badając związek między wzrostem człowieka i długością jego stopy, zmierzono u 10 osób wzrost x i długość y stopy. Wyniki pomiarów są zawarte w tabeli

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	178	162	182	179	188	166	198	178	174	174
y	26	24	27	24	29	25	31	26	27	26

Wyznaczyć prostą empiryczną $y = a+bx$, stosując metodę średnich oraz

a) zaliczając dane nr 1–5 do grupy A, pozostałe do grupy B;

b) zaliczając dane nr 1, 3, 5, 7, 9 do grupy A, pozostałe do grupy B.

Obliczyć sumę modułów błędów dla sposobu a) i sposobu b).

7.53. Dla układu punktów

Nr	1	2	3	4	5
x	0	1	2	3	4
y	1	2	2,5	5	4,5

wyznaczyć prostą empiryczną, stosując metodę średnich i zaliczając punkty nr 1, 2, 3 do grupy A, pozostałe do grupy B. Obliczyć sumę kwadratów błędów.

7.54. Dla układu punktów

Nr	1	2	3	4	5	6
x	−2	−1	0	1	2	3
y	10	6	1	1	4	6

wyznaczyć metodą średnich parabolę empiryczną, zaliczając punkty nr 1 i 2 do grupy A, punkty nr 3 i 4 do grupy B, pozostałe do grupy C. Obliczyć sumę kwadratów błędów.

Metoda najmniejszych kwadratów (*Zarys*, s. 278)

7.55. Dla układu punktów z zad. 7.53 wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów prostą empiryczną. Obliczyć sumę kwadratów błędów.

7.56. Dla układu punktów

Nr	1	2	3	4
x	−1	0	1	2
y	3	1	1	0

wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów parabolę empiryczną.

Rozdział 8

Funkcje jednej zmiennej (przyrosty, różniczki, ekstrema)

Przyrost i różniczka

Przyrost Δx *argumentu* x i *różniczka* dx *argumentu* x oznaczają to samo, a mianowicie dowolną liczbę rzeczywistą. *Przyrost* Δf *funkcji* f jest określony wzorem

$$\Delta f = f(x+dx)-f(x)$$

Różniczka df *funkcji* f jest określona wzorem

$$df = f'(x)\,dx$$

8.1. Napisać różniczkę funkcji

a) x^3 **b)** $\frac{1}{x}$ **c)** xe^x **d)** $\ln(1+x^2)$ **e)** $\operatorname{arctg} x$

8.2. Obliczyć przyrost Δf i różniczkę df funkcji f oraz resztę $r = \Delta f - df$, mając dane

a) $f(x) = x^3+2x^2,\quad x = 1,\quad dx = 0{,}1$
b) $f(x) = x^3+2x^2,\quad x = 1,\quad dx = 0{,}01$
c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2},\quad x = 0,\quad dx = 0{,}05$
d) $f(x) = \frac{x-1}{x+1},\quad x = 1,\quad dx = -0{,}01$
e) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\quad x = 0,\quad dx = 0{,}01$

8.3. Za pomocą różniczki obliczyć w przybliżeniu

a) $\sqrt[3]{1{,}06}$ **b)** $\sin 31^\circ$ **c)** $\operatorname{arctg} 1{,}05$ **d)** $e^{0{,}05}$

8.4. Wahadło matematyczne o długości l ma okres $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, gdzie stała g ma wartość $9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Przyjmując $l = 0{,}2$ m, obliczyć za pomocą różniczki, o jaką wartość dl należy wydłużyć wahadło, aby jego okres wzrósł w przybliżeniu o $dT = 0{,}05$ s.

8.5. Aby obliczyć objętość V sześcianu o krawędzi x, zmierzono krawędź, otrzymując $x = 2$, przy czym błąd pomiaru oceniono na $dx = 0{,}005$, i przyjęto $V = x^3 = 8$. Obliczyć błąd dV i błąd względny dV/V objętości sześcianu.

Kres górny, kres dolny, wartość największa i wartość najmniejsza funkcji w zbiorze

Jeśli funkcja f jest określona w zbiorze A, to symbole

$$\sup_{x\in A} f(x) \quad \inf_{x\in A} f(x) \quad \max_{x\in A} f(x) \quad \min_{x\in A} f(x)$$

oznaczają: *kres górny* i *kres dolny* zbioru wartości $f(x)$ dla $x \in A$ oraz *największą* i *najmniejszą* z wartości $f(x)$ dla $x \in A$.

8.6. Wyznaczyć kres górny, kres dolny, wartość największą i wartość najmniejszą funkcji f w zbiorze A, mając dane

a) $f(x) = x^2, A = \langle -3; 3\rangle$ **b)** $f(x) = x^2, A = (-3; 3)$
c) $f(x) = \sin x, A = (-\infty, \infty)$ **d)** $f(x) = \operatorname{tg} x, A = (-\pi/2; \pi/2)$
e) $f(x) = e^x, A = (-\infty, \infty)$ **f)** $f(x) = e^{-x^2}, A = (-\infty; \infty)$
g) $f(x) = [\lg x], A = (0; \infty)$ **h)** $f(x) = \lg x - [\lg x], A = (0; \infty)$

Ekstremum funkcji

Niech f oznacza funkcję, a D dziedzinę tej funkcji. Załóżmy, że x_0 jest punktem wewnętrznym zbioru D, tzn. że istnieje otoczenie punktu x_0 zawierające się w D. Jeśli istnieje sąsiedztwo S punktu x_0 takie, że $\bigwedge_{x\in S} f(x) < f(x_0)$, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *maksimum właściwe*. Jeśli zaś takie sąsiedztwo nie istnieje, ale istnieje sąsiedztwo T punktu x_0 takie, że $\bigwedge_{x\in T} f(x) \leqslant f(x_0)$, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *maksimum niewłaściwe*.

Podobnie definiujemy *minimum właściwe* i *minimum niewłaściwe*. Termin *ekstremum* oznacza: *maksimum* lub *minimum*.

Twierdzenie Fermata

Jeśli funkcja f jest w punkcie x_0 różniczkowalna i ma w punkcie x_0 ekstremum właściwe lub niewłaściwe, to $f'(x_0) = 0$.

Umowa. W dalszych wypowiedziach *ekstremum* oznacza ekstremum właściwe.

8.7. Posługując się wykresem funkcji, wskazać punkty x, w których występuje ekstremum lub ekstremum niewłaściwe funkcji

a) x^2-4x+7 **b)** $|2x+5|$ **c)** $|x^2-7x+10|$ **d)** e^x
e) $e^{|x|}$ **f)** $\big|\ln|x|\big|$ **g)** $\big||x|-1\big|$ **h)** $\operatorname{sgn}\sin x$

i) $[\sin x]$ **j)** $f(x) = \begin{cases} |\cos(\pi/x)| & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

Twierdzenia o przyrostach skończonych

Jeśli funkcje f, g są ciągłe w przedziale $\langle a; b\rangle$, ich pochodne f', g' istnieją w przedziale $(a; b)$ i $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a; b)$, to w przedziale $(a; b)$ istnieją punkty c, c_1 takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad \text{twierdzenie Lagrange'a}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} \qquad \text{twierdzenie Cauchy'ego}$$

8.8. Zastosować twierdzenie Lagrange'a do funkcji $f(x) = x^2$ w przedziale $\langle a; b\rangle$ i wyznaczyć punkt c.

8.9. Zastosować twierdzenie Lagrange'a do funkcji $f(x) = x^3$ w poniższym przedziale i wyznaczyć punkt c.
a) $\langle 0; 3\rangle$ **b)** $\langle -4; -1\rangle$ **c)** $\langle -3; 3\rangle$ **d)** $\langle -1; 2\rangle$

8.10. Zastosować twierdzenie Cauchy'ego do funkcji $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ w przedziale $\langle 0; \pi/2\rangle$ i wyznaczyć punkt c_1.

8.11. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a, udowodnić nierówność

a) $\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$ dla $0 < a < b$

b) $ra^{r-1}(b-a) < b^r - a^r < rb^{r-1}(b-a)$ dla $0 < a < b$, $r > 1$

c) $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a < b-a$ dla $a < b$

Badanie monotoniczności funkcji za pomocą pochodnej

Jeśli funkcja f ma w przedziale E pochodną różną od 0, to funkcja f jest w przedziale E monotoniczna, przy czym: jeśli $f'(x) > 0$, to funkcja f jest rosnąca, a jeśli $f'(x) < 0$, to funkcja f jest malejąca.

8.12. Wyznaczyć przedziały, w których poniższa funkcja jest monotoniczna i podać rodzaje monotoniczności funkcji w tych przedziałach

a) $x^3-6x^2-15x+2$ **b)** $\dfrac{x}{1+x^2}$ **c)** $(x^2-1)e^x$

d) $\sqrt{x}\ln x$ **e)** $\ln^2 x - \ln(x^2)$ **f)** $\sqrt{8x^2-x^4}$

g) $x^4-\dfrac{4}{3}x^3+3$ **h)** $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **i)** $\dfrac{x^3}{x^2-x-2}$

j) $\dfrac{x^4}{8-x^3}$ **k)** $\ln^3 x - \ln(x^3)$ **l)** $\arcsin\dfrac{1}{x}$

m) $x^2(x^2-9)^3$ **n)** $\exp\dfrac{2x}{1-x^2}$ **o)** $\dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

p) $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ **r)** $\ln \operatorname{ch} x$ **s)** $e^{-x}\operatorname{th} x$ **t)** x^x

Wyznaczanie ekstremum za pomocą pierwszej pochodnej

Niech f będzie funkcją ciągłą w punkcie x_0 i różniczkowalną w przedziałach $(a; x_0)$ i $(x_0; b)$. Wówczas:
— jeśli $f'(x) < 0$ dla $a < x < x_0$ i $f'(x) > 0$ dla $x_0 < x < b$, to funkcja f ma minimum w punkcie x_0;
— jeśli $f'(x) > 0$ dla $a < x < x_0$ i $f'(x) < 0$ dla $x_0 < x < b$, to funkcja f ma maksimum w punkcie x_0.
Jeśli przy tym istnieje $f'(x_0)$, to $f'(x_0) = 0$. Dlatego poszukując ekstremum funkcji, wyznaczamy punkty, w których pochodna jest równa 0, gdyż w tych punktach może być ekstremum, ale należy także zbadać, czy istnieją punkty wewnętrzne dziedziny funkcji, w których funkcja nie ma pochodnej, gdyż i w tych punktach może być ekstremum, np. funkcje $|x|$, $\sqrt[3]{x^2}$ nie mają pochodnej w punkcie 0, ale mają w tym punkcie ekstremum.

8.13. Wyznaczyć ekstrema funkcji $y = f(x)$ określonej wzorem

a) x^3-3x b) $x+1-e^x$ c) $x^2e^{1/x}$ d) $\dfrac{1}{e^x-1}$

e) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-1}$ f) x^4-2x^2+2 g) $\dfrac{1}{1+x^4}$ h) $\dfrac{x}{1+x^4}$

i) $\sin x-\ln\sin x$ j) $e^{\cos x}-\cos x$ k) $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$

l) $x e^{1/x}$ m) $x^2e^{-x^2}$

Wyznaczanie wartości największej i wartości najmniejszej funkcji w przedziale

Przy wyznaczaniu tych wartości bierzemy pod uwagę ekstrema funkcji w danym przedziale, a także wartości funkcji w punktach końcowych przedziału, o ile te punkty należą do przedziału.

8.14. Wyznaczyć wartość największą i wartość najmniejszą poniższej funkcji w danym obok przedziale

a) $\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x, \langle 0;3\rangle$ b) $x^5-5x, \left\langle -2;\frac{3}{2}\right\rangle$ c) $\dfrac{x-1}{x+1}, \langle 0;4\rangle$

d) $\sqrt{3-2x}, \langle -1;1\rangle$ e) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-1}, \left\langle -\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right\rangle$

8.15. W półkole o danym promieniu wpisano trapez o maksymalnym polu. Obliczyć kąt między podstawą i ramieniem trapezu.

8.16. Który punkt paraboli $y = x^2$ leży najbliżej punktu $(0, 10)$?

8.17. W elipsę $16x^2+9y^2 = 144$ wpisano prostokąt o maksymalnym polu. Obliczyć to pole.

8.18. W stożek o promieniu r i wysokości h wpisano walec o maksymalnej objętości. Wyznaczyć stosunek objętości walca i stożka.

8.19. Walec o promieniu x i wysokości h i półkula o promieniu x, złączone podstawami, tworzą bryłę o objętości V. Dla jakiego x pole powierzchni tej bryły jest najmniejsze?

8.20. Źródło prądu o sile elektromotorycznej E i oporze wewnętrznym r zasila odbiornik o oporze R. Dla jakiej wartości R odbiornik pobiera największą moc?

8.21. Dolny brzeg ekranu zawieszonego na pionowej ścianie znajduje się o 9 m wyżej niż oko obserwatora. Ekran ma wysokość 7 m. Z jakiej odległości obserwator widzi ekran pod największym kątem i jaki to kąt?

Reguła de l'Hospitala

Niech C oznacza liczbę lub ∞ lub $-\infty$ i niech S oznacza jednostronne sąsiedztwo punktu C. Załóżmy, że funkcje f, g oraz ich pochodne f', g' są określone w S i że $g'(x) \neq 0$ dla $x \in S$. Jeśli dla $x \to C$, $x \in S$ obie funkcje f, g dążą do 0 albo obie dążą do ∞, czyli iloraz f/g jest symbolem nieoznaczonym $0/0$ lub ∞/∞, to

$$\lim_{\substack{x\to C\\ x\in S}}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to C\\ x\in S}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

o ile ta ostatnia granica istnieje.

Symbole nieoznaczone $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0 sprowadzamy do postaci $0/0$ lub ∞/∞, np. mając wyrażenie $y = p^w$, gdzie $p \to 1$, $w \to \infty$, tworzymy wyrażenie $z = \ln y = w\ln p = \dfrac{\ln p}{1/w}$, które jest symbolem $0/0$, wyznaczamy granicę wyrażenia z za pomocą reguły de l'Hospitala, a potem wyznaczamy granicę funkcji $y = e^z$.

8.22. Obliczyć granice

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sh} x}{x+e^x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0+0} xe^{1/x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0-0} x\operatorname{cth} x$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ k) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$ l) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{(x^2)}$

m) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

8.23. Obliczyć granice

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos x-\sin x+1}{\sin 2x-\cos x}$

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}, a\neq 0$ d) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 3x}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln\ln x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\operatorname{cth}x}{\ln x}$ g) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^2\ln x$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$ j) $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x$

k) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$ l) $\lim\limits_{x\to \infty}(\ln x)^{1/x}$ m) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}x}$

n) $\lim\limits_{x\to \infty}(\operatorname{th}x)^x$ o) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ p) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{1/x^2}$

8.24. Obliczyć granice

a) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\operatorname{cth}x}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln\operatorname{ch}x}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\operatorname{cth}x\ln x)$ f) $\lim\limits_{x\to \infty}(x\operatorname{arctg}x)$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}xe^x$ h) $\lim\limits_{x\to \infty}x(e^{1/x}-\operatorname{th}x)$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ j) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x}-\ln x)$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch}x}\right)^{1/x^2}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth}x}$ m) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ n) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$

o) $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$ p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$

r) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arsh}x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$ s) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}; a>0, b>0$

Pochodna rzędu n

Pochodna rzędu n funkcji f zmiennej x, zwana też *n-tą pochodną*, $n=0,1,\ldots$, jest oznaczana symbolami

$$f^{(n)} \text{ lub } \frac{d^n f}{dx^n} \text{ lub } \frac{d^n}{dx^n}f$$

i określona przez równości

$$f^{(0)}=f \quad f^{(n+1)}=(f^{(n)})'$$

Zamiast $f^{(2)}$ i $f^{(3)}$ piszemy zwykle f'' i f'''.

8.25. Obliczyć drugą pochodną funkcji f zmiennej x określonej wzorem

a) $x\ln x$ b) xe^x c) $\cos^2 bx$ d) $\sin^2 bx$ e) e^{-x^2}

f) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$ g) $\dfrac{x}{1-x^2}$ h) $e^{ax}\sin bx$ i) $e^{ax}\cos bx$

8.26. Napisać pochodne rzędu 4, 5, 6 i 7 funkcji f zmiennej x, określonej wzorem

a) x^5 b) $\sin bx$ c) e^{ax}

8.27. Znaleźć wzór na pochodną rzędu n funkcji f zmiennej x określonej wzorem

a) e^x b) $\ln x$ c) $\sin x$ d) $\operatorname{sh}x$ e) e^{-x} f) $\dfrac{1}{x}$

g) $\cos x$ h) $\operatorname{ch}x$ i) xe^x j) $x\ln x$ k) $\sin^2 x$

l) $\cos^2 x$ m) $e^x\sin x$ n) $e^x\cos x$

Wzór Leibniza na pochodną rzędu n iloczynu dwóch funkcji

$$(fg)^{(n)}=\binom{n}{0}f^{(n)}g+\binom{n}{1}f^{(n-1)}g'+\binom{n}{2}f^{(n-2)}g''+\ldots+\binom{n}{n}fg^{(n)}$$

8.28. Korzystając ze wzoru Leibniza, obliczyć

a) $\dfrac{d^{15}}{dx^{15}}(x^2e^x)$ b) $\dfrac{d^{10}}{dx^{10}}(x^3\operatorname{sh}x)$ c) $\dfrac{d^8}{dx^8}(e^x\operatorname{sh}x)$ d) $\dfrac{d^4}{dx^4}(e^x x^{-1})$

Wzór Taylora z drugą pochodną

Jeśli funkcja f ma w otoczeniu U punktu x_0 drugą pochodną, to dla każdego punktu x należącego do U istnieje punkt pośredni $\tilde{x} = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, taki że zachodzi następująca równość, zwana *wzorem Taylora*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\tilde{x})(x - x_0)^2$$

W przypadku $x_0 = 0$ wzór ten jest nazywany *wzorem Maclaurina* i ma postać

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(\theta x)x^2 \quad 0 < \theta < 1$$

8.29. Napisać wzór Taylora z drugą pochodną w otoczeniu punktu x_0 dla funkcji e^x.

8.30. Napisać wzór Maclaurina z drugą pochodną dla funkcji
a) e^x **b)** e^{-x} **c)** $\sin x$ **d)** $\cos x$ **e)** $\operatorname{sh} x$
f) $\operatorname{ch} x$ **g)** $\operatorname{arctg} x$ **h)** $\ln(1+x)$

Wypukłość funkcji

Mówimy, że funkcja f jest *silnie wypukła ku górze* w przedziale $(a; b)$, gdy dla każdych trzech liczb x_1, x, x_2 takich, że $a < x_1 < x < x_2 < b$, jest spełniony warunek

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

Jeśli f jest funkcją klasy C^2 w przedziale $(a; b)$ i spełnia warunek

$$f''(x) < 0 \quad \text{dla} \quad \text{każdego} \quad x \in (a; b) \tag{2}$$

to funkcja f jest silnie wypukła ku górze w przedziale $(a; b)$.

Analogiczne wypowiedzi dotyczące silnej wypukłości *ku dołowi* różnią się kierunkami nierówności (1) i (2).

8.31. Wyznaczyć przedziały wypukłości funkcji

a) $-x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ **b)** $x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 64x - 11$

c) $x^4 + e^x$ **d)** $\dfrac{(x+1)^3}{x^2 + 2x + 4}$ **e)** $\dfrac{\ln x}{x}$ **f)** $x \cos \ln x$

g) x^x **h)** $\arcsin \dfrac{1}{x}$ **i)** $\sqrt{8x^2 - x^4}$

Punkt przegięcia

Punkt x_0 nazywamy punktem *przegięcia* (argumentem *przegięcia*) funkcji f, gdy funkcja f jest ciągła w pewnym otoczeniu $(a; b)$ punktu x_0 i jest silnie wypukła w każdym z przedziałów $(a; x_0)$ i $(x_0; b)$, przy czym w jednym z tych przedziałów jest wypukła ku górze, a w drugim ku dołowi.

Wyznaczanie punktu przegięcia. Jeśli funkcja f jest w punkcie x_0 ciągła, a w sąsiedztwie punktu x_0 ma ciągłą drugą pochodną, dodatnią po jednej stronie x_0, a ujemną po drugiej stronie x_0, to x_0 jest punktem przegięcia funkcji f. Jeśli przy tym istnieje $f''(x_0)$ to $f''(x_0) = 0$. Dlatego poszukując punktów przegięcia, wyznaczamy punkty, w których druga pochodna jest równa 0, gdyż to mogą być punkty przegięcia, ale należy także zbadać czy istnieją punkty wewnętrzne dziedziny funkcji, w których druga pochodna nie istnieje, gdyż to też mogą być punkty przegięcia, np. funkcja $\sqrt[3]{x}$ nie ma drugiej pochodnej w punkcie $x = 0$, ale punkt ten jest punktem przegięcia.

8.32. Wyznaczyć punkty przegięcia funkcji
a) $x^3 - 2x^2 - 4x$ **b)** e^{-x^2} **c)** $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$
d) $|\ln x|$ **e)** $\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ **f)** $\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \geq 0 \\ -x^2 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$ **h)** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla} \quad x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$

8.33. Udowodnić, że dla $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ zachodzi nierówność

$$a \ln a + b \ln b > (a+b) \ln \frac{a+b}{2}$$

Wzór Taylora z n-tą pochodną

Jeśli funkcja f ma w otoczeniu U punktu x_0 n-tą pochodną, to dla każdego punktu x należącego do U istnieje punkt pośredni $\tilde{x} = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, taki że zachodzi następująca równość, zwana *wzorem Taylora*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_n$$

gdzie $R_n = \dfrac{f^{(n)}(\tilde{x})}{n!}(x - x_0)^n$

W przypadku $x_0 = 0$ wzór ten jest nazywany *wzorem Maclaurina* i ma postać

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

gdzie $R_n = \dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$, $0 < \theta < 1$

8.34. Napisać wzór Maclaurina z czwartą pochodną dla funkcji
a) e^x **b)** $\cos x$ **c)** $\sin x$

8.35. Napisać wzór Maclaurina z n-tą pochodną dla funkcji
a) e^x **b)** $\cos x$ **c)** $\sin x$

Wyznaczanie ekstremum funkcji za pomocą wyższych pochodnych

Założenie. Zakładamy, że funkcja f i te jej pochodne, które występują w danym twierdzeniu, są ciągłe w otoczeniu punktu x_0.

Jeśli w punkcie x_0	to w punkcie x_0
$f'=0, \quad f''\neq 0$	funkcja f ma ekstremum[1]
$f'=f''=0, \quad f'''\neq 0$	funkcja f nie ma ekstremum
$f'=f''=f'''=0, \quad f^{(4)}\neq 0$	funkcja f ma ekstremum[2]
$f'=f''=f'''=f^{(4)}=0, \quad f^{(5)}\neq 0$	funkcja f nie ma ekstremum

[1] minimum, gdy $f''>0$, maksimum, gdy $f''<0$
[2] minimum, gdy $f^{(4)}>0$, maksimum, gdy $f^{(4)}<0$

Jeśli w punkcie x_0	to dla funkcji f punkt x_0
$f''=0, \quad f'''\neq 0$	jest punktem przegięcia
$f''=f'''=0, \quad f^{(4)}\neq 0$	nie jest punktem przegięcia
$f''=f'''=f^{(4)}=0, \quad f^{(5)}\neq 0$	jest punktem przegięcia

8.36. Wyznaczyć ekstrema i punkty przegięcia funkcji f zmiennej x określonej wzorem
a) x^4-2x^2 **b)** $3x^5-5x^3$ **c)** $2x^6-3x^4$ **d)** $5x^7-7x^5$

Badanie funkcji

Badanie funkcji obejmuje następujące czynności:
1° Ustalenie dziedziny funkcji.
2° Obliczenie jednostronnych granic funkcji na końcach przedziałów określoności funkcji.
3° Wyznaczenie asymptot pionowych, poziomych i ukośnych.
4° Obliczenie pochodnej i wyznaczenie tych punktów dziedziny, w których pochodna nie istnieje.
5° Wyznaczenie punktów, w których pochodna jest równa 0.
6° Wyznaczenie przedziałów monotoniczności i ekstremów funkcji.

7° Obliczenie drugiej pochodnej i wyznaczenie tych punktów dziedziny, w których druga pochodna nie istnieje.
8° Wyznaczenie punktów, w których druga pochodna jest równa 0.
9° Wyznaczenie przedziałów wypukłości i punktów przegięcia funkcji.
10° Nakreślenie stycznych do wykresu funkcji w punktach przegięcia.

Uwaga. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a;b)$, ma w punkcie a skończoną granicę prawostronną, to prawostronna granica pochodnej w punkcie a (o ile istnieje) wyznacza graniczny kierunek stycznej do wykresu, gdy $x\to a+0$.

Analogiczne twierdzenie można sformułować dla punktu b.

8.37. Zbadać funkcję i sporządzić wykres

a) x^3-4x^2+4x+1 **b)** $\dfrac{x^4}{x^3+1}$ **c)** $x^2e^{1/x}$ **d)** $\sqrt[3]{x^3-6x^2}$

e) $\dfrac{1}{4}x^4-2x^2$ **f)** $\dfrac{2}{1+x^2}$ **g)** $x^2\ln x$ **h)** $\dfrac{x}{x+2}$

i) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$ **j)** $\dfrac{x^2-x-4}{2x+2}$ **k)** $xe^{1/x}$ **l)** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

m) $\dfrac{4x}{1+x^2}$ **n)** $\dfrac{1}{9}x^2(x^2-4)^3$ **o)** $x^3(x-2)^2$ **p)** $2(x^2-1)e^x$

q) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ **r)** $\ln^3x-3\ln x$ **s)** $\sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}$ **t)** $\dfrac{(x+1)^3}{2(x^2+x-2)}$

u) e^{-x^2} **v)** $\arcsin\dfrac{1}{x}$ **w)** $\sqrt{8x^2-x^4}$ **z)** $\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$

8.38. Udowodnić, że dla $x>0$ zachodzi nierówność
a) $2x\operatorname{arctg}x>\ln(1+x^2)$ **b)** $\ln(1+x)>\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1+x}$

8.39. Przedstawić za pomocą wykresów nierówność

$$\ln x\leqslant x-1\leqslant\frac{1}{2}(x^2-1)\quad\text{dla}\quad x>0$$

Szereg Taylora

Jeśli funkcja f ma w otoczeniu U punktu x_0 pochodne wszystkich rzędów i reszta R_n wzoru Taylora dąży do 0 dla każdego $x \in U$, gdy $n \to \infty$, to dla każdego $x \in U$ zachodzi równość

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

którą nazywamy rozwinięciem funkcji f w *szereg Taylora* o środku x_0. W przypadku $x_0 = 0$ równość ta nazywa się rozwinięciem funkcji f w *szereg Maclaurina* i ma postać

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

Szeregi Maclaurina podstawowych funkcji:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad x \in \mathcal{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad x \in \mathcal{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad x \in \mathcal{R}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad -1 < x \leqslant 1$$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \dots \qquad -1 < x < 1$$

8.40. Korzystając z powyższych szeregów, rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję

a) e^{-x} **b)** e^{x^2} **c)** e^{-x^2} **d)** xe^x **e)** $\operatorname{ch} x$ **f)** $\operatorname{sh} x$

g) $\ln(1-x)$ **h)** $\ln\frac{1+x}{1-x}$ **i)** $\ln(1+x^2)$ **j)** $\sqrt{1+x}$

k) $\sqrt{1-x}$ **l)** $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ **m)** $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ **n)** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ **o)** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

p) $\sqrt[3]{1+x}$

Rozdział 9

Funkcje dwóch zmiennych

Funkcja dwóch zmiennych

Funkcja rzeczywista dwóch zmiennych rzeczywistych, zwana krótko *funkcją dwóch zmiennych*, jest to funkcja, której argumenty są parami liczb rzeczywistych, a wartości — liczbami rzeczywistymi. Pary liczb rzeczywistych $P = (x, y)$, $Q = (a, b)$ uważamy za punkty przestrzeni $\mathcal{R}^2$ z metryką euklidesową $PQ = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ i interpretujemy geometrycznie za pomocą punktów płaszczyzny Oxy. Niech f oznacza funkcję dwóch zmiennych, D — dziedzinę tej funkcji i niech $P = (x, y) \in D$. Jeśli funkcja f ma w punkcie $P = (x, y)$ wartość z, to piszemy

$$z = f(P) \quad \text{lub} \quad z = f(x, y) \tag{1}$$

Często funkcję oznaczamy tą samą literą, co jej wartość i piszemy

$$z = z(P) \quad \text{lub} \quad z = z(x, y)$$

Jeśli funkcja jest elementarna i nie ma zastrzeżeń co do jej dziedziny, to dziedziną tej funkcji jest zbiór takich par liczb rzeczywistych, dla których działania, występujące w określeniu funkcji, są wykonalne w zakresie $\mathcal{R}$. *Wykres* funkcji (1) jest to zbiór trójek liczb (x, y, z) takich, że $(x, y) \in D$, $z = f(x, y)$. Jest to pewien podzbiór przestrzeni $\mathcal{R}^3$. W interpretacji geometrycznej w przestrzeni $Oxyz$ jest to pewna figura, na ogół powierzchnia. Narysowanie takiej powierzchni bywa trudne, dlatego często, zamiast wykresu, rysujemy na płaszczyźnie Oxy *linie ekwiskalarne* $f(x, y) = c$, odpowiadające pewnym wartościom stałej c.

Dziedzina funkcji. Linie ekwiskalarne

9.1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

a) $z = e^{x(x+y)}$ **b)** $z = \sqrt{xy}$ **c)** $z = \arccos\frac{x}{x+y}$

d) $z = \ln|xy|$ **e)** $z = \ln(1-x^2-y^2)$ **f)** $z = \ln(1-x^2)$

g) $z = e^{x/y}$ **h)** $z = e^{1/y}$ **i)** $z = \ln(x^2+y^2-1)$

9.2. Narysować linie ekwiskalarne funkcji

a) $z = x+y$ **b)** $z = \frac{y}{x}$ **c)** $z = xy$

odpowiadające wartościom $z = \text{const} = 0, 1, 2, -1, -2.$

Granica funkcji

Niech f będzie funkcją punktu $P = (x, y)$ i niech $Q = (a, b)$ będzie punktem skupienia dziedziny D funkcji f. *Granicę* funkcji f w punkcie Q oznaczamy symbolami

$$\lim_{P\to Q} f(P) \quad \text{lub} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \quad \text{lub} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$$

9.3. Napisać za pomocą kwantyfikatorów i nierówności definicję (według Cauchy'ego) granicy funkcji f w punkcie Q w przypadku

a) $\lim\limits_{P\to Q} f(P) = g$ **b)** $\lim\limits_{P\to Q} f(P) = \infty$ **c)** $\lim\limits_{P\to Q} f(P) = -\infty$

9.4. Wyznaczyć granicę poniższej funkcji w punkcie $(0,0)$

a) $z = \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ **b)** $z = \dfrac{4xy}{x^2+y^2}$ **c)** $\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$

d) $z = \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$ **e)** $z = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$ **f)** $z = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$

g) $z = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ **h)** $z = \dfrac{x+y}{x-y}$ **i)** $z = \dfrac{xy}{x+y}$

j) $z = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ **k)** $z = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **l)** $z = \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2y^2(x^2+y^2)^2}$

Pochodne cząstkowe

Pochodne cząstkowe funkcji $z = z(x, y)$ oznaczamy

$$z_x(x,y),\ z_y(x,y),\ z_{xx}(x,y),\ z_{xy}(x,y), \ldots$$

albo

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(x,y), \ldots$$

9.5. Napisać definicję pochodnych cząstkowych $z_x(x,y)$, $z_y(x,y)$, $z_{xx}(x,y)$, $z_{xy}(x,y)$, $z_{yx}(x,y)$ i $z_{yy}(x,y)$.

9.6. Obliczyć pochodne cząstkowe $z_x(x,y)$ i $z_y(x,y)$ funkcji $z(x,y)$ określonej poniższym wzorem

a) x^3y-xy^3 **b)** $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y}{x}$ **c)** $x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$

d) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ **e)** x^y **f)** $(1+xy)^y$

g) $xy\cos(x+y)$ **h)** $e^{-x/y}$ **i)** $\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

j) $x^4+y^4-4x^2y^2$ **k)** $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ **l)** $1-\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2$

m) $\ln(x+y^2)$ **n)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^y$ **o)** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

p) $x\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{y}$ **q)** $\exp\dfrac{x+y}{x-y}$ **r)** $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$

s) $xy\ln(x+y)$ **t)** $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$ **u)** $(x^2+y^2)\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

v) $xy\,e^{\sin(\pi xy)}$ **w)** $x\sin^2(x+y^2)$ **x)** $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

y) $(2x+y)^{2x+y}$ **z)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{y/x}$

Twierdzenie Schwarza

Jeśli funkcja $z(x,y)$ jest klasy C^2 w pewnym obszarze, to w tym obszarze zachodzi równość

$$z_{xy}(x,y) = z_{yx}(x,y) \tag{2}$$

Jeśli funkcja $z(x,y)$ jest funkcją klasy C^3 w pewnym obszarze, to w tym obszarze zachodzą równości

$$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx} \qquad z_{xyy} = z_{yxy} = z_{yyx} \tag{3}$$

9.7. Sprawdzić równości (2) i (3) na przykładzie funkcji

a) $z = x^4y^5$ **b)** $z = \ln(x^2+y^2)$ **c)** $z = e^{xy}$

9.8. Obliczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji

a) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$ **b)** $z = \sin^2(ax+by)$ **c)** $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

d) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$ **e)** $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$

9.9. Dana jest funkcja $z = x\ln(xy)$. Obliczyć $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

9.10. Obliczyć

a) $\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ **b)** $\dfrac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}(x^3\sin y + y^3 \sin x)$ **c)** $\dfrac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y}(x^3 e^{x+y})$

9.11. Wykazać, że funkcja $z = \ln(e^x + e^y)$ spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$$

9.12. Wykazać, że funkcja $z = \operatorname{arctg}(2x-y)$ spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

Przyrosty i różniczki

Niech $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ będą punktami przestrzeni $\mathscr{R}^2$. Różnice $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$ nazywamy *przyrostami* (albo *różniczkami*)— zmiennych x, y i oznaczamy symbolami Δx, Δy albo dx, dy albo literami h, k

$$x_1 - x_0 = \Delta x = dx = h \qquad y_1 - y_0 = \Delta y = dy = k \tag{4}$$

Odległość ϱ punktów P_0, P_1 wyraża się wzorem $\varrho = P_0P_1 = \sqrt{h^2+k^2}$.

Niech f będzie funkcją punktu $P = (x,y)$ określoną w otoczeniu U punktu P_0 i niech $P_1 \in U$. Różnicę $f(P_1) - f(P_0)$ nazywamy *przyrostem funkcji* f i oznaczamy symbolem Δf

$$\Delta f = f(P_1) - f(P_0) \tag{5}$$

Jeśli dla funkcji f i punktu P_0 istnieją liczby A, B takie, że dla każdego punktu P_1 należącego do U zachodzi warunek

$$f(P_1) - f(P_0) = Ah + Bk + \varrho\alpha \qquad \lim_{\varrho \to 0} \alpha = 0 \tag{6}$$

to mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna* w punkcie P_0, a wyrażenie $Ah + Bk$ nazywamy różniczką funkcji f w punkcie P_0 i oznaczamy symbolem $df(P_0)$. Z warunku (6) wynika, że $A = f_x(P_0)$, $B = f_y(P_0)$, zatem mamy równość

$$f(P_1) - f(P_0) = \underbrace{f_x(P_0)h + f_y(P_0)k}_{df(P_0)} + \varrho\alpha, \qquad \lim_{\varrho \to 0} \alpha = 0 \tag{7}$$

Jeśli funkcja f ma pochodne cząstkowe f_x, f_y ciągłe w U, to:

1° dla każdego punktu P_1 należącego do U istnieje na odcinku P_0P_1 punkt pośredni $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$, $0 < \theta < 1$, taki że

$$f(P_1) - f(P_0) = \underbrace{f_x(\tilde{P})h + f_y(\tilde{P})k}_{df(\tilde{P})} \quad \text{twierdzenie o przyrostach} \tag{8}$$

2° w każdym punkcie $P = (x,y)$ należącym do U funkcja f jest ciągła i różniczkowalna i ma różniczkę

$$df(x,y) = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy \tag{9}$$

przy czym liczby dx i dy uważamy za zmienne niezależne od x i y.

Przybliżona wartość funkcji

Opuszczając w równości (7) wyraz $\varrho\alpha$, otrzymujemy równość przybliżoną

$$f(P_1) \approx f(P_0) + df(P_0) \tag{10}$$

Oszacowanie przyrostu i wartości funkcji. Prawą stronę równości (8), tj. różniczkę $df(\tilde{P})$, uważamy za funkcję zmiennej θ i szukamy liczb a, b takich, żeby dla każdej wartości θ, $0 < \theta < 1$, zachodziła nierówność

$$a < df(\tilde{P}) < b \tag{11}$$

Zgodnie z (8) jest to oszacowanie przyrostu funkcji i stąd wynika oszacowanie wartości funkcji

$$f(P_0) + a < f(P_1) < f(P_0) + b \tag{12}$$

9.13. Napisać różniczkę $df(x,y)$ funkcji $f(x,y)$ określonej wzorem

a) $\dfrac{y}{x}$ **b)** $\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ **c)** $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

d) $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ **e)** $\operatorname{arctg}(xy)$ **f)** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

9.14. Obliczyć przyrost $\Delta f = f(P_1) - f(P_0)$ i różniczkę $df(P_0)$ funkcji $f(x, y) = y/x$, mając dane

a) $P_0 = (2,2), dx = dy = 1$
b) $P_0 = (2,2), dx = -1, dy = 1$
c) $P_0 = (1,3), dx = 1, dy = -1$

9.15. Obliczyć przyrost $\Delta f = f(P_1) - f(P_0)$ i różniczkę $df(P_0)$ funkcji $f(x, y) = 1/(1+x^2+y^2)$, mając dane
a) $P_0 = (0,0), dx = dy = 1$
b) $P_0 = (1,1), dx = dy = 1$
c) $P_0 = (2,2), dx = dy = -1$

9.16. Oszacować przyrost $\Delta f = f(P_1) - f(P_0)$ funkcji f, mając dane
a) $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $P_0 = (1,2)$, $P_1 = (1{,}02,\ 2{,}03)$
b) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $P_0 = (2,3)$, $P_1 = (1{,}96,\ 3{,}02)$
c) $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$, $P_0 = (1,2)$, $P_1 = (0{,}97,\ 1{,}98)$

9.17. Znaleźć przybliżoną wartość i oszacowanie liczby
a) $1{,}01^{1{,}01}$ b) $1{,}02^{1{,}05}$ c) $\sin 31°\cos 46°$
d) $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$

Różniczki wyższych rzędów

Jeśli funkcja f jest klasy C^2 w obszarze G i $P = (x, y) \in G$, to *różniczka rzędu 2* (czyli *druga różniczka*) funkcji f w punkcie $P = (x, y)$ wyraża się wzorem

$$d^2f(x, y) = f_{xx}(x, y)\,dx^2 + 2f_{xy}(x, y)\,dx\,dy + f_{yy}(x, y)\,dy^2 \tag{13}$$

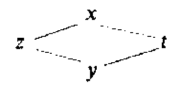
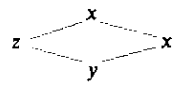
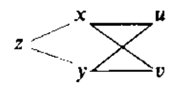
Jeśli funkcja jest klasy C^3, to *różniczka rzędu 3* (czyli *trzecia różniczka*) wyraża się wzorem

$$d^3f = f_{xxx}\,dx^3 + 3f_{xxy}\,dx^2dy + 3f_{xyy}\,dx\,dy^2 + f_{yyy}\,dy^3 \tag{14}$$

9.18. Napisać drugą różniczkę $d^2f(x, y)$ funkcji
a) $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ b) $f(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y$
c) $f(x, y) = e^{x+y}$

9.19. Napisać trzecią różniczkę d^3z funkcji
a) $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ b) $z = e^{2x+3y}$ c) $z = f(x)g(y)$

Pochodna funkcji złożonej

Funkcja złożona	Schemat złożenia	Wzór na pochodną
$z[x(t), y(t)]$		$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$
$z[x, y(x)]$		$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$
$z[x(u, v), y(u, v)]$		$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$ $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$

9.20. Obliczyć pochodną (zwykłą), względnie dwie pochodne cząstkowe, funkcji złożonej
a) $z = e^{x-2y}$, gdzie $x = \sin t$, $y = t^3$
b) $z = \ln(e^x + e^y)$, gdzie $y = x^3$
c) $z = x^2y - xy^2$, gdzie $x = u+v$, $y = u-v$
d) $z = x^2+y^2$, gdzie $x = \cos t$, $y = \sin t$
e) $z = x^y$, gdzie $y = \frac{1}{x}$
f) $z = \sin x \cos y$, gdzie $x = u - cv$, $y = u + cv$, $c = \text{const}$

9.21. Napisać wzory na pochodne $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ funkcji złożonej $z[u(x, y), v(x, y)]$.

9.22. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ funkcji złożonej
a) $z = f(u, v)$, gdzie $u = x^2 - y^2$, $v = xy$
b) $z = f(u, v)$, gdzie $u = xy$, $v = x/y$
c) $z = f(u)g(v)$, gdzie $u = x+y$, $v = x-y$

Zmiana zmiennych

9.23. Dana jest funkcja $z = z(x, y)$. Wprowadzamy zmienne u, v określone równościami

a) $u = x+2y,\ v = x-y$ **b)** $u = x^2-y^2,\ v = x-y$

Korzystając z wyników zadania 9.21, wyrazić pochodne

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ przez pochodne $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ i zmienne u, v.

Drugie pochodne funkcji złożonej (*Zarys*, s. 332)

Stosujemy uproszczone oznaczenia pochodnych. W odniesieniu do funkcji $z[x(t), y(t)]$ piszemy z_t zamiast $\dfrac{dz}{dt}$, z_x zamiast $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; x_t zamiast $\dfrac{dx}{dt}$, z_{tt} zamiast $\dfrac{d^2z}{dt^2}$, z_{xx} zamiast $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ itd. Analogiczne oznaczenia stosujemy do funkcji $z[x(u,v), y(u,v)]$ i $z[u(x,y), v(x,y)]$. Natomiast w odniesieniu do funkcji $z[x, y(x)]$ takich oznaczeń nie stosujemy.

9.24. Napisać wzór na pochodną z_{tt} funkcji $z[x(t), y(t)]$.

9.25. Napisać wzory na pochodne

a) z_{uu}, z_{uv}, z_{vv} funkcji $z[x(u,v), y(u,v)]$

b) z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} funkcji $z[u(x,y), v(x,y)]$

9.26. Przekształcić poniższe wyrażenie różniczkowe, wprowadzając zmienne u, v określone równościami podanymi obok tego wyrażenia

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $u = 3x+y,\ v = x+y$

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $u = 2x+y,\ v = y$

9.27. Współrzędne prostokątne x, y i współrzędne biegunowe r, φ są związane równościami

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{15}$$

Różniczkując te równości względem r i φ, otrzymujemy

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi \tag{16}$$

Udowodnić, że dla $r \neq 0$ są prawdziwe równości

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r} \tag{17}$$

9.28. Na płaszczyźnie Oxy jest dana funkcja $u = u(x,y)$ klasy C^1. Wprowadzamy współrzędne biegunowe. Udowodnić, że dla $r \neq 0$ pochodne $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ wyrażają się przez pochodne $\dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$ i przez zmienne r, φ wzorami

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\frac{\cos\varphi}{r} \tag{18}$$

9.29. Na płaszczyźnie Oxy jest dana funkcja $u = u(x,y)$ klasy C^2. *Laplasjanem* funkcji $u(x,y)$ nazywamy wyrażenie

$$\operatorname{lapl} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{19}$$

Udowodnić, że we współrzędnych biegunowych dla $r \neq 0$ laplasjan funkcji u wyraża się wzorem

$$\operatorname{lapl} u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \tag{20}$$

9.30. Funkcje $F(\xi)$ i $G(\eta)$ są klasy C^2 dla $\xi \in \mathscr{R}$, $\eta \in \mathscr{R}$. Udowodnić, że funkcja $u = u(x,t) = F(\xi) + G(\eta)$, gdzie $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$, $c = \text{const}$, spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{21}$$

Wzór Taylora

Jeśli f jest funkcją zmiennych x, y klasy C^2 w otoczeniu U punktu $P_0 = (x_0, y_0)$, to dla każdego punktu $P_1 = (x_0+h, y_0+k)$ należącego do U, istnieje na odcinku P_0P_1 punkt pośredni $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_0+\theta h, y_0+\theta k)$, $0 < \theta < 1$, taki, że zachodzi równość

$$f(P_1) = f(P_0) + \underbrace{f_x(P_0)h + f_y(P_0)k}_{df(P_0)} + \underbrace{\tfrac{1}{2}[f_{xx}(\tilde{P})h^2 + 2f_{xy}(\tilde{P})hk + f_{yy}(\tilde{P})k^2]}_{d^2f(\tilde{P})} \tag{22}$$

zwana *wzorem Taylora* dla funkcji f w punkcie P_0.

9.31. Napisać wzór Taylora dla funkcji f w punkcie P_0, mając dane

a) $f(x,y) = x^3+y^3$, $P_0 = (1,1)$
b) $f(x,y) = x^4+y^4$, $P_0 = (1,1)$
c) $f(x,y) = x^3+2y^3-xy$, $P_0 = (1,1)$
d) $f(x,y) = e^{x+y}$, $P_0 = (0,0)$
e) $f(x,y) = x\ln y$, $P_0 = (1,e)$
f) $f(x,y) = x\ln y$, $P_0 = (-1,1)$
g) $f(x,y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2$, $P_0 = (1,-1)$

Ekstremum funkcji dwóch zmiennych (*Zarys*, s. 335)

Zakładamy, że f jest funkcją zmiennych x, y klasy C^2 w obszarze G, $G \subset \mathscr{R}^2$ i że $P_0 \in G$. Oznaczamy

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} \tag{23}$$

Jeśli w punkcie P_0	to w punkcie P_0
funkcja f ma ekstremum właściwe lub niewłaściwe	$f_x = f_y = 0$
$f_x = f_y = 0$, $W > 0$	funkcja f ma ekstremum właściwe i jest to minimum, jeśli $f_{xx} > 0$, względnie maksimum, jeśli $f_{xx} < 0$
$f_x = f_y = 0$, $W < 0$	funkcja f nie ma ekstremum
$f_x = f_y = 0$, $W = 0$	do rozstrzygnięcia czy funkcja f ma ekstremum potrzebne są dodatkowe badania

Wyznaczenie ekstremum funkcji f w obszarze G sprowadza się do następujących czynności:

— obliczenie pochodnych $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ i przyrównanie ich do 0;

— wyznaczenie w G wszystkich punktów *stacjonarnych*, tj. punktów spełniających warunek $f_x = f_y = 0$; tylko w tych punktach obszaru G może występować ekstremum;

— obliczenie $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ i $W(x,y)$ i obliczenie wartości W w każdym punkcie stacjonarnym;

— wnioskowanie (wg tabeli) o występowaniu ekstremum w każdym punkcie stacjonarnym.

9.32. Wyznaczyć ekstremum funkcji $z = f(x,y)$ określonej wzorem
a) x^2+y^2 b) $1/(1+x^2+y^2)$ c) xy d) x^2+y^3
e) x^2+y^4

9.33. Wyznaczyć ekstrema funkcji $z = f(x,y)$ określonej wzorem
a) $y\sqrt{x}-y^2-x+6y$ b) $3x+6y-x^2-xy-y^2$
c) x^3+y^3-3xy d) $2x^3+xy^2+5x^2+y^2$
e) $\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ w obszarze $0 < x < \pi/2$, $0 < y < \pi/2$
f) $x^2-xy+y^2+9x-6y+20$
g) $x^2+y^2-2x-4\sqrt{xy}-2y+8$
h) $xy+50/x+20/y$ w obszarze $x > 0$, $y > 0$
i) $x^3+3xy^2-6xy+1$
j) $\sin x\sin y\sin(x+y)$ w obszarze $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$
k) $x^3+8y^3-6xy+1$
l) $2x^3-xy^2+5x^2+y^2+\frac{3}{2}x$
m) $x^2+xy+y^2-4\ln x-10y$

9.34. Przeprowadzając badania dodatkowe, wyznaczyć ekstrema funkcji $z = f(x,y)$ określonej wzorem
a) $x^2+2xy+y^2+y^4$ b) $x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$
c) $x^3y^2-x^2y+xy$ d) $(x^2+y^2-1)^2$

9.35. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ w domkniętym trójkącie T o wierzchołkach $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,6)$.

9.36. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2+\frac{3}{2}x$ w domkniętym kole K: $x^2+y^2 \leqslant 1$.

Pochodna kierunkowa. Gradient

Jeśli funkcja f punktu $P = (x,y)$ jest określona w otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$, a l jest półprostą o początku P_0, to granicę

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = \lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in l}} \frac{f(P)-f(P_0)}{PP_0} \tag{24}$$

nazywamy *pochodną kierunkową* funkcji f w punkcie P_0 w kierunku l.

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie P_0, to 1° pochodna kierunkowa (24) wyraża się wzorem

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = f_x(P_0)\cos\alpha + f_y(P_0)\sin\alpha \qquad (25)$$

gdzie $\alpha = (x, l)$ jest kątem kierunkowym półprostej l, 2° wektor

$$\operatorname{grad} f(P_0) = [f_x(P_0), f_y(P_0)] \qquad (26)$$

nazywamy *gradientem* funkcji f w punkcie P_0.

9.37. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji f w punkcie P_0 w kierunku l, mając dane

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $P_0 = (1, 1)$, $\alpha = 60°$
b) $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$, $P_0 = (0, 0)$, $\alpha = 45°$
c) $f(x, y) = 3x^4 + xy + y^3$, $P_0 = (1, 2)$, $\alpha = 135°$
d) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $P_0 = (1, 1)$, $\alpha = 120°$
e) $f(x, y) = x^2y^3$, $P_0 = (-2, 1)$, $\alpha = 45°$
f) $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$, $P_0 = (3, 1)$, l ma kierunek i zwrot wektora $[3, -4]$
g) $f(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2$, $ab \neq 0$, $P_0 = (a, b)$, l ma kierunek i zwrot wektora $[a, b]$.
h) $f(x, y) = \operatorname{arctg}(xy)$, $P_0 = (1, 1)$, kąt α jest dowolny, przy czym należy znaleźć kąt α dla którego pochodna kierunkowa ma wartość: 1) największą, 2) najmniejszą, 3) równą 0.

9.38. Wyznaczyć $\operatorname{grad} f(P_0)$, mając dane

a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y - 1$, $P_0 = (1, 2)$
b) $f(x, y) = 5x^2y - 3xy^3 + y^4$, $P_0 = (x, y)$
c) $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, $P_0 = (a, b)$

9.39. Obliczyć cosinus kąta między wektorami:

a) $\operatorname{grad}\sqrt{x^2 + y^2}$ i $\operatorname{grad}(x - 3y + \sqrt{3xy})$ w punkcie $P_0 = (3, 4)$,
b) $\operatorname{grad}\arcsin\dfrac{x}{x + y}$ w punkcie $(1, 1)$ i w punkcie $(3, 4)$.

9.40. W jakich punktach $\operatorname{grad}(x^2 + y^2)^{3/2}$ ma moduł równy 2?

9.41. Znaleźć punkt (x, y), w którym $\operatorname{grad}\ln(x + 1/y) = [1, -16/9]$

9.42. Udowodnić równość

$$\operatorname{grad} f(u(x, y), v(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v \qquad (27)$$

Rozdział **10**

Funkcje wielu zmiennych

Funkcja trzech zmiennych

Funkcja rzeczywista trzech zmiennych rzeczywistych, zwana krótko *funkcją trzech zmiennych*, jest to funkcja, której argumenty są trójkami (uporządkowanymi) liczb rzeczywistych, a wartości — liczbami rzeczywistymi. Trójki liczb rzeczywistych $P = (x, y, z)$, $Q = (a, b, c)$ uważamy za punkty przestrzeni $\mathscr{R}^3$ z metryką euklidesową $PQ = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ i interpretujemy geometrycznie za pomocą punktów przestrzeni $Oxyz$.

Niech f oznacza funkcję trzech zmiennych, D — dziedzinę tej funkcji i niech $P = (x, y, z) \in D$. Jeśli wartość funkcji w punkcie P oznaczymy u, to piszemy

$$u = f(P) \quad \text{lub} \quad u = f(x, y, z) \qquad (1)$$

Często funkcję oznaczamy tą samą literą, co jej wartość i piszemy

$$u = u(P) \quad \text{lub} \quad u = u(x, y, z)$$

Jeśli f jest funkcją elementarną i nie ma zastrzeżeń co do jej dziedziny, to *dziedziną* funkcji f jest zbiór tych trójek liczb rzeczywistych, dla których działania występujące w określeniu funkcji są wykonalne w zakresie $\mathscr{R}$. *Wykres* funkcji (1) w sensie teoretycznym jest zbiorem czwórek uporządkowanych (x, y, z, u) takich, że $(x, y, z) \in D$, $u = f(x, y, z)$. Jest to podzbiór przestrzeni $\mathscr{R}^4$, którego interpretacja geometryczna, czyli wykres w sensie praktycznym, nie istnieje. Natomiast możliwa jest interpretacja geometryczna dziedziny D i *powierzchni ekwiskalarnych* $f(x, y, z) = c$ (dla funkcji n zmiennych, $n \geqslant 4$, także i to jest niemożliwe).

Dziedzina funkcji. Powierzchnie ekwiskalarne

10.1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

a) $u = 1-(x^2+y^2+z^2)$ **b)** $u = \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}$

c) $u = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ **d)** $u = \sqrt{1-x^2}$

e) $u = \sin(x+y+z)$ **f)** $u = \arcsin(x+y+z)$

g) $u = e^{x+y+z}$ **h)** $u = \ln(xyz)$

i) $u = \ln x + \ln y + \ln z$

10.2. Rozpoznać powierzchnie ekwiskalarne funkcji

a) $u = x+y+z$ **b)** $u = x+y$ **c)** $u = x$

d) $u = x^2+y^2+z^2$ **e)** $u = x^2+y^2$ **f)** $u = x^2$

Formy kwadratowe

Forma kwadratowa trzech zmiennych jest to funkcja postaci

$$\Phi(P) = \Phi(x, y, z) = Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fxy$$

przy założeniu, że $|A|+|B|+|C|+|D|+|E|+|F| > 0$. Zwykle formę kwadratową zapisujemy w postaci

$$\Phi(P) = a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz \tag{2}$$

Przy badaniu formy (2) posługujemy się *macierzą formy* (2)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{3}$$

i *równaniem charakterystycznym formy* (2)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-s \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Równanie to ma wyłącznie rzeczywiste pierwiastki. Jeśli (s_1, s_2, s_3) jest *pełnym ciągiem* tych pierwiastków (tj. ciągiem, w którym każdy pierwiastek występuje tyle razy, ile wynosi jego krotność), to w przestrzeni $Oxyz$ istnieje układ prostokątny $OXYZ$, w którym forma (2) przybiera postać

$$\Phi(P) = s_1X^2+s_2Y^2+s_3Z^2 \tag{5}$$

Formy kwadratowe klasyfikujemy zależnie od znaku ich wartości w punktach P różnych od punktu $O = (0,0,0)$. Mówimy, że forma (2) jest:

— *określona dodatnio*, gdy $\bigwedge\limits_{P \neq O} \Phi(P) > 0$,

— *określona ujemnie*, gdy $\bigwedge\limits_{P \neq O} \Phi(P) < 0$,

— *półokreślona dodatnio*, gdy $\bigwedge\limits_{P \neq O} \Phi(P) \geqslant 0$ i $\bigvee\limits_{P \neq O} \Phi(P) = 0$,

— *półokreślona ujemnie*, gdy $\bigwedge\limits_{P \neq O} \Phi(P) \leqslant 0$ i $\bigvee\limits_{P \neq O} \Phi(P) = 0$,

— *nieokreślona (znakozmienna)*, gdy $\bigvee\limits_{P} \Phi(P) > 0$ i $\bigvee\limits_{P} \Phi(P) < 0$.

Aby sklasyfikować formę (2) możemy korzystać:

— z powyższych definicji i prostych przekształceń,

— ze znaków liczb s_1, s_2, s_3; liczby te są ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki równania (4) są stałego znaku; liczby te są dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg współczynników równania (4) jest naprzemienny;

— z twierdzenia *Sylvestra*, które orzeka, że forma (2) jest określona dodatnio wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wyznaczniki

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{6}$$

są dodatnie oraz że forma (2) jest określona ujemnie wtedy i tylko wtedy, gdy te z wyznaczników (6), które są stopnia nieparzystego, są ujemne, a te, które są stopnia parzystego, są dodatnie.

10.3. Sklasyfikować formę kwadratową $\Phi(P)$ określoną wzorem

a) $x^2+y^2+z^2$

b) $2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz$

c) $2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz-2yz$

d) $2x^2+y^2+z^2+2xy+2xz$

e) $x^2+5y^2+z^2+6xy$ **f)** x^2+y^2 **g)** x^2

h) $-x^2-y^2-z^2$ **i)** $-x^2-y^2$ **j)** $-x^2$

k) $x^2+y^2-z^2$ **l)** $x^2-y^2-z^2$ **m)** x^2-y^2

n) $xy+z^2$ **o)** $-9x^2-2y^2-5z^2+6xz+4yz$

Granica, ciągłość i ograniczoność funkcji trzech zmiennych

Zakładamy, że funkcja f punktu $P = (x, y, z)$ ma dziedzinę D, że punkt Q jest punktem skupienia dziedziny D oraz że $P_0 \in D$, $G \subset D$.

10.4. Napisać (za pomocą kwantyfikatorów i nierówności) warunek wyrażający, że

a) $\lim\limits_{P \to Q} f(P) = g$ **b)** $\lim\limits_{P \to Q} f(P) = \infty$ **c)** $\lim\limits_{P \to Q} f(P) = -\infty$

d) funkcja f jest ciągła w punkcie P_0,

e) funkcja f jest ograniczona w zbiorze G.

10.5. Funkcja $f(P) = f(x, y, z)$ jest określona wzorem

a) $\dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+z^2}$ **b)** $\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

e) $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2}$ **f)** $\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Wyznaczyć dziedzinę D funkcji f. Zbadać, czy funkcja f jest ciągła i ograniczona w D. Wyznaczyć granicę funkcji f w tych punktach Q, które są punktami skupienia dziedziny D, ale do niej nie należą.

Pochodne cząstkowe i różniczki funkcji trzech zmiennych

10.6. Napisać definicje pochodnych cząstkowych rzędu 1 i 2 funkcji $f(x, y, z)$.

10.7. Obliczyć pochodne rzędu 1 funkcji $u(x, y, z)$ danej wzorem

a) $u = xy \cos 2z$ **b)** $u = xy(\cos 2z + 2\sin^2 z)$
c) $u = x^3 yz$ **d)** $u = x^3 + y^2 z^2 + 3yz + 2x + 3y$
e) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **f)** $u = \ln|ax+by+cz|$, $|a|+|b|+|c| > 0$
g) $u = e^{xy-z}$ **h)** $u = xy^z$
i) $u = (xy)^z$ **j)** $u = (x/y)^z$

10.8. Napisać różniczkę $du(x, y, z)$ funkcji $u(x, y, z)$.

10.9. Napisać różniczkę funkcji

a) $u = \ln|ax+by+cz|$, $|a|+|b|+|c| > 0$
b) $u = (x/y)^z$ **c)** $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
d) $u = x^{yz}$ **e)** $u = x^{y/z}$ **f)** $u = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

10.10. Obliczyć pochodną $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ funkcji

a) $u = e^{x+y+z}$ **b)** $u = xyz\, e^{x+y+z}$ **c)** $u = e^{xyz}$

10.11. Napisać drugą różniczkę d^2u funkcji $u(x, y, z)$.

10.12. Napisać drugą różniczkę funkcji

a) $u = e^{x+y+z}$ **b)** $u = e^{ax+by+cz}$ **c)** $u = \ln(x^x y^y z^z)$ **d)** $u = xyz$

Pochodne funkcji złożonej

Pochodna funkcji $u[x(t), y(t), z(t)]$ wyraża się wzorem

$$u_t = u_x x_t + u_y y_t + u_z z_t \tag{7}$$

Pochodne *cząstkowe* funkcji $u[x(X, Y, Z), y(X, Y, Z), z(X, Y, Z)]$ wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} u_X &= u_x x_X + u_y y_X + u_z z_X \\ u_Y &= u_x x_Y + u_y y_Y + u_z z_Y \\ u_Z &= u_x x_Z + u_y y_Z + u_z z_Z \end{aligned} \tag{8}$$

10.13. Napisać wzór na pochodną u_{tt} funkcji $u[x(t), y(t), z(t)]$.

10.14. Obliczyć pochodne u_t i u_{tt} funkcji złożonej

a) $u = x^2 - yz$, gdzie $x = t^3$, $y = t^2$, $z = t$
b) $u = x^2 + y^2 - z^2$, gdzie $x = 5t$, $y = 1-t$, $z = 2+3t$
c) $u = f(x, y, z)$, gdzie $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = ct$, $c = \text{const}$
d) $u = f(x, y, z)$, gdzie $x = at$, $y = bt$, $z = ct$, a, b, c — stałe

10.15. Napisać wzory na drugie pochodne cząstkowe funkcji złożonej $u[x(X, Y, Z), y(X, Y, Z), z(X, Y, Z)]$

10.16. Napisać wzory na pierwsze i drugie pochodne cząstkowe funkcji złożonej $u[X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)]$.

10.17. W przestrzeni $Oxyz$ jest dana funkcja $u(P) = u(x, y, z)$. Stosując obrót układu współrzędnych, wprowadzono nowe współrzędne X, Y, Z. Między X, Y, Z i x, y, z zachodzą związki (35) (s. 65). Wyrazić pierwsze i drugie pochodne cząstkowe funkcji $u(P)$ względem x, y, z, przez pochodne tej funkcji względem X, Y, Z.

Wzór Taylora

Jeśli f jest funkcją zmiennych x, y, z klasy C^2 w otoczeniu U punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, to dla każdego punktu $P_1 = (x_0+h, y_0+k, z_0+l)$ należącego do U istnieje na odcinku P_0P_1 punkt $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x_0+\theta h, y_0+\theta k, z_0+\theta l)$, $0 < \theta < 1$, taki, że zachodzi równość

$$f(P_1) = f(P_0) + df(P_0) + \frac{1}{2} d^2 f(\tilde{P}) \tag{9}$$

przy czym

$$df(P_0) = f_x(P_0)h + f_y(P_0)k + f_z(P_0)l$$

$$d^2 f(\tilde{P}) = f_{xx}(\tilde{P})h^2 + f_{yy}(\tilde{P})k^2 + f_{zz}(\tilde{P})l^2 + 2f_{xy}(\tilde{P})hk + 2f_{xz}(\tilde{P})hl + 2f_{yz}(\tilde{P})kl$$

Równość ta jest nazywana *wzorem Taylora* dla funkcji f w punkcie P_0.

10.18. Napisać wzór Taylora dla funkcji f w punkcie P_0, mając dane

a) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$, $P_0 = (0,0,0)$
b) $f(x,y,z) = \ln(x^x y^y z^z)$, $P_0 = (1,1,1)$
c) $f(x,y,z) = xyz$, $P_0 = (x,y,z)$

Ekstremum funkcji trzech zmiennych (*Zarys*, s. 348)

Zakładamy, że f jest funkcją zmiennych, x, y, z klasy C^2 w obszarze G, $G \subset \mathcal{R}^3$, i że $P_0 \in G$.

Jeśli w punkcie P_0	to w punkcie P_0
funkcja f ma ekstremum właściwe lub niewłaściwe	$f_x = f_y = f_z = 0$
$f_x = f_y = f_z = 0$ $d^2 f$ jest formą określoną	funkcja f ma ekstremum właściwe i jest to minimum, gdy $d^2 f$ jest formą dodatnią, a maksimum, gdy $d^2 f$ jest formą ujemną
$f_x = f_y = f_z = 0$ $d^2 f$ jest formą nieokreśloną	funkcja f nie ma ekstremum
$f_x = f_y = f_z = 0$ $d^2 f$ jest formą półokreśloną	do rozstrzygnięcia czy funkcja f ma ekstremum, potrzebne są dodatkowe badania

10.19. Wyznaczyć ekstremum funkcji

a) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$

b) $f(x,y,z) = x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$ w obszarze $x>0, y>0, z>0$

c) $f(x,y,z) = x^3+y^2+z^2+12xy+2z$

d) $f(x,y,z) = x+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{2}{z}$ w obszarze $x>0, y>0, z>0$

e) $f(x,y,z) = xyz(4-x-y-z)$

f) $f(x,y,z) = xyz(5-x^2-y^2-z^2)$

g) $f(x,y,z) = xy^2z^3(7-x-2y-3z)$

h) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+z^2$ w obszarze $x>0, y>0, z>0$

Pochodna kierunkowa. Gradient

Jeśli funkcja f jest określona w otoczeniu punktu P_0, a l jest półprostą o początku P_0, to granicę

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = \lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in l}} \frac{f(P)-f(P_0)}{PP_0} \tag{10}$$

nazywamy *pochodną kierunkową* funkcji f w punkcie P_0 w kierunku l.

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie P_0, to:

1° zachodzi równość

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = f_x(P_0)\cos\alpha + f_y(P_0)\cos\beta + f_z(P_0)\cos\gamma \tag{11}$$

gdzie $\alpha = \{x, l\}, \beta = \{y, l\}, \gamma = \{z, l\}$ są kątami kierunkowymi półprostej l,

2° wektor

$$\operatorname{grad} f(P_0) = [f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)] \tag{12}$$

nazywamy *gradientem* funkcji f w punkcie P_0.

10.20. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $u = f(x,y,z)$ w punkcie P_0 w kierunku l, mając dane

a) $u = xyz$, $P_0 = (1,1,1)$, $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 135°$
b) $u = xy^2 - xyz + z^3$, $P_0 = (1,1,2)$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$
c) $u = xy+xz+yz$, $P_0 = (-1,2,3)$, $P_1 = (2,3,6) \in l$
d) $u = xyz(x+y+z)$, $P_0 = (1,1,1)$, l ma kierunek i zwrot wektora $[-1,1,-1]$
e) $u = x^2+y^2+z^2$, $P_0 = (1,-1,1)$, $\alpha = 45°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 60°$
f) $u = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, $abc \neq 0$, $P_0 = (a,b,c)$, l ma kierunek i zwrot wektora $[a,b,c]$

10.21. Obliczyć cosinus kąta φ między wektorami $\operatorname{grad} f(P_1)$, $\operatorname{grad} f(P_2)$, mając dane

a) $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$, $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$
b) $f(x,y,z) = xy - z$, $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (1,1,1)$
c) $f(x,y,z) = xy+yz+xz$, $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,0,1)$

10.22. Wyznaczyć $\operatorname{grad} f(x,y,z)$, jeśli funkcja f jest określona wzorem

a) x^3y^2z b) $Ax+By+Cz+D$ c) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
d) $1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e) $z/\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}$ f) $\ln\sqrt{x^2+y^2}$

10.23. Udowodnić, że w każdym punkcie obszaru, w którym funkcje $u(P)$, $v(P)$ są klasy C^1, zachodzą równości

$$\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$$
$$\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$$

10.24. Udowodnić, że funkcja $u(P)$ jest klasy C^1 w obszarze D, a funkcja $f(u)$ jest klasy C^1 w przedziale E i $u(P) \in E$, gdy $P \in D$, to w obszarze D zachodzi równość

$$\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$$

10.25. Udowodnić, że jeśli $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ i funkcja $f(R)$ jest klasy C^1 dla $R > 0$, to dla $R > 0$ zachodzą równości

$$\operatorname{grad} R = [x, y, z]/R$$
$$\operatorname{grad} f(R) = f'(R) \operatorname{grad} R$$

10.26. Wykazać, że funkcja $u = \ln R$, $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, spełnia równość $u = -\ln|\operatorname{grad} u|$.

10.27. Niech $u = u(P, t) = u(x, y, z, t)$ oznacza temperaturę w punkcie $P = (x, y, z)$ w chwili t. Oznaczając $R^2 = x^2+y^2+z^2$ i przyjmując, że dla $t > 0$ funkcja u jest określona wzorem
a) $u = t^{-3/2}e^{-R^2/t}$ **b)** $u = (\cos x + \cos y + \cos z)e^{-t}$
wyznaczyć gradient temperatury u w punkcie P w chwili t oraz prędkość zmiany temperatury u w punkcie P w chwili t.

Funkcje *n* zmiennych

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną, $n > 3$. Ciąg n liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy *punktem* n-wymiarowej przestrzeni rzeczywistej $\mathscr{R}^n$ i oznaczamy

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \tag{13}$$

Dla rozróżnienia takich punktów stosujemy *wskaźniki górne*, np.

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \quad x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) \tag{14}$$

Odległość punktów (14) określamy wzorem

$$\varrho(x^{(0)}, x^{(1)}) = \sqrt{(x_1^{(0)}-x_1^{(1)})^2 + \ldots + (x_n^{(0)}-x_n^{(1)})^2} \tag{15}$$

Punkt $O = (0, \ldots 0)$ nazywamy *początkiem* układu. *Odległość* punktu (13) od początku układu oznaczamy literą r

$$r = \varrho(x, 0) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \tag{16}$$

Funkcja (rzeczywista) n zmiennych (rzeczywistych) jest to funkcja, której argumenty są punktami przestrzeni $\mathscr{R}^n$, a wartości — liczbami rzeczywistymi. Jeśli f oznacza funkcję, a u — jej wartość w punkcie (13), to piszemy

$$u = f(x) \quad \text{lub} \quad u = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{17}$$

Często funkcję oznaczamy tak samo jak jej wartość i piszemy

$$u = u(x) \quad \text{lub} \quad u = u(x_1, \ldots, x_n) \tag{18}$$

Pochodne cząstkowe funkcji (18) rzędu 1 oraz rzędu 2 oznaczamy

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} \quad \text{lub} \quad u_{x_k} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} \quad \text{lub} \quad u_{x_k x_l} \tag{19}$$

dla $k = 1, \ldots, n$ oraz $l = 1, \ldots, n$. Wektor przestrzeni $\mathscr{R}^n$

$$\operatorname{grad} u = [u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}] \tag{20}$$

nazywamy *gradientem* funkcji (18).

10.28. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu 1 i rzędu 2 funkcji n zmiennych, która, zgodnie z oznaczeniem (16), wyraża się wzorem

a) $u = r^2$ **b)** $u = e^{(r^2)}$ **c)** $u = r$ **d)** $u = e^r$ **e)** $u = \dfrac{1}{r}$ **f)** $u = \ln r$

10.29. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu 1 i rzędu 2 funkcji

a) $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \cos x_i$ **b)** $u = \sin \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ (a_i — stałe)

c) $u = \exp \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ (a_i — stałe)

10.30. Obliczyć gradient funkcji

a) $u = r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ **b)** $u = r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

10.31. Wyznaczyć ekstrema funkcji u zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4 (a, b, c, d — stałe) określonej wzorem

a) $u = \dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_3x_4)-(ax_1+bx_2+cx_3+dx_4)$

b) $u = \dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+x_3x_4-(ax_1+bx_2+cx_3+dx_4)$

c) $u = \dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+x_3x_4-(ax_1+bx_2+cx_3+dx_4)$

10.32. Funkcja f określona w $\mathscr{R}^n$ wzorem

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) \left(n+1 - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

ma w punkcie $x_1 = \ldots = x_n = 1$ maksimum właściwe równe 1; innego ekstremum nie ma. Sprawdzić powyższą tezę w przypadkach $n = 1, 2, 3, 4$.

Rozdział 11

Funkcje uwikłane. Ekstremum warunkowe

Założenia. Zakładamy, że funkcje F i G występujące w tym rozdziale są klasy C^2 w pewnym obszarze D, a punkty P i P_0 należą do obszaru D.

Funkcja uwikłana jednej zmiennej

Twierdzenie 1. Rozważmy równanie o dwóch zmiennych

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

Jeśli w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ zachodzą związki

$$F(P_0) = 0, \qquad F_y(P_0) \neq 0 \tag{2}$$

to w pewnym otoczeniu H liczby x_0 istnieje dokładnie jedna funkcja

$$y = f(x) \tag{3}$$

klasy C^2, spełniająca dla $x \in H$ równość

$$F(x, f(x)) = 0 \tag{4}$$

oraz warunek $y_0 = f(x_0)$. Funkcja (3) jest nazywana *rozwiązaniem równania* (1) *względem* y *w otoczeniu punktu* P_0 albo *funkcją uwikłaną zmiennej* x *daną równaniem* (1) *w otoczeniu punktu* P_0. Pochodne funkcji (3) wyrażają się wzorami

$$f' = -F_x/F_y, \qquad f'' = (-F_{xx}F_y^2 + 2F_{xy}F_xF_y - F_{yy}F_x^2)/F_y^3 \tag{5}$$

z podstawieniem $y = f(x)$ dla $x \in H$. Jeśli $f' = 0$, to $f'' = -F_{xx}/F_y$.

Uwaga. Założenia tw. 1 są dla istnienia funkcji (3) wystarczające, ale nie konieczne. W zadaniu 11.3c warunek $F_y(P_0) \neq 0$ nie jest spełniony, mimo to funkcja (3) istnieje. Jeśli równanie (1) daje się rozwiązać efektywnie względem y, to funkcję (3) otrzymujemy w postaci jawnej bez pomocy tw. 1.

11.1. Wyprowadzić wzory (5) przez różniczkowanie równości (4).

11.2. Rozwiązać efektywnie względem y równanie

a) $x^2+y^2-1=0$ **b)** $x^2+y^2+1=0$

c) $x^2+xy-x+y=0$ **d)** $x^2+2xy-y^2+x+2y=0$

e) $y+1=e^y$ **f)** $x-y+1=e^{x-y}$

g) $x^2+y^2+1=e^{x^2+y^2}$ **h)** $\frac{y}{x}=\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

11.3. Zbadać, czy tw. 1 można stosować do równania

a) $x^2-2y^2-2x-4y+4=0$ w otoczeniu punktu $P_0=(1,1)$,

b) $4xy-3y^2-6x+2y+3=0$ w otoczeniu punktu $P_0=(1,1)$,

c) $x^3-y^3=0$ w otoczeniu punktu $P_0=(0,0)$,

d) $x^2+y^2-\ln(x^2+y^2+1)=0$ w otoczeniu punktu $P_0=(0,0)$.

11.4. Za pomocą tw. 1 wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y=f(x)$ danej równaniem

a) $x^2-xy+2y^2+x-y=0$ w otoczeniu punktu $P_0=\left(0,\frac{1}{2}\right)$,

b) $xy-\ln y-1=0$ w otoczeniu punktu $P_0=\left(\frac{2}{e},e\right)$,

c) $x^2y-e^{2y}=0$ w otoczeniu punktu $P_0=(e,1)$,

d) $ye^x+e^y=0$ w otoczeniu punktu $P_0=(-1,-1)$.

Ekstremum funkcji uwikłanej

Funkcja uwikłana $y=f(x)$ dana równaniem $F(x,y)=0$ w otoczeniu punktu (x,y) ma dla argumentu x ekstremum właściwe, jeśli

$$F(x,y)=F_x(x,y)=0, \quad F_y(x,y)\neq 0, \quad F_{xx}(x,y)\neq 0 \tag{6}$$

Jest to minimum, gdy wartość $-F_{xx}(x,y)/F_y(x,y)$ jest dodatnia, a maksimum, gdy ta wartość jest ujemna.

11.5. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y=f(x)$, danej równaniem

a) $x^2-xy+1=0$ **b)** $x^2-2xy+2y^2+2x+1=0$

c) $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$ **d)** $x^3y-xy^3+6=0$

e) $x^2y^2-x^4+y^4-5=0$ **f)** $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$

11.6. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y=f(x)$ oraz funkcji uwikłanej $x=g(y)$, danych równaniem

a) $x^2-2xy+2y^2+2x+1=0$ **b)** $x^2-y^2-2x+2y-1=0$

c) $x^4-2x^2y-x^2+y^2+y=0$ **d)** $(x^2+y^2)^3=x^2y^2$

Punkt osobliwy

Punktem osobliwym równania $F(x,y)=0$ nazywamy punkt (x,y), w którym zachodzą równości $F=F_x=F_y=0$. Jeśli w tym punkcie równanie

$$F_{xx}+2F_{xy}m+F_{yy}m^2=0 \tag{7}$$

ma dwa pierwiastki rzeczywiste m_1 i m_2, to obrazem równania w otoczeniu tego punktu są dwie krzywe przecinające się w tym punkcie, a styczne do tych krzywych mają współczynniki kątowe m_1 i m_2. Jeśli zaś $F_{yy}=0$, to jedna styczna jest równoległa do osi Oy, a druga ma współczynnik kątowy m wyznaczony przez równanie $F_{xx}+2F_{xy}m=0$.

11.7. Znaleźć punkty osobliwe równania

a) $x^2y-xy^2-x+y=0$ **b)** $x^3-x^2y+y^2-xy=0$

c) $x^3-x^2-y^2=0$ **d)** $x^2y-y^3=0$ **e)** $xe^{2y}-ye^{2x}=0$

Funkcja uwikłana dwóch zmiennych

Twierdzenie 2. Rozważmy równanie o trzech zmiennych

$$F(x,y,z)=0 \tag{8}$$

Jeśli w punkcie $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ zachodzą związki

$$F(P_0)=0 \quad F_z(P_0)\neq 0 \tag{9}$$

to w pewnym otoczeniu H punktu (x_0,y_0) istnieje dokładnie jedna funkcja

$$z=f(x,y) \tag{10}$$

klasy C^2, spełniająca dla $(x,y)\in H$ równość

$$F(x,y,f(x,y))=0 \tag{11}$$

oraz warunek $z_0=f(x_0,y_0)$. Funkcję (10) nazywamy *funkcją uwikłaną zmiennych x, y daną równaniem* (8) *w otoczeniu punktu* P_0. Pochodne cząstkowe funkcji (10) wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} &f_x=-F_x/F_z, \quad f_y=-F_y/F_z\\ &f_{xx}=(-F_{xx}F_z^2+2F_{xz}F_xF_z-F_{zz}F_x^2)/F_z^3\\ &f_{yy}=(-F_{yy}F_z^2+2F_{yz}F_yF_z-F_{zz}F_y^2)/F_z^3\\ &f_{xy}=(-F_{xy}F_z^2+F_{xz}F_yF_z+F_{yz}F_xF_z-F_{zz}F_xF_y)/F_z^3 \end{aligned} \tag{12}$$

z podstawieniem $z=f(x,y)$ dla $(x,y)\in H$. Jeśli $f_x=f_y=0$, to $f_{xx}=-F_{xx}/F_z$, $f_{yy}=-F_{yy}/F_z$, $f_{xy}=-F_{xy}/F_z$.

11.8. Wyprowadzić wzory (12) przez różniczkowanie równości (11).

11.9. Rozwiązać efektywnie względem z równanie
a) $x^2+y^2-z^2=0$ **b)** $x^2+y^2+z^2-1=0$
c) $xy+yz+zx=0$ **d)** $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$
e) $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$ **f)** $\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}=\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$

11.10. Zbadać, czy tw. 2 może być stosowane do równania
a) $x^2+y^2-z^2=0$ w otoczeniu punktu $P_0=(0,0,0)$,
b) $x^2+y^2+z^2-1=0$ w otoczeniu punktu $P_0=(1,0,0)$,
c) $xy+yz+zx=0$ w otoczeniu punktu $P_0=(1,0,0)$.

11.11. Za pomocą tw. 2 wyznaczyć pochodne f_x, f_y funkcji uwikłanej $z=f(x,y)$ danej równaniem
a) $e^z-xyz-1=0$ w otoczeniu punktu $(2,1,0)$,
b) $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}-z=0$ w otoczeniu punktu $(0, \pi/4, \pi/4)$,
c) $z^3-3xyz-20=0$ w otoczeniu punktu $(-1, 2, 2)$,
d) $x-z\ln\frac{z}{y}=0$ w otoczeniu punktu $(0, 1, 1)$,
e) $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ w otoczeniu punktu $(-2, 1, 1)$,
f) $x\sin y+y\sin z+z\sin x=1$ w otoczeniu punktu $(2, \pi/6, 0)$.

Ekstremum funkcji uwikłanej dwóch zmiennych

Funkcja uwikłana
$$z=f(x,y) \tag{13}$$
dana równaniem $F(x,y,z)=0$ w otoczeniu punktu $P=(x,y,z)$ ma w punkcie (x,y) ekstremum właściwe, jeśli w punkcie P zachodzą związki
$$F=F_x=F_y=0, \qquad F_z\neq 0, \qquad W=F_{xx}F_{yy}-F_{xy}^2>0 \tag{14}$$
Jest to minimum, gdy wartość $-F_{xx}/F_z$ w punkcie P jest dodatnia, a maksimum, gdy ta wartość jest ujemna. Jeśli w punkcie P jest $F=0$, $F_z\neq 0$, ale $F_x\neq 0$ lub $F_y\neq 0$ lub $W<0$, to funkcja (13) w punkcie (x,y) nie ma ekstremum.

11.12. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $z=f(x,y)$ danej równaniem
a) $x^2+y^2+z^2-5z=0$ **b)** $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$
c) $x^2+y^2+z^3-3z=0$ **d)** $x-z\ln\frac{z}{y}=0$ **e)** $z^3-3xyz=20$

Dwie funkcje uwikłane jednej zmiennej

Twierdzenie 3. Rozważmy układ dwóch równań o trzech zmiennych
$$F(x,y,z)=0 \qquad G(x,y,z)=0 \tag{15}$$
Jeśli w punkcie $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ zachodzą związki
$$F(P_0)=G(P_0)=0, \qquad \frac{D(F,G)}{D(y,z)}(P_0)=\begin{vmatrix} F_y(P_0) & F_z(P_0) \\ G_y(P_0) & G_z(P_0)\end{vmatrix}\neq 0 \tag{16}$$
to w pewnym otoczeniu H liczby x_0 istnieje dokładnie jedna para funkcji
$$y=f(x), \qquad z=g(x) \tag{17}$$
klasy C^2, spełniających dla $x\in H$ równości
$$F(x,f(x),g(x))=0, \qquad G(x,f(x),g(x))=0 \tag{18}$$
oraz warunki $y_0=f(x_0)$, $z_0=g(x_0)$. O funkcjach (17) mówimy, że są to *funkcje uwikłane zmiennej x dane układem równań* (15) *w otoczeniu punktu* P_0. Pochodne tych funkcji są dane wzorami
$$\frac{dy}{dx}=\frac{D(F,G)}{D(x,z)}:\frac{D(F,G)}{D(y,z)}, \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{D(F,G)}{D(y,x)}:\frac{D(F,G)}{D(y,z)} \tag{19}$$
z podstawieniem $y=f(x)$, $z=g(x)$ dla $x\in H$.

11.13. Wyprowadzić wzory (19) przez różniczkowanie równości (18).

11.14. Rozwiązać efektywnie względem y i z układ równań
a) $x^2+y^2+z^2-2=0$, $x+y+z=0$
b) $x^2-2y^2-2z^2=0$, $x+y+z=2$
c) $x^2+xy+y^2-1=0$, $z=x^2+y^2$

11.15. Za pomocą tw. 3 wyznaczyć pochodne $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ funkcji uwikłanych $y=f(x)$, $z=g(x)$ danych układem równań
a) $y^3+xyz+z^3-3=0$, $x+y-z-1=0$ w otoczeniu punktu $P_0=(1,1,1)$,
b) $\ln y+y\ln z+xz=0$, $x-y+z=0$ w otoczeniu punktu $P_0=(0,1,1)$,
c) $xy+yz+zx-11=0$, $xyz-6=0$ w otoczeniu punktu $P_0=(1,2,3)$.

Dwie funkcje uwikłane dwóch zmiennych

Twierdzenie 4. Rozważmy układ dwóch równań o czterech zmiennych
$$F(x,y,u,v)=0, \qquad G(x,y,u,v)=0 \tag{20}$$
Jeśli w punkcie $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ zachodzą związki

$$F(P_0) = G(P_0) = 0, \qquad \frac{D(F,G)}{D(u,v)}(P_0) \neq 0 \tag{21}$$

to w pewnym otoczeniu H punktu (x_0, y_0) istnieje dokładnie jedna para funkcji

$$u = f(x,y), \qquad v = g(x,y) \tag{22}$$

klasy C^2, spełniających w otoczeniu H równości

$$F(x,y,f(x,y),g(x,y)) = 0, \qquad G(x,y,f(x,y),g(x,y)) = 0 \tag{23}$$

oraz warunki $u_0 = f(x_0, y_0)$, $v_0 = g(x_0, y_0)$. O funkcjach (22) mówimy, że są to *funkcje uwikłane zmiennych x, y dane układem równań* (20) *w otoczeniu punktu P_0*. Pochodne tych funkcji są dane wzorami

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{D(F,G)}{D(x,v)} : \frac{D(F,G)}{D(u,v)}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{D(F,G)}{D(u,x)} : \frac{D(F,G)}{D(u,v)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{D(F,G)}{D(y,v)} : \frac{D(F,G)}{D(u,v)}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{D(F,G)}{D(u,y)} : \frac{D(F,G)}{D(u,v)} \end{aligned} \tag{24}$$

z podstawieniem $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$ dla $(x,y) \in H$.

11.16. Rozwiązać efektywnie względem u, v układ równań

a) $xu - yv = 0, \ yu + xv = 1$

b) $x = u\cos(v/u), \ y = u\sin(v/u)$

11.17. Za pomocą tw. 4 wyznaczyć pochodne cząstkowe względem x i y funkcji uwikłanych $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$, danych układem równań

a) $x\sin u - y\sin v = 0, \ u + v - x - y + 2 = 0$ w otoczeniu punktu $P_0 = (1,1,0,0)$,

b) $x - e^u - u\sin v = 0, \ y - e^u + u\cos v = 0$ w otoczeniu punktu $P_0 = (e, e-1, 1, 0)$.

Ekstremum warunkowe

Niech *funkcją ekstremalizowaną* (Zarys. s. 369) będzie funkcja $u = G(x,y)$, $(x,y) \in D$, a *więzami* zbiór E, $E \subset D$.

1. Jeśli więzy E są dane równaniem $y = f(x)$, $x \in H$, H — przedział, to *ekstremum warunkowe* funkcji G względem więzów E jest to ekstremum funkcji złożonej $G(x, f(x))$, $x \in H$.

2. Niech więzy E będą dane równaniem $F(x,y) = 0$ nie mającym punktu osobliwego. Jeśli równanie to sprowadza się do postaci $y = f(x)$, to rozumujemy jak w p. 1. Jeśli w pewnym punkcie $P_0 \in E$ jest $F_y(P_0) = 0$, to w otoczeniu punktu P_0 sprowadzamy równanie więzów do postaci $x = g(y)$ i poszukujemy ekstremum funkcji $G(g(y), y)$.

Metoda Lagrange'a

Tworzymy funkcję $L(x,y,\lambda) = G(x,y) + \lambda F(x,y)$, obliczamy jej pochodne cząstkowe i przyrównujemy je do 0

$$G_x + \lambda F_x = 0, \qquad G_y + \lambda F_y = 0, \qquad F = 0 \tag{25}$$

Każdy punkt (x,y) spełniający równania (25) nazywamy *punktem stacjonarnym* funkcji G względem więzów E. Równości (25) są warunkiem koniecznym ekstremum warunkowego, tzn. jeśli w jakimś punkcie występuje ekstremum warunkowe, to punkt ten spełnia równania (25). Rozwiązując układ równań (25), znajdujemy wszystkie punkty w których może występować ekstremum warunkowe funkcji G względem więzów E.

11.18. Wyznaczyć ekstremum warunkowe funkcji

a) $u = ax + by$, $a^2 + b^2 > 0$ względem więzów $x^2 + y^2 = 1$,

b) $u = x^2 + y^2$ względem więzów $x\cos\alpha + y\sin\alpha = a$,

c) $u = \cos^2 x + \cos^2 y$ względem więzów $y = x - \pi/4$.

11.19. Wyznaczyć ekstremum warunkowe funkcji

a) $u = x - 2y + 2z$ względem więzów $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

b) $u = xy^2z^3$ względem więzów $x + 2y + 3z = a$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $a > 0$,

c) $u = xyz$ względem więzów $x + y + z = 5$,

d) $u = \sin x \sin y \sin z$ względem więzów $x + y + z = \pi/2$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$,

e) $u = x^2 + y^2 + z^2$ względem więzów $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $a > b > c > 0$,

f) $u = x + y + z$ względem więzów $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

11.20. Na płaszczyźnie $x + y - 2z = 0$ wyznaczyć punkt $P = (x,y,z)$ taki, aby suma kwadratów odległości punktu P od płaszczyzny $x + 3z = 6$ i od płaszczyzny $y + 3z = 2$ była najmniejsza.

11.21. Na płaszczyźnie $3x - 2z = 0$ wyznaczyć punkt $P = (x,y,z)$ taki, aby suma kwadratów odległości punktu P od punktu $A = (1,1,1)$ i od punktu $B = (2,3,4)$ była najmniejsza.

Rozdział 12

Krzywe na płaszczyźnie i w przestrzeni

Krzywa dana równaniem $F(x, y) = 0$

Aby nakreślić *obraz równania* $F(x, y) = 0$, rozwiązujemy to równanie względem y lub względem x (o ile jest to możliwe) i szkicujemy wykres otrzymanej funkcji.

12.1. Nakreślić obraz równania

a) $x^3+x^2-y^2=0$ **b)** $y^2+x^4-x^2=0$

c) $y^2=(x-a)^2\dfrac{x}{2a-x}, a>0$ **d)** $y^2=(x+2)^3$

e) $(y-x)^2=x^3$ **f)** $64y^2=x^5+5x^4$

g) $y^2=x(x-2)^2$ **h)** $y^2(2a-x)=x^3, a>0$

i) $x^3-x^2-y^2=0$

Krzywa dana parametrycznie

Aby nakreślić krzywą daną *równaniami parametrycznymi* $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in E$, E — przedział, rugujemy parametr, t, tzn. sprowadzamy równanie krzywej do postaci $y=f(x)$ lub $x=g(y)$ lub $F(x, y)=0$. *Rugowanie* parametru nie zawsze jest możliwe.

12.2. Narysować krzywą

a) $x=2t-1, \quad y=1-4t^2, \quad t\in\mathscr{R}$

b) $x=t^2+2, \quad y=t^2+1, \quad t\in\mathscr{R}$

c) $x=t^2-t-2, \quad y=t^2-t+3, \quad t\in\mathscr{R}$

d) $x=a\sin^2 t, \quad y=b\cos^2 t, \quad t\in\langle 0;\pi/2\rangle, \quad a>0, \quad b>0$

e) $x=a\cos t, \quad y=a\sin t, \quad t\in\mathscr{R}, a>0$

f) $x=a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y=a\,\mathrm{sh}\,t, \quad t\in\mathscr{R}, a>0$

g) $x=a\,\mathrm{sh}\,t, \quad y=b\,\mathrm{ch}\,t, \quad t\in\mathscr{R}, a>0, \quad b>0$

h) $x=\mathrm{ctg}\,t, \quad y=\mathrm{tg}\,t, \quad t\in(0;\pi/2)$

i) $x=e^{2t}, \quad y=e^{3t}, \quad t\in\mathscr{R}$

12.3. Krzywa jest dana równaniami parametrycznymi

$$x=1-t^2, \qquad y=2t+3t^2, \qquad t\in\mathscr{R}$$

Wyznaczyć punkty krzywej, odpowiadające wartościom parametru $t=-2, -1, 0, 1, 2$. Na podstawie własności funkcji $x(t)$ i $y(t)$ orzec, czy krzywa jest ograniczona, wyznaczyć punkty przecięcia krzywej osiami układu oraz punkty skrajne krzywej, tj. punkty o ekstremalnej odciętej lub o ekstremalnej rzędnej. Wyrugować parametr.

Wektor styczny, wektor normalny. Styczna, normalna

Zakładamy, że występujące poniżej funkcje: $x(t)$, $y(t)$, $f(x)$, $F(x, y)$ są klasy C^2. Pochodne funkcji $x(t)$, $y(t)$ względem t oznaczamy $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$. Drugie pochodne tych funkcji oznaczamy $\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)$. Zakładamy, że wektory $[\dot{x}, \dot{y}]$, $[F_x, F_y]$ są niezerowe. W równaniach stycznej i normalnej punkt (x, y) jest punktem krzywej, a punkt (X, Y) jest dowolnym punktem płaszczyzny.

Krzywa	$x=x(t),\ y=y(t)$ $t\in E$	$y=f(x),\ x\in E$	$F(x, y)=0$
Wektor styczny	$[\dot{x}, \dot{y}]$	$[1, f']$	$[-F_y, F_x]$
Wektor normalny	$[-\dot{y}, \dot{x}]$	$[-f', 1]$	$[F_x, F_y]$
Styczna	$\dfrac{X-x}{\dot{x}}=\dfrac{Y-y}{\dot{y}}$	$Y-y=f'(X-x)$	$F_x(X-x)+F_y(Y-y)=0$
Normalna	$\dot{x}(X-x)+\dot{y}(Y-y)=0$	$X-x+f'(Y-y)=0$	$\dfrac{X-x}{F_x}=\dfrac{Y-y}{F_y}$

12.4. Napisać równanie stycznej i równanie normalnej do krzywej

a) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathscr{R}$, w punkcie o odciętej $x = 0$,

b) $y = x \ln x$, $x > 0$, w punkcie o odciętej $x = 1$,

c) $y = \ln \cos x$, $|x| < \pi/2$, w punkcie o odciętej $x = \pi/3$.

12.5. Na krzywej $y = x\sqrt{x-3}$, $x \geqslant 3$, wyznaczyć punkt, w którym styczna ma współczynnik kierunkowy równy 5.

12.6. Na krzywej $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathscr{R}$, wyznaczyć punkt, w którym styczna ma współczynnik kierunkowy równy $-1/2$.

12.7. Napisać równanie stycznej i równanie normalnej do krzywej

a) $x^2+y^2+2x-2y-2 = 0$ w punkcie $(-2, 1+\sqrt{3})$

b) $x^3+y^2+2x-6 = 0$ w punkcie $(-1, 3)$

c) $xe^{2y} = ye^{2x}$ w punkcie $(0,0)$

d) $y^2-xy-4 = 0$ w punkcie $(3, -1)$

e) $2x^3-x^2y^2-3x+y+7 = 0$ w punkcie $(1, -2)$

f) $x^3+y^3-2axy = 0$, $a > 0$, w punkcie (a, a)

Wektor wodzący i jego pochodna

Niech K oznacza krzywą o równaniach $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in E$. Niech $M = M(t) = (x(t), y(t))$ oznacza dowolny punkt krzywej K. *Wektor wodzący* punktu M jest to wektor

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t)] \qquad t \in E \tag{1}$$

Pochodna wektora wodzącego punktu M jest to wektor

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t)] \qquad t \in E \tag{2}$$

Jeśli $\dot{\boldsymbol{r}}(t) \neq 0$, to $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ jest wektorem stycznym do K w punkcie $M(t)$. Jeśli $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0) = 0$, ale dla $t \neq t_0$ zachodzą związki

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = k(t)\boldsymbol{v}(t) \neq 0, \qquad \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 \neq 0$$

to $\boldsymbol{v}_0$ jest wektorem stycznym do K w punkcie $M_0 = M(t_0)$.

Promień wodzący punktu M jest to moduł wektora wodzącego punktu M

$$OM = r = r(t) = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)} \qquad t \in E \tag{3}$$

Jeśli $r(t) \neq 0$, to $\dot{r} = \dot{r}(t) = (\dot{x}(t)x(t)+\dot{y}(t)y(t))/r(t)$.

Kąt kierunkowy wektora wodzącego $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \neq 0$, oznaczamy $\varphi = (Ox, \boldsymbol{r})$. Kąt kierunkowy wektora stycznego $\dot{\boldsymbol{r}}$, $\dot{\boldsymbol{r}} \neq 0$, oznaczamy $\alpha = (Ox, \dot{\boldsymbol{r}})$. Jeśli $x(t) \neq 0$, to $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y(t)}{x(t)}$. Jeśli $\dot{x}(t) \neq 0$, to $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

12.8. Wyznaczyć wektor styczny w dowolnym punkcie krzywej i napisać równanie stycznej w punkcie M_0, odpowiadającym wartości t_0

a) $x = 2t-1$, $y = 1-4t^2$, $t \in \mathscr{R}$, $t_0 = 1$

b) $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $t_0 = \pi/4$

c) $x = t^3$, $y = t^2-2$, $t \in \mathscr{R}$, $t_0 = \sqrt{2}$

d) $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$, $t \in \mathscr{R}$, $t_0 = 0$

e) $x = t-\sin t$, $y = 1-\cos t$, $t \in \mathscr{R}$, $t_0 = \pi/2$

12.9. Wyznaczając promień wodzący, wektor wodzący i jego pochodną, zbadać krzywą

a) $x = \cos t+\sin t$, $y = \cos t-\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

b) $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

c) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

12.10. Udowodnić, że jeśli r jest promieniem wodzącym (3) krzywej K, to

1° zachodzi równość $\dfrac{d}{dt}(r^2) = 2r\dot{r}$ dla $t \in E$,

2° w punkcie, w którym r ma ekstremum, zachodzi relacja $\boldsymbol{r} \perp \dot{\boldsymbol{r}}$.

Jednokładność

Jednokładność o środku O w skali s, $s = \text{const} \neq 0$, jest to przekształcenie, które dowolnemu punktowi P przyporządkowuje punkt P' taki, że $\overrightarrow{OP'} = s\overrightarrow{OP}$. Jeśli w tym przekształceniu obrazem figury K jest figura K', to mówimy, że figura K' jest *jednokładna* z figurą K w skali s. W poniższych rozważaniach środkiem jednokładności O jest początek układu Oxy.

Krzywa K	Krzywa K' jednokładna z krzywą K w skali s
$x = x(t),\ y = y(t)$ $t \in E$	$x = sx(t),\ y = sy(t)$ $t \in E$
$y = f(x)$ $x \in \langle a;\ b\rangle$	$y = sf\left(\frac{x}{s}\right)$ $x \in \begin{cases} \langle sa;\ sb\rangle \text{ dla } s > 0 \\ \langle sb;\ sa\rangle \text{ dla } s < 0 \end{cases}$
$F(x, y) = 0$	$F\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right) = 0$

12.11. Znaleźć równanie krzywej K' jednokładnej w skali s z krzywą K o równaniu

a) $x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad t \in \langle 0; \pi/2\rangle$ **b)** $y = \sin x,\ x \in \langle 0; \pi\rangle$
c) $y = 1/x^2,\quad x \in (0; \infty)$ **d)** $x^2 + y^2 = a^2$

Narysować krzywe K' odpowiadające wartościom $s = 1, 2, -1$.

12.12. Udowodnić, że krzywą jednokładną w skali s z parabolą $y = x^2$ jest parabola $y = \frac{1}{s}x^2$.

Okrąg

12.13. Napisać równanie okręgu

a) o środku $(-4, 3)$ i promieniu 5,
b) którego średnicą jest odcinek o końcach $(-4, 3)$ i $(2, 5)$,
c) przechodzącego przez punkty $(1, -2)$, $(0, -1)$, $(-3, 0)$,
d) przechodzącego przez punkt $(1, 2)$ i stycznego do obu osi układu.

Elipsa, hiperbola i parabola

	Elipsa	Hiperbola	Parabola
Równanie	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2px$
Półosie	$a > b > 0$ a – półoś wielka b – półoś mała	$a > 0,\ b > 0$ a – półoś rzeczywista b – półoś urojona	
Wierzchołki	$(\pm a, 0),\ (0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$	$(0, 0)$
Asymptoty		$y = \pm\frac{b}{a}x$	
Półogniskowa	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	
Ogniska	$F_{1,2} = (\pm c, 0)$		$F = (p/2, 0)$
Kierownice	$x = \pm k,\quad k = a^2/c$		$x = -p/2$
Półparametr	$p = b^2/a$		$p \neq 0$
Mimośród	$e = c/a$		$e = 1$

Stałe a, b, c, e, k, p związane z elipsą i hiperbolą są wzajemnie zależne. Znając którekolwiek dwie z tych stałych, możemy pozostałe wyznaczyć ze związków podanych w powyższej tablicy. W szczególności, otrzymujemy następujące wzory dla elipsy:

$$a = \frac{p}{1-e^2},\quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}},\quad c = \frac{ep}{1-e^2},\quad k = \frac{p}{e(1-e^2)} \tag{4}$$

oraz dla hiperboli

$$a = \frac{p}{e^2-1},\quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}},\quad c = \frac{ep}{e^2-1},\quad k = \frac{p}{e(e^2-1)} \tag{5}$$

12.14. Wyprowadzić wzory (4) i (5).

12.15. Napisać równanie elipsy, której ogniska leżą na osi Ox symetrycznie względem początku układu i o której wiadomo, że

a) przechodzi przez punkt $(-4, \sqrt{21})$ i ma mimośród $e = 3/4$,
b) półoś wielka jest równa 2, a kierownicą jest prosta $x = 4/\sqrt{3}$,
c) ma mimośród $e = \sqrt{5}/3$ i parametr $2p = 8$.

12.16. Napisać równanie hiperboli

a) której asymptotami są proste $y = \pm x$, a kierownicami są proste $x = \pm\sqrt{6}$,

b) której wierzchołki leżą na osi Ox, kierownicami są proste $x = \pm\sqrt{1/2}$, a mimośród jest równy $e = \sqrt{2}$,

c) która ma wierzchołki w ogniskach, a ogniska w wierzchołkach elipsy $x^2/25+y^2/9 = 1$.

12.17. Napisać równanie paraboli

a) której ogniskiem jest punkt $F = (1,0)$, a wierzchołkiem początek układu,

b) której ogniskiem jest punkt $F = (2,0)$, a kierownicą prosta $x = 1$,

c) której ognisko i wierzchołek, wzajemnie odległe o 1, leżą na osi Oy i która przechodzi przez punkt (4, 10).

12.18. Rozwiązać zadanie 12.15 a) przy założeniu, że ogniska elipsy leżą na osi Oy symetrycznie względem początku układu.

Styczna do stożkowej

Jeśli *stożkowa*, tzn. okrąg, elipsa, hiperbola lub parabola, jest dana równaniem

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F = 0 \tag{6}$$

to styczna do tej stożkowej ma równanie

$$AxX+B(yX+xY)+CyY+D(X+x)+E(Y+y)+F = 0 \tag{7}$$

w którym (x,y) oznacza punkt styczności, a (X,Y) jest dowolnym punktem płaszczyzny.

12.19. Napisać równanie stycznej w dowolnym punkcie styczności do stożkowej danej poniższym równaniem ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

a) $x^2+y^2 = a^2$ b) $(x-p)^2+(y-q)^2 = a^2$ c) $xy = a$

d) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ f) $y^2 = 2ax$

12.20. Wyznaczyć styczną

a) w punkcie $(2,\sqrt{3})$ do elipsy $x^2+4y^2 = 16$,

b) w punkcie $(2,-3)$ do hiperboli $3x^2-y^2 = 3$,

c) w punkcie (1, 4) do paraboli $y^2 = 16x$.

12.21. Wyznaczyć styczną do krzywej

a) $x^2+2y^2 = 8$ przechodzącą przez punkt (0, 6),

b) $x^2+y^2-8x-4y+16 = 0$ przechodzącą przez punkt (0, 0),

c) $y = x^2+2x+4$ przechodzącą przez punkt (0, 1).

12.22. Wyznaczyć styczną do krzywej

a) $x^2+y^2+6x+10y+9 = 0$ równoległą do prostej $3x+4y = 0$,

b) $4x^2-9y^2 = 36$ prostopadłą do prostej $x+2y = 0$,

c) $y^2 = 2px, p \neq 0$, równoległą do dwusiecznej I ćwiartki układu.

Ogniska, kierownice, promienie wodzące

Stożkowe o wspólnym ognisku i wspólnej kierownicy

12.23. Wyznaczyć figurę złożoną z punktów $M = (x,y)$, dla których stosunek odległości od punktu $F = (3,0)$ i od prostej d o równaniu $x = -3$ jest stały i równy liczbie e, przyjmując

a) $e = 1$, b) $e = 1/2$ c) $e = 2$, d) $e = 1/5$ e) $e = 5$

Elipsy i hiperbole o wspólnych ogniskach

12.24. Udowodnić, że dowolna elipsa o ogniskach $F_1 = (c,0)$, $F_2 = (-c,0), c > 0$, i dowolna hiperbola o tych samych ogniskach przecinają się pod kątem prostym.

Suma i różnica promieni wodzących MF_1, MF_2

12.25. Dane są dwa punkty $F_1 = (4,0)$ i $F_2 = (-4,0)$. Wyznaczyć figurę złożoną z punktów $M = (x,y)$, dla których

a) $MF_1+MF_2 = 10$ b) $MF_1-MF_2 = 6$ c) $|MF_1-MF_2| = 6$

Współrzędne biegunowe uogólnione

Niech $M = (x,y)$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny Oxy, różnym od punktu $O = (0,0)$. *Oś radialna* punktu M jest to oś przechodząca przez punkty O, M i mająca pewien określony zwrot (niekoniecznie zgodny ze zwrotem wektora $\overrightarrow{OM}$). Oś tę oznaczamy Or. Miarę wektora $\overrightarrow{OM}$ na osi Or nazywamy współrzędną *radialną* punktu M i oznaczamy r. Miarę (wieloznaczną) kąta skierowanego od osi Ox do osi Or nazywamy współrzędną *kątową* punktu M i oznaczamy φ. Mamy zatem związki

$$r = \text{wsp}_{Or}\overrightarrow{OM}, \qquad \varphi = \angle(Ox, Or)$$

Nadto, jeśli $M = (0,0)$, to przyjmujemy $r = 0$, φ — dowolne. Przy tych określeniach dla każdego punktu $M = (x, y)$ zachodzą równości

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

12.26. Krzywa jest określona w układzie prostokątnym równaniem
a) $x^2+y^2 = a^2$ **b)** $x^2-y^2 = a^2$ **c)** $x^2+y^2 = ax$
gdzie $a > 0$. Znaleźć równanie tej krzywej w układzie biegunowym.

12.27. Krzywa jest określona w układzie biegunowym równaniem
a) $r^2\sin 2\varphi = 2a^2$ **b)** $r\cos\varphi = a$ **c)** $r = 2a\sin\varphi$
d) $r\sin(\varphi+{}^{\pi}/_{4}) = a$ **e)** $\operatorname{tg}\varphi = m$ **f)** $r\cos(\varphi-\alpha) = a$
gdzie $a > 0$. Znaleźć równanie tej krzywej w układzie prostokątnym.

Stożkowe w układzie biegunowym

Równanie

$$r = \frac{p}{1-e\cos\varphi} \qquad p > 0, e \geqslant 0$$

wyznacza stożkową o mimośrodzie e i półparametrze p. Półparametr p określa wielkość stożkowej, a mimośród e jej kształt, a mianowicie:
— dla $e = 0$ jest to okrąg $x^2+y^2 = p^2$,
— dla $0 < e < 1$ jest to elipsa $(x-c)^2/a^2+y^2/b^2 = 1$,
— dla $e = 1$ jest to parabola $y^2 = 2p(x+p/2)$,
— dla $e > 1$ jest to hiperbola $(x+c)^2/a^2-y^2/b^2 = 1$,
przy czym a, b, c są wyznaczone przez e, p wzorami (4) i (5).

12.28. Stożkowa jest określona w układzie biegunowym równaniem

a) $r = \dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$ **b)** $r = \dfrac{1}{2-\sqrt{5}\cos\varphi}$ **c)** $r = \dfrac{3}{1-\cos\varphi}$

d) $r = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}\cos\varphi}$ **e)** $r = \dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$ **f)** $r = \dfrac{1}{2-2\cos\varphi}$

Znaleźć równanie tej stożkowej w układzie prostokątnym.

Inne krzywe w układzie biegunowym

12.29. Narysować krzywą określoną poniższym równaniem ($a > 0$, $m > 0$)

a) $r = a\varphi$	spirala Archimedesa
b) $r = a/\varphi$	spirala hiperboliczna
c) $r = ae^{m\varphi}$	spirala logarytmiczna
d) $r = a(1+\cos\varphi)$	kardioida
e) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$	lemniskata Bernoulliego
f) $r = a\sin\varphi$	okrąg
g) $r = a\sin 2\varphi$	krzywa czterolistna
h) $r = a\sin 3\varphi$	krzywa trójlistna
i) $r = a\sin 4\varphi$	krzywa ośmiolistna

Inwersja

Inwersja względem okręgu K o środku S i promieniu a jest to przekształcenie, które dowolnemu punktowi P, różnemu od S, przyporządkowuje punkt Q leżący na półprostej SP w takiej odległości od S, że zachodzi równość

$$SP \cdot SQ = a^2 \tag{8}$$

Jeśli S jest początkiem prostokątnego układu kartezjańskiego, to przy oznaczeniach $P = (x, y)$, $Q = (X, Y)$ zachodzą związki

$$X = a^2\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad Y = a^2\frac{y}{x^2+y^2} \tag{9}$$

oraz równoważne im związki

$$x = a^2\frac{X}{X^2+Y^2}, \qquad y = a^2\frac{Y}{X^2+Y^2} \tag{10}$$

12.30. Udowodnić wzory (10).

12.31. Udowodnić, że w przekształceniu (10) obrazem okręgu lub prostej

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D = 0, \qquad |A|+|B|+|C| > 0 \tag{11}$$

jest okrąg lub prosta

$$a^4A+a^2(BX+CY)+D(X^2+Y^2) = 0 \tag{12}$$

12.32. Udowodnić, że w przekształceniu (10) obrazem lemniskaty $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ jest hiperbola $X^2-Y^2 = a^2$.

Rozpoznanie rodzaju linii drugiego stopnia

Mając dane równanie

$$\Phi(x, y) = ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f = 0, \ |a|+|b|+|c| \neq 0 \tag{13}$$

tworzymy wyznaczniki

$$w = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \tag{14}$$

które nazywamy *wyróżnikami* (*małym* i *wielkim*) równania (13). Za pomocą tych wyróżników można rozpoznać rodzaj linii drugiego stopnia.

Rodzaj linii drugiego stopnia	Cecha rozpoznawcza	
1. Elipsa	$w > 0$	$aW < 0$ [1]
2. Punkt	$w > 0$	$aW = 0$
3. Zbiór pusty	$w > 0$	$aW > 0$
4. Hiperbola	$w < 0$	$W \neq 0$
5. Dwie proste przecinające się	$w < 0$	$W = 0$
6. Parabola	$w = 0$	$W \neq 0$
7. Dwie proste równoległe 8. Prosta 9. Zbiór pusty	$w = 0$	$W = 0$ [2]

Uwagi. [1] Jeśli nadto $a = c$, $b = 0$, to linia jest okręgiem.
[2] Aby rozróżnić przypadki 7, 8 i 9, badamy, czy istnieją punkty wspólne linii z osiami układu.

12.33. Za pomocą wyróżników rozpoznać rodzaj linii drugiego stopnia

a) $2x^2-2xy+3y^2-2y-1 = 0$
b) $3x^2+4xy+2y^2+2x+4 = 0$
c) $x^2+2xy+2y^2-2x+2y+5 = 0$
d) $x^2+2xy-2y^2-2x+4y+1 = 0$
e) $2x^2-4xy+y^2+2y-1 = 0$
f) $x^2+4xy+4y^2-2x+6y+1 = 0$
g) $4x^2-4xy+y^2-12x+6y+10 = 0$
h) $x^2-6xy+9y^2-2x+6y-8 = 0$
i) $x^2+2xy+y^2+2x+2y+1 = 0$

Badanie linii drugiego stopnia za pomocą obrotu i translacji

Niech L oznacza obraz równania

$$\Phi(x, y) = ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f = 0 \quad |a|+|b|+|c| \neq 0 \tag{15}$$

Metoda 1. Usunięcie wyrazu mieszanego za pomocą obrotu. Jeśli $b \neq 0$, to wprowadzamy układ OXY obrócony względem układu Oxy o kąt $\alpha = (x, X)$, który jest określony związkami

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+m}{2}}, \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{1-m}{2}}, \quad m = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}, \quad q = \frac{a-c}{2b} \tag{16}$$

Przejście od układu Oxy do układu OXY wyraża się wzorami

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \tag{17}$$

Podstawiając (17) do (15), otrzymujemy dla L równanie postaci

$$AX^2+CY^2+2DX+2EY+F = 0, \quad |A|+|C| \neq 0 \tag{18}$$

Dalsze przekształcanie równania (18) polega na uzupełnianiu do kwadratów i wynikającej stąd translacji prowadzącej od układu OXY do pewnego układu Suv.

12.34. Stosując obrót (w celu usunięcia wyrazu mieszanego), a następnie uzupełnienie do kwadratów i wynikającą stąd translację (w celu usunięcia wyrazów pierwszego stopnia), zbadać obraz równania

a) $5x^2-4xy+2y^2-24 = 0$
b) $x^2-6xy+y^2-4x-4y+12 = 0$
c) $x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50 = 0$
d) $x^2-4xy+4y^2-6x+12y+8 = 0$
e) $2x^2+4xy-y^2-12 = 0$
f) $3x^2-2xy+3y^2-4x-4y-12 = 0$
g) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25 = 0$
h) $x^2+2xy+4y^2-2x+4y+4 = 0$

Metoda 2. Usunięcie wyrazów pierwszego stopnia za pomocą translacji. Obliczając pochodne cząstkowe lewej strony równania (15) i przyrównując je do 0, otrzymujemy układ równań

$$ax+by+d = 0, \quad bx+cy+e = 0 \tag{19}$$

Jeśli punkt $S_0 = (x_0, y_0)$ jest pierwiastkiem układu równań (19), to punkt ten jest środkiem figury L i translacja

$$X = x-x_0, \quad Y = y-y_0 \tag{20}$$

sprowadza równanie (15) do postaci

$$aX^2+2bXY+cY^2+k = 0, \quad \text{gdzie } k = \Phi(x_0, y_0) \tag{21}$$

Uwaga. Jeśli układ równań (19) jest sprzeczny, to L jest parabolą. Parabola nie ma środka. Wszystkie pozostałe linie drugiego stopnia mają albo jeden środek, albo całą prostą środków.

12.35. Stosując translację (w celu usunięcia wyrazów pierwszego stopnia), a następnie obrót (w celu usunięcia wyrazu mieszanego), zbadać linię drugiego stopnia

a) $3x^2+4xy+2y^2+2x+4=0$
b) $4x^2-4xy+y^2-12x+6y+10=0$
c) $xy+x-2y=0$
d) $x^2-4xy+4y^2-6x+12y+8=0$
e) $x^2+2xy+y^2-2x-2y+1=0$
f) $9x^2+24xy+16y^2+125y=0$
g) $x^2+xy+y^2-3x-3y=0$
h) $x^2-xy+y^2-3x-3y=0$

12.36. Stosując metodę 1 lub metodę 2, zbadać linię drugiego stopnia

a) $3x^2-4xy-12x+8y+4=0$
b) $x^2-xy+y^2-2x-2y-2=0$
c) $x^2+2xy+4y^2-2x+4y+4=0$
d) $x^2-4xy+3y^2-8x+14y+15=0$

Środek krzywizny. Ewoluta

Niech K oznacza łuk gładki klasy C^2 (*Zarys*, s. 379)

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t \in E \tag{22}$$

i niech $M = (x, y)$ oznacza punkt krzywej K, odpowiadający wartości t. Wprowadzamy oznaczenia pomocnicze

$$v = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, \qquad w = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} \tag{23}$$

Jeśli $w \neq 0$, to dla krzywej K w punkcie M istnieją:
środek krzywizny $S = (X, Y)$ o współrzędnych

$$X = x-\dot{y}v^2/w, \qquad Y = y+\dot{x}v^2/w \tag{24}$$

wektor krzywizny

$$\overrightarrow{MS} = [X-x, Y-y] = [-\dot{y}v^2/w, \dot{x}v^2/w] \tag{25}$$

promień krzywizny $R = MS = v^3/|w|$ i *krzywizna* $k = 1/R = |w|/v^3$.

Ewoluta krzywej K jest to zbiór środków krzywizny krzywej K. Związki (24) są parametrycznymi równaniami ewoluty.

Jeśli K jest krzywą klasy C^2 o równaniu $y = y(x)$, $x \in E$, przy czym $y''(x) \neq 0$, to powyższe wzory zachowują swą moc, jeśli występujące w nich wielkości $\dot{x}$, $\dot{y}$, v^2, w zastąpimy przez 1, y', $1+y'^2$, y''.

12.37. Wyznaczyć wektory krzywizny i obliczyć promienie krzywizny krzywej $y = \cos x$, odpowiadające punktom krzywej o odciętych $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$. Sporządzić rysunek.

12.38. Wyznaczyć środek krzywizny i promień krzywizny krzywej

a) $y = x^3$ dla $x = 1$ **b)** $y = x^3$ dla $x = 0$ **c)** $y = \ln x$ dla $x = 1$

d) $y = e^x$ dla $x = 0$ **e)** $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ dla $x = 0$

f) $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$ dla $t = 0$

g) $x = t^2$, $y = t^3/3$ dla $t = 1$ **h)** $y = \mathrm{tg}\,x$ dla $x = \pi/4$

12.39. Wyznaczyć ewolutę krzywej

a) $y = 1-x^2/2$ **b)** $y^2 = 2(x+1)$ **c)** $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$
d) $x = 2\cos t$, $y = \sin t$
e) $x = a(\cos t+t\sin t)$, $y = a(\sin t-t\cos t)$
f) $r = a(1+\cos\varphi)$

Obwiednia rodziny krzywych

Załóżmy, że $F(x, y, c)$ jest funkcją klasy C^2 i że równanie

$$F(x, y, c) = 0 \tag{26}$$

dla każdej wartości c należącej do pewnego przedziału Γ określa na płaszczyźnie Oxy pewną krzywą. Rodzinę tych krzywych oznaczamy F.

Krzywa K jest *obwiednią* rodziny F, jeśli:

1° K jest styczna do każdej krzywej rodziny F,
2° każdy punkt krzywej K jest punktem styczności z pewną krzywą rodziny F,
3° żaden łuk częściowy krzywej K nie zawiera się w żadnej krzywej rodziny F.

Punkt P jest *obwiednią zdegenerowaną* rodziny F, jeśli przez ten punkt przechodzą wszystkie krzywe rodziny F.

Aby wyznaczyć obwiednię rodziny F, piszemy układ równań

$$F(x, y, c) = 0 \qquad F_c(x, y, c) = 0 \tag{27}$$

Układ ten wyznacza figurę W, którą nazywamy *krzywą wyróżnikową* rodziny F. Obwiednia rodziny F jest podzbiorem krzywej wyróżnikowej rodziny F.

12.40. Wyznaczyć obwiednię rodziny krzywych określonych równaniem

a) $y = (x-c)^2$ **b)** $y = (x-c)^3$ **c)** $y = c$ **d)** $y = c^3$

e) $x\cos c + y\sin c = 1$ **f)** $x\cos c + y\sin c = 0$

g) $(x-c)^2 + y^2 = c^2/2$ **h)** $(x-c)^2 + y^2 = c^2$

i) $y = \frac{1}{c}x^2 + c$ dla $c \neq 0$ **j)** $y = cx^2 - c^2$

k) $x^2 + cy^2 = c^3$ **l)** $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(1-c)^2} = 1, \quad 0 \neq c \neq 1$

Krzywa w przestrzeni

Niech K oznacza łuk gładki klasy C^3

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \qquad t \in E \tag{28}$$

Oznaczmy: $M = (x, y, z)$ — punkt krzywej K odpowiadający wartości t, $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = [x, y, z]$ — *wektor wodzący* punktu M; $\dot{\mathbf{r}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$, $\ddot{\mathbf{r}} = [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}]$, $\dddot{\mathbf{r}} = [\dddot{x}, \dddot{y}, \dddot{z}]$ — *pochodne wektora* $\mathbf{r}$. Jeśli $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \neq 0$, to dla krzywej K w punkcie M istnieją: 1) trzy wektory niezerowe, wzajemnie prostopadłe: wektor *styczny* $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, wektor *binormalny* $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$, wektor *normalny główny* $(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}$; 2) trzy proste równoległe do tych wektorów i przechodzące przez punkt M: *styczna*, *binormalna*, *normalna główna*; 3) trzy płaszczyzny prostopadłe do tych wektorów i przechodzące przez punkt M: płaszczyzna *normalna*, płaszczyzna *ściśle styczna* i płaszczyzna *prostująca*. Wymienione proste i płaszczyzny tworzą tzw. *trójścian Freneta*. Nadto istnieją:

oś krzywizny; jest to prosta o równaniach

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(X-x) + \dot{y}(Y-y) + \dot{z}(Z-z) &= 0 \\ \ddot{x}(X-y) + \ddot{y}(Y-y) + \ddot{z}(Z-z) &= v^2 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

środek krzywizny S; jest to punkt wspólny osi krzywizny i płaszczyzny ściśle stycznej;

wektor krzywizny $\overrightarrow{MS} = [X-x, Y-y, Z-z]$; współrzędne tego wektora obliczamy z równań (29) i z równania płaszczyzny ściśle stycznej;

promień krzywizny $R = MS = v^3/w$; *krzywizna* $k = 1/R = w/v^3$;

skręcenie (torsja) $\tau = |T|/w^2$, gdzie $v = |\dot{\mathbf{r}}|$, $w = |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|$, $T = [\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}]$.

Niech wartości t_1 różnej od t odpowiadają na krzywej K: punkt M_1, wektor styczny $\mathbf{v}_1$, wektor binormalny $\mathbf{w}_1$, Δl = długość łuku MM_1, $\Delta\varphi$ = miara kąta $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}_1\}$, $\Delta\psi$ = miara kąta $\{\mathbf{w}, \mathbf{w}_1\}$ i niech $t_1 \to t$. Wówczas $k = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \Delta\varphi/\Delta l$, $\tau = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \Delta\psi/\Delta l$.

12.41. Napisać równania prostych i płaszczyzn tworzących trójścian Freneta.

12.42. Obliczyć współrzędne wektora krzywizny i wyprowadzić wzór na promień krzywizny.

12.43. Wyznaczyć wektory: styczny, binormalny i normalny główny krzywej

a) $x = t^2$, $y = t^4$, $z = t$ dla $t = 1$

b) $x = 1 - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$ dla $t = 0$ i $t = \pi$

c) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ dla $t = 0$ i dla $t = 1$.

12.44. Obliczyć krzywiznę i skręcenie krzywej

a) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ dla $t = 0$

b) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ dla $t = 0$

c) $x = 2abt$, $y = a^2 \ln t$, $z = b^2 t^2$, $a > 0$, $b > 0$, dla $t > 0$

12.45. Napisać równania osi krzywizny krzywej

a) $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ dla $t = 1$

b) $x = 1 - \sin t$, $y = \cos t$, $z = t$ dla $t = 0$

c) $x = 1 - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$ dla $t = \pi$

12.46. Napisać równanie płaszczyzny ściśle stycznej do krzywej

a) $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ dla $t = 0$

b) $x = t$, $y = t$, $z = 2t^2$ dla dowolnego t

c) $x = 1 - t^3$, $y = 5t^3$, $z = \frac{1}{3}t^3$ dla dowolnego t

12.47. Wykazać, że wektory: styczny, binormalny i normalny główny krzywej $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $z = e^t$ dla dowolnego t tworzą z osią Oz kąty stałe.

Rozdział 13

Powierzchnie

Wektor normalny i płaszczyzna styczna do powierzchni

Niech S oznacza powierzchnię określoną w przestrzeni $Oxyz$ równaniem klasy C^1, postaci

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

lub

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D \tag{2}$$

lub

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Omega \tag{3}$$

gdzie D jest pewnym obszarem w płaszczyźnie Oxy, a Ω jest pewnym obszarem w przestrzeni $\mathscr{R}^2$ parametrów u, v. Niech $M = (x, y, z)$ będzie pewnym punktem powierzchni S. W przypadku równania (3) zakładamy, że M jest punktem jednokrotnym, tzn. że M jest obrazem dokładnie jednej pary liczb (u, v) należącej do Ω. *Wektorem normalnym* do powierzchni S w punkcie M jest: w przypadku równania (1) wektor

$$\operatorname{grad} F = [F_x, F_y, F_z] \tag{4}$$

— w przypadku równania (2) wektor

$$N = [-z_x, -z_y, 1] \tag{5}$$

— w przypadku równania (3) wektor

$$\boldsymbol{n} = [x_u, y_u, z_u] \times [x_v, y_v, z_v] \tag{6}$$

przy założeniu, że $\operatorname{grad} F \neq 0$, względnie $\boldsymbol{n} \neq 0$. Iloczyn wektora normalnego i liczby różnej od 0 jest też wektorem normalnym.

Płaszczyzna styczna do powierzchni S w punkcie M jest to płaszczyzna przechodząca przez punkt M i prostopadła do wektora normalnego do S w punkcie M.

13.1. Wyznaczyć wektor normalny do powierzchni

a) $x^2+y^2+z^2-169 = 0$ w punkcie $M = (3, 4, 12)$

b) $2x^2+3y^2+z^2-6 = 0$ w punkcie $M = (1, -1, -1)$

c) $xy^2+z^3-12 = 0$ w punkcie $M = (1, 2, 2)$

d) $z = x^2+y^2$ w punkcie $M = (1, 2, 5)$

e) $z = \sqrt{x^2+y^2}$ w punkcie $M = (3, -4, 5)$

f) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ w punkcie $M = (1, 1, \pi/2)$

13.2. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni

a) $x^2+y^2-z^2+1 = 0$ w punkcie $M = (2, 2, 3)$

b) $z = 1+x^2+y^2$ w punkcie $M = (1, 1, 3)$

c) $z = y+\ln\frac{x}{z}$ w punkcie $M = (1, 1, 1)$

13.3. Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$x^2+2y^2+3z^2 = 21$$

równoległą do płaszczyzny $x+4y+6z = 0$

13.4. Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$x^2+2y^2+3z^2+x+2y+3z = 0$$

równoległą do płaszczyzny Oxy.

13.5. Wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a, b, c \text{ — stałe dodatnie}$$

odcinającą na dodatnich półosiach układu $Oxyz$ równe odcinki.

13.6. Zbadać, czy płaszczyzna T styczna do powierzchni S w punkcie M ma punkty wspólne z powierzchnią S różne od punktu M

a) S: $3x^2+4y^2-z = 0$, $M = (1, -1, 7)$

b) S: $x^2+2y^2-z^2 = 0$, $M = (1, 2, 3)$

c) S: $z = (x^2+y^2)(2-x^2-y^2)$, $M = (1, 0, 1)$

13.7. Poniżej dane są: powierzchnia S określona równaniami postaci (3), przy czym $\Omega = \mathscr{R}^2$, oraz punkt M. Zbadać czy M jest punktem jednokrotnym powierzchni S, a jeśli tak, to wyznaczyć wektor normalny do S w punkcie M

a) $x = u+v, y = u-v, z = uv$; $M = (2,0,1)$
b) $x = u+v, y = u-v, z = u^2+v^2$; $M = (3,1,5)$
c) $x = u+v, y = u^2+v^2, z = u^3-v^3$; $M = (3,5,7)$
d) $x = u+v, y = u^2+v^2, z = \frac{1}{2}(u^2-v^2)$; $M = (0,2,0)$

W poniższych trzech zadaniach parametrami w równaniach powierzchni są: r, φ — uogólnione współrzędne biegunowe, względnie θ, φ — współrzędne sferyczne (*Zarys*, s. 152, 401).

13.8. Wyznaczyć wektor normalny do powierzchni śrubowej

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = a\varphi, \quad r\in\mathscr{R}, \quad \varphi\in\mathscr{R}$$

($a = \text{const} > 0$) w punkcie M odpowiadającym wartościom $r = 1$, $\varphi = \pi/4$.

13.9. Wyznaczyć wektor normalny do powierzchni

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = 2\operatorname{ctg}\varphi, \quad r\in\mathscr{R}, \quad 0 < \varphi < \pi$$

w punkcie M odpowiadającym wartościom $r = 1$, $\varphi = \pi/4$.

13.10. Wyznaczyć wektor normalny do powierzchni

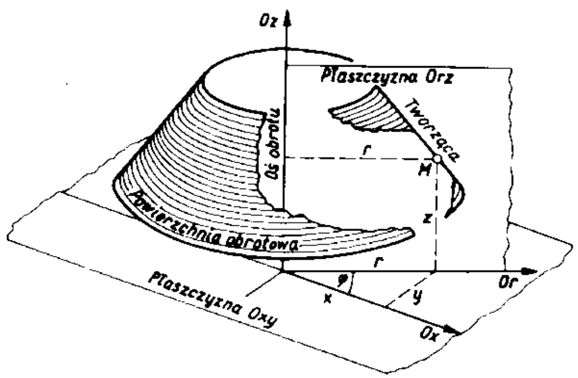
$$x = \sin\theta\cos\varphi, \quad y = \sin\theta\sin\varphi, \quad z = \cos\theta, \quad 0 < \theta < \pi, \quad -\pi < \varphi < \pi$$

w dowolnym punkcie tej powierzchni.

Powierzchnie obrotowe

Niech w przestrzeni $Oxyz$ będą dane: prosta l (*oś obrotu*) i linia T (*tworząca*). Figurę S utworzoną przez obrót linii T dokoła prostej l nazywamy *powierzchnią obrotową* o osi l i tworzącej T.

Przypadek 1. Osią obrotu jest oś układu, a tworząca leży w płaszczyźnie zawierającej tę oś. Jeśli oś obrotu l pokrywa się z osią Oz, a tworząca T leży w płaszczyźnie Orz



i ma równanie $F(r, z) = 0$, to powierzchnia obrotowa S ma równanie

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \tag{7}$$

W szczególności płaszczyzna Orz może pokrywać się z płaszczyzną Oxz; wówczas tworząca ma równanie $F(x, z) = 0$, a powierzchnia obrotowa ma nadal równanie (7). Analogicznie, jeśli oś obrotu l pokrywa się z osią Ox, a tworząca T leży w płaszczyźnie Oxy i ma równanie $F(x, y) = 0$, to powierzchnia obrotowa S ma równanie

$$F(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0 \tag{8}$$

13.11. Napisać równanie powierzchni obrotowej S, której oś l pokrywa się z osią Oz, a tworząca T jest dana na płaszczyźnie Orz poniższym równaniem (a, b — stałe)
a) $z = ar$ **b)** $z = ar+b$ **c)** $z = \ln r$ **d)** $z = e^r$
e) $z = r^3$ **f)** $z = 1/r$ **g)** $r = a$

13.12. Napisać równanie powierzchni obrotowej S, której oś l pokrywa się z osią Oz, a tworząca T jest dana na płaszczyźnie Oxz poniższym równaniem (a, b — stałe)
a) $z = ax$ **b)** $z = ax+b$ **c)** $z = e^x$ **d)** $z = \arccos x$
e) $z = x^2-1$ **f)** $z = x^3$

13.13. Napisać równanie powierzchni obrotowej S, której oś l pokrywa się z osią Ox, a tworząca T jest dana na płaszczyźnie Oxz równaniem a) — f) z poprzedniego zadania.

13.14. Napisać równanie powierzchni obrotowej S, której oś l pokrywa się z osią Ox, a tworząca T jest dana na płaszczyźnie Oxy poniższym równaniem (a, b — stałe dodatnie).
a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ **b)** $y = e^{-x^2}$ **c)** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$ **d)** $y^2 = 2x$
e) $(x-a)^2+y^2 = a^2$ **f)** $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

Przypadek 2. Osią obrotu jest oś układu, a tworzącą jest dowolna krzywa.

13.15. Napisać równanie powierzchni obrotowej S o osi l i tworzącej T danych poniżej (a, m — stałe, różne od 0)
a) Osią l jest oś Oz, tworząca: $y = mz$, $x = a$.
b) Osią l jest oś Oy, tworząca: $y = mz$, $x = a$.
c) Osią l jest oś Oz, tworząca: $1-x = y = z$.

Przypadek 3 (trudniejszy). Osią obrotu jest dowolna prosta, a tworzącą jest dowolna krzywa.

13.16. Wyprowadzić równanie powierzchni obrotowej S, zakładając, że osią obrotu l jest prosta

$$\frac{x-a}{A}=\frac{y-b}{B}=\frac{z-c}{C}, \qquad |A|+|B|+|C|>0$$

a tworzącą T jest krzywa

$$x=x(t), \qquad y=y(t), \qquad z=z(t), \qquad t\in E$$

Powierzchnie prostokreślne

Powierzchnia S nazywa się *prostokreślną*, gdy przez każdy punkt powierzchni S przechodzi pewna prosta zawarta w S. Proste zawarte w powierzchni prostokreślnej nazywają się *tworzącymi* tej powierzchni. Powierzchnia prostokreślna jest:

obrotowa, gdy powstaje przez obrót pewnej prostej dokoła pewnej osi;

walcowa, gdy wszystkie tworzące mają ten sam kierunek, tzn. są równoległe do pewnego (niezerowego) wektora V;

stożkowa, gdy wszystkie tworzące mają wspólny punkt, zwany wierzchołkiem powierzchni stożkowej.

Krzywa K nazywa się *kierownicą* powierzchni S walcowej lub stożkowej, gdy: 1° przez każdy punkt krzywej K przechodzi pewna tworząca powierzchni S, 2° każda tworząca powierzchni S przechodzi przez pewien punkt krzywej K.

13.17. Napisać równanie powierzchni walcowej, której kierownica K i kierunek tworzących V są dane

a) K: $x^2+y^2=a^2, z=0$; $\quad V=[1,1,1]$

b) K: $x+1=y=z/2$; $\quad V=[1,0,1]$

c) K: $x^2-y^2=z, x+y+z=0$; $\quad V=[1,1,1]$

13.18. Napisać równanie powierzchni stożkowej, której kierownica K i wierzchołek W są dane (a, c — stałe dodatnie)

a) K: $x^2+z^2=a^2, y=c$; $\quad W=(0,0,0)$

b) K: $x^2=y, z=1$; $\quad W=(0,-1,0)$

c) K: $x^2+(y-6)^2+z^2=25, y=3$; $\quad W=(0,0,0)$

d) K: $x^2+y^2+z^2=a^2, y+z=a$; $\quad W=(0,-a,0)$

e) K: $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), z=0$; $\quad W=(0,0,-c)$

13.19. Wykazać, że powierzchnie określone w zadaniach 13.8 i 13.9 są prostokreślne.

13.20. Wykazać, że przez punkt $P=(1,-1,3)$ leżący na powierzchni S o równaniu $4x^2-y^2=z$ przechodzą dwie proste zawierające się w tej powierzchni.

13.21. Wykazać, że przez każdy punkt *paraboloidy hiperbolicznej*

$$S:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z, \qquad a,b \text{ — stałe dodatnie}$$

przechodzą dwie proste zawierające się w tej powierzchni.

13.22. Wykazać, że przez każdy punkt *hiperboloidy jednopowłokowej*

$$S:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a,b,c \text{ — stałe dodatnie}$$

przechodzą dwie proste zawierające się w tej powierzchni.

Kwadryki w położeniu standardowym

Kwadryką nazywamy zbiór punktów (x,y,z) spełniających równanie drugiego stopnia

$$\underbrace{Ax^2+By^2+Cz^2}_{\text{kwadraty}}+\underbrace{Dxy+Exz+Fyz}_{\text{wyrazy mieszane}}+\underbrace{Gx+Hy+Kz}_{\text{wyrazy liniowe}}+\underbrace{L}_{\text{wyraz wolny}}=0 \tag{9}$$

Każdą kwadrykę można za pomocą translacji i obrotu sprowadzić do położenia, w którym równanie kwadryki nie zawiera wyrazów mieszanych i ma jak najmniej wyrazów liniowych. Takie położenie kwadryki nazywamy położeniem *standardowym*, a odpowiadające mu równanie kwadryki równaniem *kanonicznym*. Jeśli kwadryka jest w położeniu standardowym, to największa jest liczba ścian układu, które są płaszczyznami symetrii kwadryki. Istnieje 17 typów kwadryk. Wymieniamy je wraz z ich równaniami kanonicznymi (a,b,c — stałe dodatnie).

Typ 1.	Elipsoida (sfera, gdy $a=b=c$)	$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$
Typ 2.	Zbiór pusty	$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=-1$
Typ 3.	Hiperboloida jednopowłokowa	$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$
Typ 4.	Hiperboloida dwupowłokowa	$x^2/a^2-y^2/b^2-z^2/c^2=1$
Typ 5.	Paraboloida eliptyczna	$x^2/a^2+y^2/b^2=2z$
Typ 6.	Paraboloida hiperboliczna	$x^2/a^2-y^2/b^2=2z$
Typ 7.	Stożek	$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=0$
Typ 8.	Punkt	$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=0$
Typ 9.	Walec eliptyczny	$x^2/a^2+y^2/b^2=1$
Typ 10.	Zbiór pusty	$x^2/a^2+y^2/b^2=-1$
Typ 11.	Walec hiperboliczny	$x^2/a^2-y^2/b^2=1$
Typ 12.	Walec paraboliczny	$y^2=2ax$
Typ 13.	Dwie płaszczyzny nierównoległe	$x^2/a^2-y^2/b^2=0$
Typ 14.	Prosta	$x^2/a^2+y^2/b^2=0$
Typ 15.	Dwie płaszczyzny równoległe	$y^2-a^2=0$
Typ 16.	Zbiór pusty	$y^2+a^2=0$
Typ 17.	Płaszczyzna	$y^2=0$

13.23. Rozpoznać kwadrykę

a) $x^2+y^2+z^2=9$ **b)** $x^2+y^2+z^2=0$ **c)** $x^2+y^2+z^2=-1$
d) $y^2+z^2=4$ **e)** $z^2=4$ **f)** $y^2+z^2=0$
g) $z^2=0$ **i)** $x^2+y^2+4z^2=16$ **j)** $9x^2+y^2+4z^2=36$
k) $x^2=y^2+z^2$ **l)** $x^2+y^2-z^2=1$ **m)** $x^2-y^2-z^2=4$
n) $z=x^2+y^2$ **o)** $z=x^2-y^2$ **p)** $36(x^2+y^2)-25z^2=900$

Kwadryki w położeniu dowolnym

Aby rozpoznać kwadrykę w położeniu dowolnym, piszemy równanie kwadryki w postaci

$$\begin{aligned} a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{14}x&+\\ +\ a_{22}y^2+2a_{23}yz+2a_{24}y&+\\ +\ a_{33}z^2+2a_{34}z&+\\ +\ a_{44}&=0 \end{aligned} \tag{10}$$

obliczamy *wyróżnik wielki V*, *wyróżnik mały W*, *ślad pierwszy* W_1 i *ślad drugi* W_2, które (przy założeniu $a_{ik}=a_{ki}$) są dane wzorami

$$V=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} \qquad W=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$W_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

$$W_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$

i korzystamy z poniższego zestawienia typów kwadryk i cech rozpoznawczych, przy czym przez rz V i rz W rozumiemy rzędy odpowiednich macierzy.

Typy kwadryk i cechy rozpoznawcze

Typ 1: $V<0$, $W\neq 0$, rz $V=4$, rz $W=3$, $WW_1>0$ i $W_2>0$.
Typ 2: $V>0$, $W\neq 0$, rz $V=4$, rz $W=3$, $WW_1>0$ i $W_2>0$.
Typ 3: $V>0$, $W\neq 0$, rz $V=4$, rz $W=3$, $WW_1\leqslant 0$ lub $W_2\leqslant 0$.
Typ 4: $V<0$, $W\neq 0$, rz $V=4$, rz $W=3$, $WW_1\leqslant 0$ lub $W_2\leqslant 0$.
Typ 5: $V\neq 0$, $W=0$, rz $V=4$, rz $W=2$, $W_2>0$.
Typ 6: $V\neq 0$, $W=0$, rz $V=4$, rz $W=2$, $W_2<0$.
Typ 7: $V=0$, $W\neq 0$, rz $V=3$, rz $W=3$, $WW_1\leqslant 0$ lub $W_2\leqslant 0$.
Typ 8: $V=0$, $W\neq 0$, rz $V=3$, rz $W=3$, $WW_1>0$ i $W_2>0$.
Typ 9: $V=0$, $W=0$, rz $V=3$, rz $W=2$, $W_2>0$ i przekrój kwadryki co najmniej jedną ze ścian układu jest zbiorem niepustym.

Typ 10: $V=0$, $W=0$, rz $V=3$, rz $W=2$, $W_2>0$ i przekrój kwadryki każdą ze ścian układu jest zbiorem pustym.
Typ 11: $V=0$, $W=0$, rz $V=3$, rz $W=2$, $W_2<0$.
Typ 12: $V=0$, $W=0$, rz $V=3$, rz $W=1$.
Typ 13: $V=0$, $W=0$, rz $V=2$, rz $W=2$, $W_2<0$.
Typ 14: $V=0$, $W=0$, rz $V=2$, rz $W=2$, $W_2>0$.
Typ 15: $V=0$, $W=0$, rz $V=2$, rz $W=1$ i co najmniej jeden z poniższych trzech wyznaczników jest ujemny

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14}\\ a_{41} & a_{44}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24}\\ a_{42} & a_{44}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34}\\ a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} \tag{11}$$

Typ 16: $V=0$, $W=0$, rz $V=2$, rz $W=1$ i każdy z wyznaczników (11) jest nieujemny.
Typ 17: $V=0$, $W=0$, rz $V=1$, rz $W=1$.

13.24. Rozpoznać kwadrykę

a) $x^2+y^2+2z^2+2yz+2x-2z+1=0$
b) $y^2-z^2-2xz+2x+4y+4=0$
c) $x^2+2y^2+z^2+2xy+2z+2=0$
d) $2x^2+y^2-3z^2+2xy+2xz=0$
e) $2x^2+y^2+5z^2+2xy+2xz=0$
f) $x^2+y^2+z^2+2xz-2x+4y+4=0$
g) $x^2-2z^2+2xy-2yz-1=0$
h) $-3x^2+y^2-z^2+2xy-4xz-2y=0$
i) $2x^2+y^2+z^2+2xy+2xz-1=0$
j) $x^2+y^2+z^2+2yz+2x+2=0$
k) $y^2+z^2-2yz-2x-2=0$
l) $y^2-z^2+2xy+2xz-1=0$
m) $x^2+4z^2+4xz+4=0$
n) $x^2-y^2-z^2+2yz+2x+1=0$
o) $x^2+2z^2+2xz=0$
p) $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz-1=0$
q) $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=0$

Odpowiedzi

Odpowiedzi do rozdziału 1

1.1. W sensie logiki:
a) nie jest zdaniem, gdyż jest pytaniem;
b) jest zdaniem o treści wykraczającej poza matematykę;
c) nie jest zdaniem, gdyż jest rozkazem;
d) jest zdaniem fałszywym, gdyż $\pi^2 < 3{,}15^2 = 9{,}9225 < 10$;
e) jest zdaniem prawdziwym;
f) jest funkcją zdaniową zmiennej n;
g) jest zdaniem prawdziwym;
h) jest zdaniem fałszywym.

1.2. **a)** 1, **b)** 0, **c)** 1, **d)** 1, **e)** 0, **f)** 1, **g)** 1, **h)** 0, **i)** 1.

1.3. **a)** 0, **b)** 1, **c)** 1, **d)** 0, **e)** 1, **f)** 0, **g)** 0, **h)** 1, **i)** 1, **j)** 0, **k)** 0, **l)** 0.

1.4. Należy wykonać sprawdzenie zerojedynkowe.

1.5. Wystarczy znaleźć taki zestaw wartości logicznych dla P, Q, R, przy którym formuła ma wartość 0. Można posłużyć się tabelką zerojedynkową.

1.6. Należy wykazać, że implikacja $A \Rightarrow B$, w której A jest częścią górną schematu, a B częścią dolną, jest tautologią.

1.7. **a)** Dla każdego x większego od 0 istnieje a mniejsze od x i większe od połowy x. **b)** Dla każdego a istnieje b większe od 0 takie, że dla każdego x większego od 0 jeśli $x < b$, to $1/x > a$. **c)** Dla każdych dwóch liczb suma kwadratów tych liczb jest nieujemna. **d)** Dla każdych dwóch różnych liczb dodatnich średnia arytmetyczna tych liczb jest większa od ich średniej geometrycznej.

1.8. **a)** 1, **b)** 1, **c)** 1, **d)** 0, **e)** 1, **f)** 0, **g)** 1, **h)** 0, **i)** 1, **j)** 0.

1.9. **a)** 1, **b)** 1, **c)** 0, **d)** 1, **e)** 1, **f)** 0.

1.10. **a)** $x \leqslant a$, **b)** $\bigvee\limits_{x} x \leqslant a$, **c)** $\bigvee\limits_{x} \bigwedge\limits_{a} x \leqslant a$, **d)** $a \leqslant x \leqslant b$,
e) $\bigvee\limits_{x} \bigwedge\limits_{a} \bigwedge\limits_{b} a \leqslant x \leqslant b$, **f)** $a \leqslant x \vee b \leqslant y$,

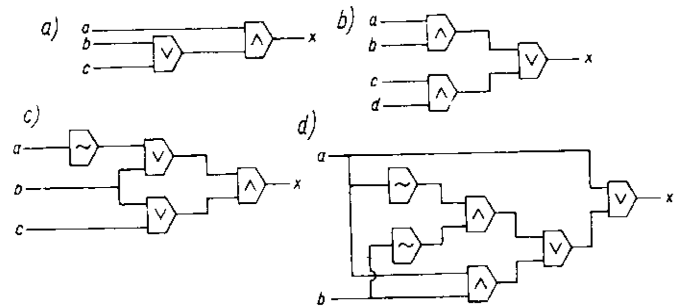
g) $\bigvee\limits_{x} \bigvee\limits_{y} \bigwedge\limits_{a} \bigwedge\limits_{b} (a \leqslant x \vee b \leqslant y)$, **h)** $x > b \wedge x \leqslant a$,
i) $\bigvee\limits_{a} \bigwedge\limits_{b} \bigvee\limits_{x} (x > b \wedge x \leqslant a)$

1.11. **a)** 0 **b)** — **f)** 1

1.12. **a)** $x = 1$ tylko dla $a = 0, b = 1$; **b)** $x = 0$ tylko dla $a = 1, b = 0$;
c) $x = 1$ tylko dla $a = b = 1$.

1.13. **a)** $x = p \wedge q$, $p = \sim a$, $q = a \vee b$, zatem $x = \sim a \wedge (a \vee b)$;
b) $x = \sim a \vee a \wedge b$; **c)** $x = (\sim a \vee a \wedge b) \wedge [(a \wedge b) \wedge (b \vee c)]$.

1.14.



Rys. 1.14

1.15. Ponieważ $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$, więc $x = a \vee (a \wedge b) \vee (\sim a \wedge \sim b)$. Ponieważ $a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$, więc $x = a \vee (\sim a \wedge \sim b) =$ $= (a \vee \sim a) \wedge (a \vee \sim b)$. Ponieważ $a \vee \sim a = 1$, więc $x = a \vee \sim b$.

1.16. Korzystając z tautologii $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow b \vee \sim a$, rysujemy sieć odpowiadającą formule $x = b \vee \sim a$.

1.17. $x = b$.

Odpowiedzi do rozdziału 2

2.1. Dowód indukcyjny. Nierówność Bernoulliego

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \tag{1}$$

jest prawdziwa dla $n = 1$. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Należy wykazać, że jeśli nierówność (1) jest prawdziwa, to także nierówność wynikająca z niej przez zastąpienie liczby n liczbą $n+1$, czyli nierówność

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x \tag{2}$$

jest prawdziwa. Otóż, mnożąc obie strony nierówności (1) przez $1+x$, otrzymujemy nierówność

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+nx)(1+x) \tag{3}$$

a ponieważ $(1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$, więc z nierówności (3) wynika nierówność (2). Koniec dowodu.

2.2. **a)** Dowód indukcyjny. Równość, którą chcemy udowodnić

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{1}$$

jest prawdziwa dla $n = 1$. Niech $n \in \mathcal{N}$. Należy wykazać, że jeśli równość (1) jest prawdziwa, to także równość wynikająca z niej przez zastąpienie liczby n liczbą $n+1$, czyli równość

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \tag{2}$$

jest prawdziwa. Otóż, dodając do obu stron równości (1) wyraz $(n+1)^2$, a następnie przekształcając prawą stronę, otrzymujemy równość (2). Koniec dowodu.
Dla **b)**, **c)**, **d)** oraz **2.3** — **2.8** dowody podobne.

2.9. **a)** Dowód indukcyjny. Nierówność, którą chcemy udowodnić

$$1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n \geqslant \sqrt{n^n} \tag{1}$$

jest prawdziwa dla $n = 1$ i dla $n = 2$. Niech $n \in \mathcal{N}$, $n \geqslant 2$. Należy wykazać, że jeśli nierówność (1) jest prawdziwa, to także nierówność wynikająca z niej przez zastąpienie liczby n liczbą $n+1$, czyli nierówność

$$1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n(n+1) \geqslant \sqrt{(n+1)^{n+1}} \tag{2}$$

jest prawdziwa. Załóżmy (1) i rozważmy prawą stronę (2). Otóż

$$(n+1)^{n+1} = (n+1)^n(n+1) = n^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(n+1) = n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)$$

Ponieważ $(1+1/n)^n < 3$ (*Zarys*, s. 60), więc dla $n \geqslant 2$ mamy $(1+1/n)^n < n+1$, a zatem $(n+1)^{n+1} < n^n(n+1)^2$. Stąd i z (1) wynika (2).
b) Dana nierówność jest prawdziwa dla $n = 1$. Mnożąc jej lewą stronę przez $u = (2n+1)(2n+2)/(n+1)^2$ oraz jej prawą stronę przez $v = 4(n+1)/(n+2)$ (łatwo sprawdzić, że $u > v$), otrzymujemy nierówność wynikającą z danej przez zastąpienie liczby n liczbą $n+1$.

2.10. Te, które po uproszczeniu mają mianowniki postaci 2^k5^n, $k, n \in \mathcal{N}_0$. Są to ułamki: 7/4, 11/8, 79/80 i 1/1280.

2.11. **a)** 7/9 **b)** 11/45, **c)** 104/33, **d)** 556/495, **e)** 79/333, **f)** 133/9900.

2.12. **a)** 9, **b)** 25, **c)** 15, **d)** 1226, **e)** 7,375, **f)** 0,061224, **g)** -27, **h)** 6, **i)** 5, **j)** -19.

2.13. **a)** $17 = (18)_9 = (23)_7 = (32)_5 = (122)_3 = (10001)_2 = (10001)_{-2}$,
b) $55 = (61)_9 = (106)_7 = (210)_5 = (2001)_3 = (110111)_2 =$
$= (1001011)_{-2}$,
c) $81 = (100)_9 = (144)_7 = (311)_5 = (10000)_3 = (1010001)_2 =$
$= (1010001)_{-2}$, **d)** $1000 = (1331)_9 = (2626)_7 = (13000)_5 =$
$= (1101001)_3 = (1111101000)_2 = (10000111000)_{-2}$,
e) -25, $-(27)_9 = -(34)_7 = -(100)_5 = -(221)_3 = -(11001)_2 =$
$= (111011)_{-2}$, **f)** $0{,}1 = (0{,}0(80))_9 = (0{,}(0462))_7 = (0{,}0(2))_5 =$
$= (0{,}(0022))_3 = (0{,}0(0011))_2 = (0{,}(011))_{-2}$.

2.14. $\pi \approx 3{,}1416$, $\pi^2 < 3{,}15^2 = 9{,}9225 < 10$, więc $\pi < \sqrt{10}$. Podobnie udowadnia się pozostałe nierówności.

2.15. **a)** 6, **b)** 1/2, **c)** -115, **d)** 7/3, **e)** 1, **f)** $2(2+\sqrt{3})$, **g)** 1/4.

2.16. **a)** 0, **b)** 1.

2.17. **a)** Wskazówka: uprościć przez $\sqrt{x}$. Odpowiedź: $\sqrt{x^2-4x}$.
b) Wsk. podstawić $a = \sqrt{x}$, otrzymaną funkcję wymierną zmiennej a uprościć. Odp. $a^2-1 = x-1$.
c) Wsk. podstawić $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$. Odp. $\sqrt{xy}$.
d) $(x+y)/\sqrt{xy}$, **e)** Wsk. podstawić $a = \sqrt[4]{x}$, $b = \sqrt[4]{y}$. Odp. $-\sqrt[4]{x}$.

f) $x^2/(2x-1)$ **g)** Wsk. podstawić $a=\sqrt[4]{x}$. Odp. $-x$.
h) Wsk. podstawić $a=\sqrt[4]{x}$, $b=\sqrt[4]{25}$. Odp. $a+b=\sqrt[4]{x}+\sqrt{5}$.
i) 0. **j)** $4/(x+\sqrt{x}+1)$.

2.18. **a)** $x^2+xy+y^2=2{,}52$, **b)** $2\sqrt{x^2+y}=4$, **c)** Wsk. podstawić $a=\sqrt{1-x}$, $b=\sqrt{1+x}$. Odp. $(b-a)^2=2-2\sqrt{1-x^2}=0{,}8$.
d) Wsk. podstawić $a=\sqrt[4]{x}$, $b=\sqrt[4]{y}$. Odp. $a^2b^2+b^4=$ $=\sqrt{xy}+y=0{,}64$.

2.19. **a)** 3, **b)** 8, **c)** -1, **d)** 0 lub 4/3, **e)** -5 lub 0, **f)** -1 lub 9/16,
g) 3, **h)** 5, **i)** -1, **j)** 12/5 lub 4, **k)** Podstawiając $y^3=$ $=2x-1$, otrzymujemy równanie $x^3=2y-1$. Z różnicy tych równań wynika $y=x$ i stąd $x^3-2x+1=0$. Odp. $x=1$ lub $x=(-1\pm\sqrt{5})/2$. **l)** Podstawiając $y=\sqrt{x-1}$, otrzymujemy $|y-2|+|y-3|=1$, stąd $2\leqslant y\leqslant 3$, zatem $5\leqslant x\leqslant 10$. **m)** Aby wyrażenia podpierwiastkowe były nieujemne, musi być spełniony warunek $[(x\leqslant 2)\vee(x\geqslant 3)]\wedge(2\leqslant x\leqslant 5/2)$, czyli tylko 2 może być pierwiastkiem równania. Podstawiając w równaniu $x=2$, stwierdzamy, że 2 jest pierwiastkiem równania.

2.20. **a)** $20/9\leqslant x<4$ lub $x>5$, **b)** $x>5$, **c)** $0\leqslant x\leqslant 2$,
d) $x\leqslant -2$ lub $x>2$, **e)** $1/2\leqslant x<2$ lub $x>5$,
f) $-2-2\sqrt{6}\leqslant x<-1$ lub $-2+2\sqrt{6}\leqslant x\leqslant 3$, **g)** $x>1$,
h) $(16+\sqrt{7})/2\leqslant x\leqslant 10$, **i)** $-2<x\leqslant -1$ lub $-2/3\leqslant x<1/3$.

2.21. **a)** 4/3, **b)** $-9/2$ lub 13/4, **c)** $x\geqslant 2$, **d)** -1 lub 3, **e)** 0 lub 1,
f) -2 lub 1, **g)** 3 lub 6, **h)** -1 lub 0 lub 2, **i)** $\sqrt{2}/2$ lub $(1+\sqrt{3})/2$, **j)** $x=-12$ lub $0\leqslant x\leqslant 6$, **k)** $x\geqslant 1$.

2.22. **a)** $2<x<3$, **b)** $5/3<x<3$, **c)** $-3<x<-2$ lub $2<x<3$, **d)** $x\geqslant 9/2$, **e)** $1<x<3$, **f)** $1<x<3$,
g) $-7\leqslant x\leqslant 3$, **h)** $0<x<2$, **i)** $x<-5$ lub $-1<x<1$ lub $x>1$, **j)** $-11/9<x<17$.

2.23. **a)** Dowód przez rozważenie przypadków. Niech $L=|x+y|$, $P=|x|+|y|$. Jeśli $x=0$ lub $y=0$, to $L=P$. Jeśli x i y mają ten sam znak, to $L=P$. Jeśli x i y mają różne znaki, to $L<P$. Wykazaliśmy, że $L\leqslant P$. **b)** , **c)** — dowody podobne.

2.24. **a)** 2, **b)** 5; **c)** , **d)** — zbiory nieskończone, **e)** 0, **f)** 2.

2.25. **a)**, **c)**, **g)** — zbiory nieskończone; **b)**, **d)**, **e)**, **f)** -- zbiory skończone.

2.26. $E\subset A\subset G\subset D\subset C\subset F$, $E\subset B\subset G$.

2.27. Uwaga. Do podzbiorów zbioru B należą także zbiór B oraz zbiór pusty $\emptyset$. **a)** $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$, $\{a,b,c\}$; $8=2^3$.
b) Zbiór U można rozdzielić na T i $\{d\}$. Podzbiorami zbioru U są podzbiory zbioru T (jest ich 2^3) oraz zbiory otrzymane z podzbiorów zbioru T przez dołączenie do każdego z nich elementu d (jest ich też 2^3). Zbiór U ma $2^3+2^3=2^4$ podzbiorów. **c)** 2^n.

2.28. **a)** $\{a,b,c,d,e,f,g\}$, **b)** $\{d\}$, **c)** $\{b,c,e\}$, **d)** $\{f\}$, **e)** $\{c,e\}$,
f) $\emptyset$.

2.29. **a)** Niech L oznacza lewą, a P — prawą stronę równości. Należy wykazać, że jeśli $x\in L$, to $x\in P$ i na odwrót. Niech $x\in L$. Wtedy $x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)$. Korzystając z zad. 1.4e), otrzymujemy $(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$, stąd $x\in[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$, zatem $x\in P$. Podobnie wykazujemy, że jeśli $x\in P$, to $x\in L$. Zatem $L=P$. **b)**, **c)**, **d)**, **e)** — dowody podobne.

2.30. **a)** $A=B\neq\emptyset$, **b)** Zbiory A, B rozłączne i niepuste.

2.31. **a)** Jeśli $A=A\cap B$, to $x\in A\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B$, zatem (zob. zad. 1.4 m) $x\in A\Rightarrow x\in B$, czyli $A\subset B$. **b)**, **c)**, **d)**, **e)**, **f)** — dowody podobne.

2.32. $\{(a,f),(a,g),(b,f),(b,g)\}$; $\{(a,f,p),(a,g,p),(b,f,p),$ $(b,g,p),(a,f,r),(a,g,r),(b,f,r),(b,g,r)\}$, $\{(f,a),(g,a),(f,b),$ $(g,b)\}$, $\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$, $\{(a,a,a),(a,b,a),(b,a,a),$ $(b,b,a),(a,a,b),(a,b,b),(b,a,b),(b,b,b)\}$.

2.33. Z równości $X\times Y=Y\times X$ wynika, że dowolna para (x,y) należąca do $X\times Y$, a więc taka że $x\in X$, $y\in Y$, musi należeć też do $Y\times X$, a więc musi być $x\in Y$ oraz $y\in X$. Stąd $X\subset Y$ oraz $Y\subset X$, zatem $X=Y$.

2.34. **a)** $(1;4)$, **b)** $\langle 2;5\rangle$, **c)** $\emptyset$, **d)** $\langle 3;4)$, **e)** $\langle 3;5\rangle$, **f)** $(1;2)$,
g) $\langle 2;4)$, **h)** $\langle 2;3)$, **i)** $\langle 4;5\rangle$, **j)** $\{2\}$, **k)** $\langle 4;\infty)$, **l)** $\emptyset$,
m) $(2;3)\cup(5;\infty)$.

2.35. Kolejność odpowiedzi: min, inf, sup, max. Znakiem $\sim$ oznaczono nieistnienie danej liczby.

a) $\sqrt[3]{30}$, $\sqrt[3]{30}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$; **b)** $\sim, 0, 1, 1$; **c)** $-1, -1, 1, 1$; **d)** $\sim, -1, 1, \sim$; **e)** $\sim, 0, \sim, \sim$; **f)** $\sim, \sim, \sim, \sim$; **g)** $\sim, a, b, \sim$; **h)** a, a, b, b; **i)** $\sim, a, \sim, \sim$; **j)** $a, a, \sim, \sim$; **k)** $\sim, \sim, b, \sim$; **l)** $\sim, \sim, b, b$.

2.36. Zbiory **a)**, **b)**, **c)**, **d)**, **g)**, **h)** są ograniczone.

2.37. Niech $Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_n$ i niech b_j będzie górnym ograniczeniem zbioru Z_j dla $j = 1, \ldots, n$. Liczba $b = \max(b_1, \ldots, b_n)$ jest ograniczeniem górnym każdego zbioru Z_j, a więc też zbioru Z. Stąd wynika, że zbiór Z jest ograniczony od góry. Podobnie dowodzimy, że zbiór Z jest ograniczony od dołu. Zatem zbiór Z jest ograniczony. Suma nieskończenie wielu przedziałów $\langle n; n+1\rangle$, $n \in \mathscr{N}$, z których każdy jest zbiorem ograniczonym, jest przedziałem $\langle 1; \infty)$, który jest zbiorem nieograniczonym.

2.38. **a)** Prostokąt z brzegiem, **b)** kwadrat bez brzegu, **c)** dwa odcinki równoległe, **d)** ciąg punktów, **e)** prosta, **f)** półpłaszczyzna wraz z krawędzią, **g)** płaszczyzna.

2.39. **a)**, **b)** $\langle 0; 1\rangle$, **c)** $\langle 0; \infty)$, **d)** N_0, **e)**, **f)** $\langle -1; 1\rangle$, **g)**, **h)** $\mathscr{Z}$.

2.40. **a)** $\{0, 1\}$, **b)** $\langle 1; 9\rangle$, **c)** $\langle 0; 16\rangle$, **d)** $\mathscr{Z}$, **e)** $\mathscr{Z}$, **f)** $\langle -3; -1\rangle \cup \langle 1; 3\rangle$.

2.41. **a)** $\langle 0; 1\rangle$, **b)** $(0; 1\rangle$, **c)** $\langle -1; 1\rangle$, **d)** $\{0\}$, **e)** $\{x: x = k\pi, k \in \mathscr{Z}\}$, **f)** $\{x: |x - k\pi| < \pi/6, k \in \mathscr{Z}\}$, **g)** $\mathscr{R}$, **h)** $\emptyset$.

2.42. Dowody — jak w zadaniu 2.29. Przykłady: **a)** $f(x) = |x|$, $A = \langle 0, \infty)$, $B = (-\infty; \infty)$; **c)** , **d)** $f(x) = |x|$, $A_1 = (-\infty, 0)$, $A_2 = (0, \infty)$.

2.43. **a)** $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; **b)** $x \neq 0$; $y \neq 0$; **c)** $x \in \mathscr{R}$, $y > 0$; **d)** $x > 0$, $y \in \mathscr{R}$; **e)** $x > 1$, $y \in \mathscr{R}$; **f)** $x > 10$, $y \in \mathscr{R}$.

2.44. **a)** Dziedzina: $x \neq 0$, przeciwdziedzina: $y \neq 0$. Dowód różnowartościowości: niech $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $y_1 = 1/x_1$, $y_2 = 1/x_2$, wtedy $y_2 - y_1 = (x_1 - x_2)/(x_1 x_2)$ i jeśli $x_1 \neq x_2$, to $y_1 \neq y_2$. Wyznaczenie funkcji odwrotnej: rozwiązując równanie $y = 1/x$ względem x,

otrzymujemy $x = 1/y$. Odpowiedź formułujemy wg wzoru (2): $x = 1/y \Leftrightarrow y = 1/x$ dla $y \neq 0$. Funkcje **b)** — **f)** są różnowartościowe, gdyż są rosnące.

b) $x = y/5 - 2 \Leftrightarrow y = 5x + 10$ dla $y \in \mathscr{R}$,

c) $x = \lg y \Leftrightarrow y = 10^x$ dla $y > 0$,

d) $x = \sqrt[3]{y} \Leftrightarrow y = x^3$ dla $y \in \mathscr{R}$,

e) $x = 10^{(10^y)} \Leftrightarrow y = \lg\lg x$ dla $y > 1$,

f) $x = y - 2\sqrt{y} + 1 \Leftrightarrow y = x + 2\sqrt{x} + 1$ dla $y \geqslant 1$.

2.45. Odpowiedzi formułujemy według wzoru (3)

a) $x = \sqrt{y} \Leftrightarrow (y = x^2, x \geqslant 0)$ dla $y \geqslant 0$,

b) $x = 1/\sqrt{y} \Leftrightarrow (y = 1/x^2, x \geqslant 0)$ dla $y \geqslant 0$,

c) $x = \arcsin y \Leftrightarrow (y = \sin x, |x| \leqslant \pi/2)$ dla $|y| \leqslant 1$,

d) $x = \operatorname{arctg} y \Leftrightarrow (y = \operatorname{tg} x, |x| < \pi/2)$ dla $y \in \mathscr{R}$,

e) $x = \sqrt{1/y - 1} \Leftrightarrow (y = 1/(1 + x^2), x \geqslant 0)$ dla $0 < y \leqslant 1$,

f) $x = 2 + \sqrt{y + 1} \Leftrightarrow (y = x^2 - 4x + 3,\ x \geqslant 2)$ dla $y \geqslant -1$.

2.46. Równanie $y = (x^2 - 1)^2$, $x \in \mathscr{R}$, $y \geqslant 0$, rozwiązujemy względem x

$$x^2 - 1 = \begin{cases} +\sqrt{y} & \text{dla } x^2 \geqslant 1,\ y \geqslant 0 \\ -\sqrt{y} & \text{dla } x^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

$$x^2 = \begin{cases} 1 + \sqrt{y} & \text{dla } x^2 \geqslant 1,\ y \geqslant 0 \\ 1 - \sqrt{y} & \text{dla } x^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} +\sqrt{1 + \sqrt{y}} & \text{dla } x^2 \geqslant 1,\ y \geqslant 0,\ x \geqslant 0, \text{ tj. dla } x \geqslant 1,\ y \geqslant 0 \\ -\sqrt{1 + \sqrt{y}} & \text{dla } x^2 \geqslant 1,\ y \geqslant 0,\ x \leqslant 0, \text{ tj. dla } x \leqslant -1,\ y \geqslant 0 \\ +\sqrt{1 - \sqrt{y}} & \text{dla } x^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x \geqslant 0, \text{ tj. dla } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ -\sqrt{1 - \sqrt{y}} & \text{dla } x^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x \leqslant 0, \text{ tj. dla } -1 \leqslant x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

2.47. **a)** $2x^2 - 1$, **b)** $(2x - 1)^2$, **c)** $2\sin x - 1$, **d)** $\sin(2x - 1)$, **e)** $\sin^2 x$, **f)** $\sin(x^2)$, **g)** $2(2x - 1) - 1$, **h)** $(x^2)^2$, **i)** $\sin(\sin x)$, **j)** $2\sin^2 x - 1$, **k)** $2\sin(x^2) - 1$, **l)** $\sin(2x^2 - 1)$.

2.48. **a)** $\sum_{k=1}^{10} k^r$, **b)** $\sum_{k=1}^{10} k^{k-1}$, **c)** $\sum_{k=1}^{99} k(k+1)$, **d)** $\sum_{k=0}^{5} x^k$,

e) $\sum_{k=5}^{10} kx^{k-5} = \sum_{j=0}^{5} (j+5)x^j$, f) $\sum_{k=0}^{n} (k+5)x^k$, g) $\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k$,

h) $\prod_{k=1}^{n} (x+k)$, i) $\prod_{k=1}^{100} k$, j) $\prod_{k=0}^{50} (2k+1) = \prod_{i=1}^{51} (2i-1)$,

k) $\prod_{k=0}^{4} (10^k+k)$.

2.49. 2.2**a)** $\sum_{k=1}^{n} k^2$, **b)** $\sum_{k=1}^{n} k^3$, **c)** $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$, **d)** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$;

2.3.**a)** $\sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k}$; 2.4.**a)** $\sum_{k=1}^{n} (4k-3)^2$, **b)** $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2$,

c) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$; 2.7.**a)** $\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x$,

b) $\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x$.

2.50. **a)** $A = 7$, $G = 2\sqrt{10} \approx 6{,}3$, $H = 40/7 \approx 5{,}7$, $K = \sqrt{58} \approx 7{,}6$;
b) $A \approx 20{,}8$, $G = 12\sqrt[3]{5} \approx 20{,}5$, $H = 12960/641 \approx 20{,}2$,
$K = \sqrt{2685/6} \approx 21{,}154 \approx 21{,}2$.

2.51. 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800

2.52. 8, 15, 384, 10395. **2.53.** $(n-1)!!$.

2.54. **a)** 1, 4, 6, 4, 1, 0; **b)** 1, 5, 10, 10, 5, 1;
c) 1, -3, 6, -10, 15, -21; **d)** 1, 0,6, $-0{,}12$, 0,056; $-0{,}0336$, 0,022848.

2.55. 37401, 3391024, 37401, 3391024, 3428425.

2.56. **a)** $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$,
b) $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$,
c) $1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$,
d) $1-6x+15x^2-20x^3+15x^4-6x^5+x^6$,
e) $1+4\sqrt{x}+6x+4x\sqrt{x}+x^2$, **f)** $1-4x+6x^2-4x^3+x^4$.

2.57. $\binom{19}{3}(x^3)^{16}(-2x^{-2})^3 = -7752x^{42}$. **2.58.** $n = 19$. **2.59.** $3360x^2$.

2.60. $n = 7$.

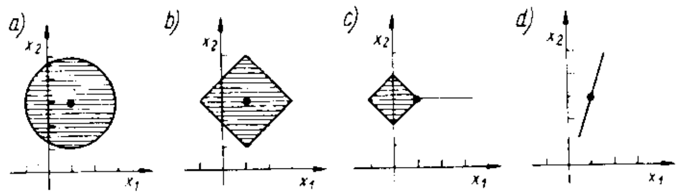
2.61. Po uproszczeniu mamy $(x^{1/3}-x^{-1/2})^{10}$. Wyraz nie zależy od x, jeśli $\frac{1}{3}(10-k)-\frac{1}{2}k = 0$. Stąd $k = 4$. Wyrazem tym jest $\binom{10}{4} = 210$.

2.62.

$\varrho(p,q) = 3$	$\varrho(q,r) = 4$	$\varrho(p,r) = 5$
$\lambda(p,q) = 3$	$\lambda(q,r) = 4$	$\lambda(p,r) = 7$
$\sigma(p,q) = 11$	$\sigma(q,r) = 4$	$\sigma(p,r) = 15$
$\varphi(p,q) = 5+\sqrt{52}$	$\varphi(q,r) = \sqrt{52}+10$	$\varphi(p,r) = 5$
$\zeta(p,q) = 1$	$\zeta(q,r) = 1$	$\zeta(p,r) = 1$

2.63. dia $T = 2$, dia $U = 1$, dist$(T,U) = 0$

2.64.



Rys. 2.64

2.65. Oba zbiory są czteroelementowe.

2.66. Wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru $\mathcal{N}$ na dany zbiór wyraża się wzorem:

a) $f(n) = 2n-1, n \in \mathcal{N}$; **b)** $f(n) = \begin{cases} (n+1)/2, n \in \mathcal{N}, n \text{ nieparzyste} \\ 1-n/2, n \in \mathcal{N}, n \text{ parzyste} \end{cases}$

c) Zbiór liczb wymiernych zawartych w przedziale (0; 1) można ustawić w ciąg, w którym każdy element tego zbioru występuje dokładnie 1 raz. Takim ciągiem jest ciąg

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \ldots$

Ciąg ten stanowi wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru $\mathcal{N}$ na dany zbiór.

2.67. Wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie przedziału $(0; 1)$ na dany przedział wyraża się wzorem: **a)** $f(x) = 2x, 0 < x < 1$; **b)** $f(x) = (b-a)x+a, 0 < x < 1$; **c)** $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x, 0 < x < 1$.

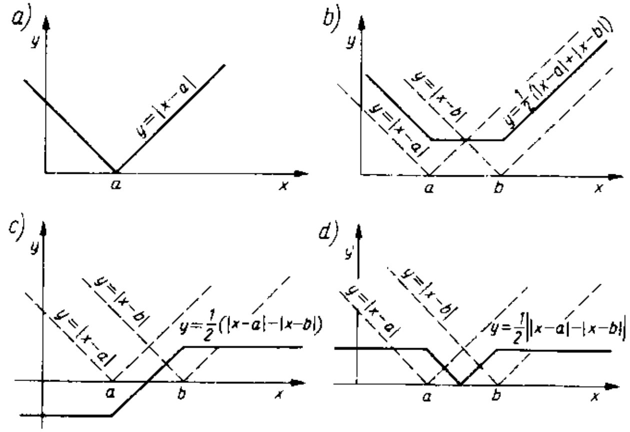
Odpowiedzi do rozdziału 3

3.1. Zob. *Zarys*, s. 67.

3.2. **a)** $y = -2x+10$, **b)** $y = -bx/a+b$, **c)** $y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x + \frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1}$.

3.3. $y = x+5$ dla $-5 \leqslant x \leqslant -3$, $y = (x+7)/2$ dla $-3 \leqslant x \leqslant -1$, $y = 3$ dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y = (-x+7)/2$ dla $1 \leqslant x \leqslant 3$, $y = -x+5$ dla $3 \leqslant x \leqslant 5$.

3.4.



Rys. 3.4

3.5. **a)** $1 < x < 5$, **b)** $x > 1/2$, **c)** $x \leqslant -3$ lub $x = 1$ lub $x \geqslant 5$.

3.6. **a)** Dla $p = 2$ nie ma rozwiązań. Dla $p \neq 2$ jest jedno rozwiązanie $x = (p+3)/(2-p)$.
b) Dla $p = 3$ jest nieskończenie wiele rozwiązań: x — dowolne; dla $p \neq 3$ jest jedno rozwiązanie $x = p+3$.

3.7. **a)** Dla $p = 3$ nie ma rozwiązań. Dla $p \neq 3$ jest jedno rozwiązanie $x = (5p+1)/(p-3)$.

b) Dla $p = 0$ i dla $p^2 = 2$ nie ma rozwiązań. Dla pozostałych p jest jedno rozwiązanie $x = (p+1)/[p(p^2-2)]$.

3.8. **a)** $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$ **b)** $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

3.9. **a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.10. **a)** Układ oznaczony $x = y = z = 1$. **b)** Układ sprzeczny. **c)** Układ nieoznaczony; rozwiązanie ogólne, zależne od 1 parametru, może być przedstawione w postaci $x = 2+2u$, $y = (4-u)/5$, $z = (11+16u)/5$, $u \in \mathscr{R}$, ale także w innej postaci, np. $x = 10-10y$, $z = 15-16y$, $u = 4-5y$, $y \in \mathscr{R}$. **d)** Układ sprzeczny. **e)** Układ oznaczony, $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, $u = 0$. **f), g)** Układy sprzeczne. **h)** Układ oznaczony, $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$. **i)** Układ nieoznaczony, $y = (x-2)/3$, $z = (1-2x)/3$, $x \in \mathscr{R}$.

3.11. **a)** 41, **b)** -14, **c)** -1, **d)** $\sin(x-y)$, **e)** $(x-a)^2$, **f)** -2.

3.12. **a)** 25, **b)** -113, **c)** 23, **d)** $16y-12z$, **e)** 1, **f)** yu.

3.13. **a)** 0, **b)** 0, **c)** $ab(cf-ed)$, **d)** $-abcd$, **e)** -4, **f)** 68, **g)** 120, **h)** 36, **i)** -60, **j)** 88, **k)** -195.

3.14. **a)** 48, **b)** 12, **c)** -10, **d)** 394, **e)** 120, **f)** 8, **g)** 24.

3.15. **a)** ab, $-ab$; **b)** abc, $-abc$; **c)** $abcd$, $abcd$; **d)** $abcde$, $abcde$; **e)** $a_1a_2a_3 \dots a_n$, $a_1a_2a_3 \dots a_n(-1)^k$, $k = n(n-1)/2$.

3.16. **a)** z^2, **b)** 0, **c)** $x^2y^2+v^2z^2+u^2w^2-2(xyzv-uvwz+uwxy)$.
d) Wyznacznik antysymetryczny A stopnia nieparzystego n jest równy 0. Dowód. Mnożąc każdą kolumnę wyznacznika A przez -1, otrzymujemy wyznacznik, który: 1° jest równy $(-1)^n A$, 2° jest transponowany względem A, więc równy A. Stąd $A = 0$.

3.17. **a)** $y-x$, **b)** $(z-y)(z-x)(y-x)$,
c) $(w-z)(w-y)(w-x)(z-y)(z-x)(y-x)$, **d)** $\prod\limits_{1\leq j<k\leq n}(z_k-z_j)$.

3.18. **a)** $(-1)^{n+1}$, **b)** $-2(n-2)!$, **c)** $n!$ **d)** 1.

3.19. **a)** $(a_1a_2-b_1b_2)a_3a_4\ldots a_n$, **b)** $x^n+(-1)^{n-1}y^n$, **c)** 0.

3.20. **a)** $x=3$, $y=5$; **b)** układ sprzeczny; **c)** $x=y=z=1$; **d)** $x=1$, $y=0$, $z=-3$; **e)** $x=(-3z+2)/7$, $y=(5z-1)/7$; **f)** $x=1+z$, $y=4-3z$; **g)** $x=3$, $y=0$, $z=-5$, $u=11$; **h)** , **i)** układy sprzeczne; **j)** $x=y=z=0$, $u=v=1$.

3.21. **a)** Dla $a^2\neq 1$ otrzymujemy $x=\dfrac{1+a+a^2}{(1+a)(1+a^2)}$,

$y=\dfrac{1}{(1+a)(1+a^2)}$;

dla $a=1$ układ nieoznaczony, $x=1-y$, $y\in\mathcal{R}$;
dla $a=-1$ układ sprzeczny.

b) $x=\dfrac{-6a^2+a-3}{3(a^2+1)}$, $y=\dfrac{3a-1}{a^2+1}$, $z=\dfrac{3a^2+a+6}{3(a^2+1)}$.

c) Dla $a\neq -1$ otrzymujemy $x=\dfrac{1-a}{(a+1)(a^2+1)}$, $y=\dfrac{a}{a^2+1}$,

$z=\dfrac{2a}{(a+1)(a^2+1)}$; dla $a=-1$ układ sprzeczny.

d) Dla $-2\neq a\neq 1$ otrzymujemy $x=\dfrac{-a-1}{a+2}$, $y=\dfrac{1}{a+2}$,

$z=\dfrac{(a+1)^2}{a+2}$; dla $a=1$ układ nieoznaczony, $x=1-y-z$, y, z dowolne; dla $a=-2$ układ sprzeczny.

e) Dla $0\neq a^2\neq 1$ otrzymujemy $x=\dfrac{3a^2+4}{a(a^2-1)}$, $y=\dfrac{2a^2-7a-2}{a(a^2-1)}$,
$z=2/a=-u$; dla $a=0$ oraz dla $a=-1$ układ sprzeczny; dla $a=1$ układ nieoznaczony, $y=3/2-x$, $z=5/6$, $u=1/3$, x dowolne.

f) Dla $a\neq\pi/4+k\pi/2$ otrzymujemy $x=\dfrac{\sin a-1}{\cos 2a}$, $y=\dfrac{1+\cos a}{\cos 2a}$,

$z=-1-\dfrac{\cos a+\sin a}{\cos 2a}$; dla $a=\pi/4+k\pi/2$ układ sprzeczny.

3.22. **a)** Dla $a^2\neq b^2$ układ oznaczony, $x=y=1/(a+b)$; dla $a=-b$ układ sprzeczny; dla $a=b=0$ układ sprzeczny; dla $a=b\neq 0$ układ nieoznaczony, $y=1/a-x$, x dowolne.

b) Dla $a\neq 0$, $b\neq\dfrac{1}{a}$ układ oznaczony, $x=\dfrac{-1}{a(ab-1)}$,

$y=\dfrac{a}{ab-1}$; w pozostałych przypadkach układ jest sprzeczny.

c) Dla $-2\neq a\neq 1$, $b\neq 0$ układ oznaczony, $x=z=\dfrac{a-b}{(a-1)(a+2)}$,

$y=\dfrac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}$; dla $a=1$, $b\neq 1$ układ sprzeczny; dla $a=b=1$ układ nieoznaczony, $x=1-y-z$, y, z dowolne; dla $a=-2$, $b\neq -2$ układ sprzeczny; dla $a=-2$, $b=-2$ układ nieoznaczony, $x=z=-2y-1$, y dowolne; dla $b=0$ układ sprzeczny.

3.23. **a)** $x_1=x_3=\ldots=x_n=0$, $x_2=1/2$.
b) $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0$, $x_n=1/n$.

3.24. **a)** 2, **b)** 1, **c)** 1, **d)** 0, **e)** 2, **f)** 2, **g)** 1, **h)** 2, **i)** 3, **j)** 2, **k)** 3, **l)** 3, **m)** 3, **n)** 2, **o)** 4, **p)** 3.

3.25. **a)** Układ sprzeczny. **b)** Układ nieoznaczony, 1 parametr, $x=z+2/3$, $y=3z+1/3$, $z\in\mathcal{R}$. **c)** Układ oznaczony, $x=2$, $y=3$, $z=-1$. **d)** Układ sprzeczny. **e)** Układ oznaczony $x=5/3$, $y=0$, $z=2$, $u=-4/3$. **f)** Układ sprzeczny. **g)** Układ nieoznaczony, 2 parametry, $x=(-13z+3u)/17$, $y=(-20z+19u)/17$, $z\in\mathcal{R}$, $u\in\mathcal{R}$. **h)** Układ oznaczony, $x=1$, $y=3$, $z=2$. **i)** Układ nieoznaczony, 2 parametry, $x=10z-15u+6$, $y=-12z+18u-7$, $z\in\mathcal{R}$, $u\in\mathcal{R}$. **j)** Układ sprzeczny.

3.26. **a)** $a=5$, **b)** $a\neq 2$, **c)** $a=0$, **d)** $a\neq 2$.

3.27. **a)** $x=y=z=0$; **b)** $x=7y$, $z=5y$; **c)** $x=-7z$, $y=2z$, $u=5z$; **d)** $x=y=z=u=0$; **e)** $x=-z-5u$, $y=-3u$; **f)** $x=y=z=u=0$.

3.28. **a)** $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z}{7}$, **b)** $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}$, **c)** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{36}=\dfrac{z}{17}=\dfrac{u}{11}$,
d) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{1}=\dfrac{u}{0}$.

Odpowiedzi do rozdziału 4

4.1. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = 2h\cos\varphi/2$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = 2h\sin\varphi/2$.

4.2. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$.

4.3. **a)** $\overrightarrow{OA} = 3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$, **b)** $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$.

4.4. $\overrightarrow{AS} = \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$, $\overrightarrow{AC} = 2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$, $\overrightarrow{AD} = 2(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})$, $\overrightarrow{AE} = \boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$.

4.5. **a)** $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$, **b)** $u = v$, **c)** $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$, **d)** $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$, $u = v$.

4.6. **a)** W trójkącie ABC środki boków CA i CB oznaczamy G i H. Mamy $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Stąd $\overrightarrow{GH} \parallel \overrightarrow{AB}$, $GH = \frac{1}{2}AB$.

b) W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i DC środki ramion AD i BC oznaczamy G i H. Mamy $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})] = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$. Ponieważ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$, więc $\overrightarrow{GH} \parallel \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$, a ponieważ $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ są zgodnie skierowane, więc $GH = \frac{1}{2}(AB+DC)$.

c) W czworokącie $ABCD$ środki boków AB, BC, CD, DA oznaczamy E, F, G, H. Mamy $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ oraz $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{CG}-\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, zatem $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$. Stąd wynika, że $EH \parallel FG$ oraz $EH = FG$, zatem $EFGH$ jest równoległobokiem.

d) Środki boków AB, BC, CA oznaczamy E, F, G. Mamy $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, zatem $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. Stosując cykliczną zamianę liter: A na B, B na C, C na A, otrzymujemy

$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$ oraz $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$ i stąd $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP} = \boldsymbol{0}$.

4.7. **a), d), e), f)** — kolinearne; **g), h), j), l)** — komplanarne.

4.8. **a)** $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AP}$, **b)** $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AS})$,
c) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SR}-\overrightarrow{RQ}$.

4.9. $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$.

4.10. $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$.

4.11. $\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\varphi}$, $\sqrt{a^2u^2+b^2v^2-2abuv\cos\varphi}$.

4.12. 10.

4.13. **a)** $\text{wsp}_{AR}\overrightarrow{AQ} = 34/\sqrt{38}$, **b)** $4/\sqrt{38}$, **c)** $-4/\sqrt{38}$, **d)** $13/\sqrt{38}$, **e)** $-18/\sqrt{38}$, **f)** $30/\sqrt{38}$, **g)** $56/\sqrt{38}$, **h)** $88/\sqrt{38}$.

4.14. **a)** $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, **b)** $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.

4.15. **a)** $-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$, **b)** $-\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AR}$, **c)** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AQ}$,
d) $29\boldsymbol{c}-38\boldsymbol{r}+34\boldsymbol{q}$.

4.16. Oznaczmy $AB = c$, $AP = x$. Jeśli P i B leżą po tej samej stronie punktu A, to $\overrightarrow{AP} = \frac{x}{c}\overrightarrow{AB} = \frac{x}{c}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$. Zatem $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA}+\frac{x}{c}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}) = \left(1-\frac{x}{c}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{x}{c}\overrightarrow{OB}$. Jeśli P i B leżą po różnych stronach punktu A, to $\overrightarrow{AP} = -\frac{x}{c}\overrightarrow{AB}$ i postępując analogicznie, otrzymujemy $\overrightarrow{OP} = \left(1+\frac{x}{c}\right)\overrightarrow{OA}-\frac{x}{c}\overrightarrow{OB}$.

4.17. **a)** 3, **b)** 0, **c)** 10, **d)** -10, **e)** -5.

4.18. **a)** 45°, **b)** 120°, **c)** 0°, **d)** 180°, **e)** 90°.

4.19. **a)** 26, **b)** 2, **c)** 9, **d)** 4, **e)** 3, **f)** -3, **g)** 1, **h)** -3.

4.20. **a)** 1, **b)** 13, **c)** -11, **d)** 143.

4.21. 60°. **4.22.** 15, 2/15, 2/3, 11/15. **4.23.** $\boldsymbol{pw} = 0$.

4.24. $\sqrt{50}$, $\sqrt{10}$.

4.25. $AB = 2a$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$. **Stąd** $\overrightarrow{AF}\,\overrightarrow{AG} = 17a^2/8$. Nadto $AF = a\sqrt{13}/2$, $AG = a\sqrt{7}/2$, **zatem** $\cos\{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\} = 17/(2\sqrt{91})$.

4.26. Oznaczmy podstawę $AB = c$, ramiona $AC = CB = a$, ich środki F i G, kąt między ramionami $\gamma = \{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\}$. Wówczas $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$, $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}) = 0$. Stąd $\cos\gamma = 2c^2/a^2$. Nadto $\sin\gamma/2 = c/(2a)$. Stąd $(c/a)^2 = 2/5$, zatem $\cos\gamma = 4/5$.

4.27. **a)** 12, **b)** $\sqrt{3}$. **4.28.** ± 13. **4.29.** **a)** 0, **b)** 0, **c)** $-\boldsymbol{v}$, **d)** 1.

4.30. **a)** $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$, **b)** $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$, **c)** $2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$, **d)** $5\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$, **e)** 0.

4.31. 70. **4.32.** **a)** 11, $11/\sqrt{10}$, $11\sqrt{29}$; **b)** 3, $6\sqrt{5}$, 2, $3/\sqrt{2}$.

4.33. 24. **4.34.** **a)** 3, **b)** Objętość 1, wysokość 1.

4.35.–4.37. Skorzystać z własności iloczynów wektorów (*Zarys*, § 24).

4.38. $[-1\ \ -2,\ \ 1]$, $[2,\ \ -6,\ \ -3]$, $[3,\ \ -4,\ \ -4]$, $[1,\ \ 2,\ \ -1]$, $[-2,\ \ 6,\ \ 3]$, $[-3,\ \ 4,\ \ 4]$.

4.39. **a)** $(4,\ 3,\ -1)$, **b)** $(1,\ 0,\ 3)$, **c)** $(0,\ 0,\ 0)$.

4.40. **a)** $(-2,\ 7,\ 1)$, **b)** $(-3,\ 6,\ -4)$, **c)** $(0,\ 0,\ 0)$.

4.41. **a)** $[-2,\ 3,\ 5]$, $[2,\ 6,\ 7]$, $[-2,\ 3,\ 3]$, $[2,\ 6,\ 8]$, $[9,\ 0,\ -3]$, $[-1,\ -3,\ 1]$, $[0,\ 0,\ 0]$; **b)** 26, 1, 22, -18, 10, 0, 1, 19, -16, 14; **c)** $\sqrt{26}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt{14}$; **d)** $1/\sqrt{26}$, $3/\sqrt{26}$, $4/\sqrt{26}$; $-3/\sqrt{10}$, 0, $1/\sqrt{10}$; $1/\sqrt{19}$, $3/\sqrt{19}$, $3/\sqrt{19}$; $-1/\sqrt{14}$, $-3/\sqrt{14}$, $-2/\sqrt{14}$; **e)** $1/\sqrt{260}$, $22/\sqrt{494}$, $-9/\sqrt{91}$, 0, $1/\sqrt{140}$, $16/\sqrt{266}$; **f)** $[3,\ -13,\ 9]$, $[-3,\ 1,\ 0]$, $[6,\ -2,\ 0]$, $[-3,\ 10,\ -9]$, $[3,\ -7,\ 9]$, $[3,\ -1,\ 0]$; **g)** -9, 18, 0, -9.

4.42. $V = \frac{1}{6}|m|$,

$$m = [\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}] = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

4.43. 60° lub 120°. **4.44.** Tak. **4.45.** $2/\sqrt{5}$, $1/\sqrt{5}$, 0 lub $-2/\sqrt{5}$, $-1/\sqrt{5}$, 0. **4.46.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$. **4.47.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$.

4.48. **a)** $m = 2$, **b)** $m = 0$ lub $m = \pm\sqrt{3}$.

4.49. **a)** Nie, **b)** tak, $\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{u}$; **c)** nie; **d)** tak, $\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{v}$.

4.50. **a)** Tak, $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}$; **b)** nie; **c)** tak, $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}$; **d)** nie.

4.51. **a)** $\boldsymbol{e} = 5\boldsymbol{f}+2\boldsymbol{g}+2\boldsymbol{h}$, **b)** $\boldsymbol{p} = -6\boldsymbol{r}+7\boldsymbol{s}$, **c)** $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} = -2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$.

4.52. $AB = BC = \sqrt{14}$. **4.53.** $S = (3, 2, 3)$, $OS = \sqrt{22}$.

4.54. $(-4/9, 0, 0)$. **4.55.** $(2, 0, -4)$. **4.56.** $(2, -2, 3)$.

4.57. $x = y = z = (3\pm\sqrt{3})/2$. **4.58.** $D = (0, 4, -5)$, $\cos\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\} = 31/\sqrt{2233} = 0{,}6560$, $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\} \approx 49^\circ$.

4.59. $C = (-2, -4, 5)$, $D = (-3, 0, 2)$, pole $= 30$.

4.60. Pole $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}| = \sqrt{27/2}$, $BC = \sqrt{5}$, $h = \sqrt{54/5}$, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}/2 = [7/2, 1, 0]$, $AK = \sqrt{53}/2$.

4.61. Skorzystać z twierdzenia sinusów; pole $= 8{,}91\pi$.

4.62. Objętość $= 2$, pole $= 2(1+\sqrt{5}+\sqrt{21})$.

4.63. Objętość $= 2$, $h_A = \sqrt{1{,}5}$, $h_B = 4/\sqrt{13}$, $h_C = 4\sqrt{3/23}$, $h_D = 2$.

4.64. $y = 14$ lub $y = -16$. **4.65.** $\pi 11\sqrt{11/6}$.

4.66. **a)** $(2/5, 16/5, -3/5)$, **b)** $(7/5, 0, 1)$, **c)** $(6/7, 4/7, 2)$.

4.67. **a)** $[1, 3]$, **b)** $[-4, 8]$, **c)** $[-25, 25]$, **d)** $[-7, 19]$, **e)** $[6, -2]$, **f)** $[17, -9]$.

4.68. **a)** $(5, 3)$, **b)** $(3, -5)$, **c)** $(0, 0)$.

4.69. **a)** $(1, 5)$, **b)** $(6, 1)$, **c)** $(0, 0)$.

4.70. **a)** $13/\sqrt{170}$, **b)** $1/\sqrt{5}$, **c)** $-3/\sqrt{10}$, **d)** 0.

4.71. **a)** $41/\sqrt{34}$, **b)** $-13/\sqrt{5}$, **c)** 3, **d)** 0.

4.72. $P = (-6, 5)$ lub $P = (0, 5)$.

4.73. $y = 1+2\sqrt{2}$ lub $y = 1-2\sqrt{2}$. **4.74.** $x = 12$.

4.75. $B = (4, 3)$, $D = (-1, 4)$. **4.76.** $S = (1, 1)$, $r = \sqrt{29}$.

4.77. Można; okrąg o środku $S = (1, 2)$ i promieniu $r = 5$.

4.78. $S=(10,-3)$, $r=10$.

4.79. Pole $=7$; wysokości: $h_A=14/\sqrt{29}$, $h_B=7/\sqrt{2}$, $h_C=14/5$.

4.80. $A=(1,3)$, $B=(5,1)$, $C=(7,9)$.

4.81. $B=(1,12)$, pole $=2$, $\cos\varphi=33/\sqrt{1105}$.

4.82. Pole $=20$, $A=(2,1)$, $B=(10,3)$, $C=(12,6)$, $D=(4,4)$, $S=(7,7/2)$.

4.83. $Q=(7,1)$. **4.84.** $y=0$ lub $y=16/3$. **4.85.** $C=(9,-3)$, $D=(4,-2)$.

4.86. $D=(4,4)$. **4.87.** $M=(8,10)$, $N=(4,14/3)$.

4.88. **a)** $45°$, **b)** $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}6$; $90°<\alpha<180°$, **c)** $225°$, **d)** $\operatorname{tg}\alpha=-3$, $-90°<\alpha<0$.

4.89. **a)** $[10/\sqrt{2},\ 10/\sqrt{2}]$, **b)** $[0,\ 10]$, **c)** $[-5,\ 5\sqrt{3}]$, **d)** $[10\cos 200°,\ 10\sin 200°]=[-9{,}397,\ -3{,}420]$.

4.90. $X=x-3$, $Y=y-2$; $Q=(3,2)_{Oxy}$, $O=(-3,-2)_{QXY}$; $A=(-1,-1)_{QXY}$, $B=(5,6)_{Oxy}$; $2X+3Y=0$.

4.91. Podstawiając w równaniu krzywej $x=X+x_0$, $y=Y+y_0$, otrzymujemy $X^2+Y+(2x_0+4)X+(x_0^2+4x_0+y_0+5)=0$. Przyrównując do 0 wyrażenia w nawiasach, otrzymujemy $x_0=-2$, $y_0=-1$. Translacja o wektor $[-2,\ -1]$ sprowadza równanie krzywej do postaci $X^2+Y=0$.

4.92. $X=x-1$, $Y=y-2$, $Z=z-3$; $A=(0,-2,2)_{QXYZ}$; $B=(2,2,8)_{Oxyz}$; $5X+6Y+7Z+46=0$.

4.93. Uzupełniając kwadraty, sprowadzamy dane równanie do postaci $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=49$. Przyjmując $X=x+2$, $Y=y-3$, $Z=z+4$, czyli stosując translację układu o wektor $[-2,\ 3,\ -4]$, otrzymujemy równanie $X^2+Y^2+Z^2=49$. Jest to sfera o środku $S=(-2,3,-4)_{Oxyz}$ i promieniu 7.

4.94. **a)** $x=(X-Y)/\sqrt{2}$, $y=(X+Y)/\sqrt{2}$; $X=(x+y)/\sqrt{2}$, $Y=(-x+y)/\sqrt{2}$; $A=(-3/\sqrt{2},\ 7/\sqrt{2})_{Oxy}$, $B=(7/\sqrt{2},\ 3/\sqrt{2})_{OXY}$; $Y=-(2-\sqrt{3})X$.
b) $x=(X\sqrt{3}-Y)/2$, $y=(X+Y\sqrt{3})/2$; $X=(x\sqrt{3}+y)/2$, $Y=(-x+y\sqrt{3})/2$; $A=(\sqrt{3}-5/2,\ 1+5\sqrt{3}/2)_{Oxy}$, $B=(\sqrt{3}+5/2,\ -1+5\sqrt{3}/2)_{OXY}$; $Y=0$.

4.95. $5X-3Y+5Z=0$, $A=(2/3,\ 0,\ -\sqrt{5}/3)_{Oxyz}$, $B=(1/3,\ 2/3,\ 2/3)_{OXYZ}$.

4.96. $c_{31}=\pm 3\sqrt{3}/10$, $c_{32}=\mp 2\sqrt{3}/5$, $c_{13}=0$, $c_{23}=\pm\sqrt{3}/2$. $c_{33}=-1/2=\cos\{Oz,OZ\}$ i stąd $\{Oz,OZ\}=120°$.

4.97. $A=(r=\sqrt{2},\ \varphi=45°)$, $B=(r=2,\ \varphi=0)$, $C=(r=2,\ \varphi=90°)$, $D=(r=2,\ \varphi=-120°)$, $E=(r=3,\ \varphi=-90°)$, $F=(r=1{,}3,\ \operatorname{tg}\varphi=-2{,}4,\ -90°<\varphi<0)$.

4.98. $A=(3,0)$, $B=(-\sqrt{1/2},\ \sqrt{1/2})$, $C=(0,2)$, $D=(-5,0)$, $E=(1/2,\ -\sqrt{3}/2)$, $F=(0,-4)$.

4.99. $A=(R=\sqrt{2},\ \varphi=45°,\ \theta=90°)$, $B=(R=\sqrt{3},\ \varphi=45°,\ \cos\theta=\sqrt{1/3})$, $C=(R=\sqrt{2}\ \ \varphi=0,\ \theta=45°)$, $D=(R=\sqrt{2},\ \varphi=135°,\ \theta=90°)$, $E=(R=\sqrt{3},\ \varphi=-135°,\ \cos\theta=-\sqrt{1/3})$,
$F=(R=3\sqrt{5},\ \operatorname{tg}\varphi=-5/4,\ -90°<\varphi<0,\ \cos\theta=-2/(3\sqrt{5}))$.

4.100. $A=(0,0,2)$, $B=(\sqrt{3}/2,\ 0,\ 1/2)$, $C=(0,1,0)$. $D=(-3\sqrt{6},\ 3\sqrt{2},\ 6\sqrt{2})$.

4.101. $y=2x^2-8x+6$.

4.102. Otrzymujemy trójkąt o wierzchołkach: $A'=(\sqrt{3}/2,\ 1/2)$, $B'=(\sqrt{3},\ 1)$, $C'=(\sqrt{3}/2-1,\ \sqrt{3}+1/2)$.

4.103. **a)** $y=\dfrac{-5\sqrt{3}+8}{11}x+\dfrac{4\sqrt{3}+2}{11}$, **b)** $y=\dfrac{5\sqrt{3}-8}{11}x-\dfrac{4\sqrt{3}-2}{11}$.

4.104. $(x+3)^2+(y-1)^2=4$. **4.105.** **a)** $y=x+2$, **b)** $y=x+4$.

Odpowiedzi do rozdziału 5

5.1. **a)** $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-2}{5}$, **b)** $3(x-4)+5(y-2)=0$,

c) $y=2$, **d)** $x=4$, **e)** $\dfrac{x-4}{1-4}=\dfrac{y-2}{-1-2}$ czyli $y=x-2$,

f) $y-2=\sqrt{3}(x-4)$, **g)** $y-2=-(x-4)$.

5.2. **a)** $x+4y-13=0$, **b)** $4x-y-1=0$, **c)** $2x-y+1=0$, **d)** $y=3$, **e)** $x=1$.

5.3. $x/3+y/5=1$.

5.4. **a)** $y=\frac{3}{4}x$, **b)** $y-y_0=\frac{3}{4}(x-x_0)$, **c)** $y=\frac{3}{4}x+5$, **d)** $y-6=\frac{3}{4}(x-3)$, **e)** $y=\frac{3}{4}(x+1)$, **f)** $y=\frac{3}{4}x+b$, $b\in\mathscr{R}$.

5.5. **a)** $\frac{x}{4}=\frac{y-3}{-3}$, **b)** $3x+4y-12=0$, **c)** $y=-\frac{3}{4}x+3$, **d)** $x/4+y/3=1$.

5.6. **a)** $\frac{x}{-3/2}+\frac{y}{3/5}=1$, **b)** $y=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}$, **c)** $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{2}$, **d)** $x=t$, $y=\frac{2}{5}t+\frac{3}{5}$; $t\in\mathscr{R}$.

5.7. $l_1\perp l_7$, $l_2\perp l_3$, $l_3\perp l_4$, $l_5\perp l_6$, $l_2\parallel l_4$.

5.8. **a)** $2x-5y+22=0$, **b)** $x-3y+13=0$, **c)** $y=x+5$, **d)** $y=4$, **e)** $x=-1$.

5.9. **a)** $5x+2y-3=0$, **b)** $3x+y-1=0$, **c)** $y=-x+3$, **d)** $x=-1$, **e)** $y=4$.

5.10. **a)** $\cos\{l_1,l_2\}=3/\sqrt{793}$, **b)** $\operatorname{tg}\{l_1,l_2\}=9/13$, **c)** $\cos\{l_1,l_2\}=1/\sqrt{2}$.

5.11. **a)** -3, **b)** $1/3$, **c)** $-(8+5\sqrt{3})/11$, **d)** $(5\sqrt{3}-8)/11$.

5.12. **a)** $x=6/13$, $y=30/13$; **b)** $x=3$, $y=7$; **c)** $x=2$, $y=0$; **d)** $x=\frac{a\sin\beta-b\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$, $y=\frac{-a\cos\beta+b\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$, $\beta-\alpha\neq k\pi$, $k\in\mathscr{Z}$; **e)** $x=\frac{b_2-b_1}{m_1-m_2}$, $y=\frac{m_1b_2-m_2b_1}{m_1-m_2}$, $m_1\neq m_2$.

5.13. $k=3$ lub $k=-2$.

5.14. **a)** 11, **b)** $2\sqrt{5}$, **c)** $3/\sqrt{2}$, **d)** $|ad-bc|/\sqrt{a^2+c^2}$.

5.15. $x=1\pm\sqrt{34}$.

5.16. **a)** d_1: $-21x+77y+65=0$, d_2: $99x+27y+65=0$; **b)** d_1: $x-y-1=0$, d_2: $x+y-5=0$; **c)** $y=(-1\pm\sqrt{2})x$; **d)** $y=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{5}-1)x$; **e)** jeśli $\alpha-\beta\neq k\pi$, $k\in\mathscr{Z}$, to d_1: $x\cos\gamma+y\sin\gamma=0$, d_2: $-x\sin\gamma+y\cos\gamma=0$, $\gamma=(\alpha+\beta)/2$; **f)** jeśli $\alpha-\beta\neq k\pi$, $k\in\mathscr{Z}$, to d_1: $x\cos\gamma+y\sin\gamma=(a+b)/\cos\varphi$, d_2: $-x\sin\gamma+y\cos\gamma=(a-b)/\sin\varphi$, $\gamma=(\alpha+\beta)/2$, $\varphi=(\alpha-\beta)/2$.

5.17. **a)** Równanie pęku ma postać $y-y_0=m(x-x_0)$, $m\in\mathscr{R}$, lub $x=x_0$; równanie to można też zapisać w postaci $(x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\sin\alpha=0$, $\alpha\in\mathscr{R}$; **b)** $y=mx+b$, $b\in\mathscr{R}$; **c)** $x\cos\alpha+y\sin\alpha+c=0$, $c\in\mathscr{R}$; **d)** $x\sin\alpha-y\cos\alpha+c=0$, $c\in\mathscr{R}$; **e)** $\lambda(x+y-1)+\mu(x-y-2)=0$, $|\lambda|+|\mu|\neq 0$; **f)** $2x+3y+c=0$, $c\in\mathscr{R}$; **g)** $\lambda(y-mx)+\mu(x-a)=0$, $|\lambda|+|\mu|\neq 0$.

5.18. Prosta l ma równanie $(2x+3y+4)+k(5x+6y+7)=0$, przy czym współczynnik k ma następujące wartości: **a)** $k=-4/7$, **b)** $k=-2$, **c)** $k=-43/94$.

5.19. Nie.

5.20. **a)** $(-13/17,\ 1/17)$, **b)** $(3,2)$, **c)** $\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$, **d)** $(2,0)$.

5.21. **a)** $(2,2)$, **b)** $(-4,8)$. **5.22.** $(4,4)$ lub $(64/5,\ 64/5)$.

5.23. **a)** $x-y=3$, $x+3y=11$, $2x+y=12$; **b)** $G=(5,2)$, $r=2$; **c)** $H=(7,3)$, $R=5$.

5.24. **a)** $x=4$, **b)** $3x+2y=12$, **c)** $4x+3y=16$.

5.25. **a)** $4x-3y=35$, **b)** $12x+5y=3$. **5.26.** $C=(0,0)$.

5.27. W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe. Stąd wynika, że prosta zawierająca drugie ramię trójkąta ma współczynnik kierunkowy $m=3/2$. Wierzchołkami trójkąta są punkty $(3,2)$, $(2,3)$ i $(0,0)$.

5.28. **a)** $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{5}$; **b)** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{0}$, tzn. $x-2=y-3$, $z-4=0$; **c)** $\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{0}$, tzn. $x=2$, $z=4$, y dowolne; **d)** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-4}{0}$, tzn. $y=3$, $z=4$, x dowolne.

5.29. Napisanie równania prostej w postaci parametrycznej jest możliwe na wiele sposobów.

a) Przyjmując $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{6} = t$, otrzymujemy $x = 1+2t$, $y = 3+4t$, $z = 5+6t$, $t\in\mathscr{R}$. Podstawiając w miejsce t dowolną funkcję liniową innego parametru, np. $t = s-1$, otrzymujemy inne równanie parametryczne tej samej prostej: $x = -1+2s$, $y = -1+4s$, $z = -1+6s$, $s\in\mathscr{R}$.

b) Przyjmując $2x+3 = 4y+5 = 8z = t$, otrzymujemy $x+3/2 = t/2$, $y+5/4 = t/4$, $z = t/8$, $t\in\mathscr{R}$. Natomiast obierając za parametr $z = t/8$, otrzymujemy $x+3/2 = 4z$, $y+5/4 = 2z$, $z\in\mathscr{R}$.

c) $x = t$, $y = 3t+3$, $z = -t$, $t\in\mathscr{R}$; **d)** $x = t$, $y = -2t-1$, $z = t+2$, $t\in\mathscr{R}$.

5.30. **a)** $x = 2+3t, y = 3+t, z = 4-t, t\in\mathscr{R}$; **b)** $x = 2-2t, y = 3+4t, z = -1+3t, t\in\mathscr{R}$;
c) $x = 2$, $y = 3$, $z = 4+t$, $t\in\mathscr{R}$; **d)** $x = s$, $y = s$, $z = s$, $s\in\mathscr{R}$.

5.31. **a)** $x-x_0 = \frac{y-y_0}{2} = \frac{z-z_0}{3}$, **b)** $x-x_0 = y-y_0 = z-z_0$,
c) $\frac{x-x_0}{2} = -y+y_0 = z-z_0$, **d)** $x-x_0 = y-y_0$, $z = z_0$.

5.32. **a)** $x-3y+2z-5 = 0$, **b)** $3y+z-11 = 0$, **c)** $x+y-z+1 = 0$, **d)** $x+y-z-3 = 0$, **e)** $-3y+z+5 = 0$.

5.33. **a)** $[m, n, -1]$, **b)** $[1/a, 1/b, 1/c]$.

5.34. Sprowadzając równanie płaszczyzny do postaci odcinkowej, otrzymujemy odpowiedź: 6.

5.35. **a)** (2, 1/2, 3), **b)** prosta zawiera się w płaszczyźnie, **c)** punkt wspólny nie istnieje.

5.36. **a)** (1, 3, 8), **b)** (3/2, −1/2, 0), **c)** nie istnieje.

5.37. Jeśli $\mathbf{v}_1 \parallel l_1$, $\mathbf{v}_2 \parallel l_2$, $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \neq 0$, to $\cos\{l_1, l_2\} = |\cos\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}|$.

a) $\cos\{l_1,l_2\} = \frac{|p_1 p_2+q_1 q_2+r_1 r_2|}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\,\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$,

b) $\cos\{l_1,l_2\} = \frac{|p+mq+nr|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\,\sqrt{1+m^2+n^2}}$,

c) 20/21, **d)** 3/7, **e)** 0.

5.38. Jeśli $N_1 \perp G_1$, $N_2 \perp G_2$, $N_1 N_2 \neq 0$, to $\cos\{G_1, G_2\} = |\cos\{N_1, N_2\}|$.

a) $\cos\{G_1, G_2\} = \frac{|A_1 A_2+B_1 B_2+C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$,

b) $\cos\{G_1, G_2\} = \frac{|Am+Bn-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{m^2+n^2+1}}$,

c) $|m|/\sqrt{m^2+n^2+1}$, **d)** 1/2.

5.39. Jeśli $\mathbf{v} \parallel l$, $N \perp G$, $\mathbf{v}N \neq 0$, to $\sin\{l, G\} = |\cos\{\mathbf{v}, N\}|$.

a) $\sin\{l,G\} = \frac{|Ap+Bq+Cr|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\,\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, **b)** $122/(\sqrt{77}\cdot\sqrt{194})$,

c) 1/2.

5.40. **a)** (−1, 3/2, 7/2), **b)** (−11/6, 7/6, −1/3).

5.41. **a)** (−12, −7, 0), **b)** (10, 4, 3). **5.42.** $x = 1$, $y = 3z+25$.

5.43. **a)** $15/\sqrt{29}$, **b)** 10/9. **5.44.** (3, 3, 3), (1, 1, 1). **5.45.** $6/\sqrt{35}$.

5.46. S p o s ó b 1. Jeśli Q jest rzutem punktu M na l, to $\operatorname{dist}(M, l) = MQ$.
S p o s ó b 2. Jeśli $P\in l$, $\mathbf{v} \parallel l$, $\mathbf{v} \neq 0$, to $\operatorname{dist}(M,l) = |\overrightarrow{PM} \times \mathbf{v}|/v$.
a) $\sqrt{2005}/7$, **b)** 2.

5.47. P r z y p a d e k $l_1 \parallel l_2$. Sposób 1. Jeśli G jest płaszczyzną prostopadłą do l_1 (a więc także do l_2) i $P_1 = l_1 \cap G$, $P_2 = l_2 \cap G$, to $\operatorname{dist}(l_1, l_2) = P_1 P_2$. Sposób 2. Jeśli $P_1\in l_1$, $P_2\in l_2$, $\mathbf{v} \parallel l_1 \parallel l_2$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, to $\operatorname{dist}(l_1, l_2) = |\overrightarrow{P_1 P_2} \times \mathbf{v}|/v$.

P r z y p a d e k $l_1 \not\parallel l_2$. Sposób 1. Niech G będzie płaszczyzną, która zawiera l_2 i jest równoległa do l_1. Jeśli $P_1\in l_1$, to $\operatorname{dist}(l_1, l_2) = \operatorname{dist}(P_1, G)$. Sposób 2. Jeśli $P_1\in l_1$, $P_2\in l_2$, $\mathbf{v}_1 \parallel l_1$, $\mathbf{v}_2 \parallel l_2$, $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \neq 0$, $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, to $\operatorname{dist}(l_1, l_2) = |\overrightarrow{P_1 P_2}\cdot \mathbf{w}|/w$. **a)** $\sqrt{170}/3$, **b)** 7.

5.48. Prosta l jest równoległa do płaszczyzny G, gdyż wektor $\mathbf{v} = [2, 1, -2]$ jest prostopadły do wektora $N = [2, -2, 1]$. Obieramy na prostej l dowolny punkt, np. $P_0 = (1, 0, 7)$. Szukamy punktu P takiego, aby $P\in G$, $P_0 P = 5$, $\overrightarrow{P_0 P} \perp l$. Otrzymujemy 3 równania. Rozwiązując je, znajdujemy 2 punkty: $P_1 = (1/3, 14/3, 26/3)$, $P_2 = (-7/3, -2/3, 10/3)$. Prowadząc przez te punkty proste równoległe do l, otrzymujemy 2 proste spełniające warunki zadania: p_1: $x-1/3 = 2y-28/3 = 26/3-z$, p_2: $x+7/3 = 2y+4/3 = 10/3-z$.

5.49. Niech Z oznacza zbiór wszystkich punktów $M = (x, y, z)$ spełniających koniunkcję dwóch warunków

$$\operatorname{dist}(M, G) = 2 \quad \text{i} \quad \operatorname{dist}(M, H) = 2$$

Zgodnie ze wzorem (25), pierwszy z tych warunków jest alternatywą dwóch równań określających pewne dwie płaszczyzny

$$G_1\colon x+2y-2z = 5 \quad \text{lub} \quad G_2\colon x+2y-2z = -7$$

Także drugi z tych warunków jest alternatywą dwóch równań określających inne dwie płaszczyzny

$$H_1\colon 3x-4z = 8 \quad \text{lub} \quad H_2\colon 3x-4z = -12$$

Zbiór Z jest więc sumą czterech prostych

$$G_1 \cap H_1,\ G_1 \cap H_2,\ G_2 \cap H_1,\ G_2 \cap H_2$$

Każda z tych prostych spełnia warunki zadania.

5.50. Niech W będzie płaszczyzną przechodzącą przez P_0 i prostopadłą do l. Otrzymujemy $W\colon x+2y+2z = 2$. Niech K będzie punktem, w którym W przecina prostą k. Otrzymujemy $K = (2/3, 2/3, 0)$. Rozwiązaniem zadania jest prosta $KP_0\colon x/2 = y/2 = (1-z)/3$.

5.51. Płaszczyzna G ma z krawędziami AD, BD i CD punkty wspólne: $A' = (0, 0, 2)$, $B' = (6/5, 0, 3)$, $C' = (0, 8/5, 1)$. Z pozostałymi krawędziami płaszczyzna G nie ma punktów wspólnych. Płaszczyzna G rozcina czworościan $ABCD$ na czworościan $DA'B'C'$ o objętości 24/25 i ostrosłup ścięty $ABCA'B'C'$ o objętości 101/25. Pole przekroju $A'B'C'$ jest równe $\sqrt{1201}/25$.

5.52. Niech $F(c)$ oznacza figurę odciętą z czworościanu $ABCD$ przez płaszczyznę G i znajdującą się „powyżej G", tj. w obszarze $z \geqslant c$. Niech $f(c)$ oznacza objętość figury $F(c)$ dla $0 \leqslant c < 5$. Stwierdzamy, że $f(0) =$ objętość $ABCD = 6$. Szukana wartość c jest pierwiastkiem równania $f(c) = 3$. Funkcja f jest malejąca, a ponieważ $f(1) = 3{,}84$, więc szukana wartość c należy do przedziału $(1; 5)$. Dla $1 \leqslant c < 5$ wszystkie figury $F(c)$ są ostrosłupami jednokładnymi o objętościach proporcjonalnych do sześcianów ich wysokości. Stąd wynika proporcja $f(c)\colon f(1) = (5-c)^3 : 4^3$, a z tej proporcji równość $f(c) = 3(5-c)^3/50$. Z równania $f(c) = 3$ otrzymujemy $c = 5 - \sqrt[3]{50}$.

5.53. **a)** $8x+35y-45z+61 = 0$, **b)** $x+4y-5z+7 = 0$, **c)** $x+4y-5z+7 = 0$, **d)** nie istnieje, **e)** nie istnieje.

Odpowiedzi do rozdziału 6

6.1. **a)** 1, 3/5, 2/5, 5/17, 3/13; **b)** $1/\sqrt{2}$, 0, $-1/\sqrt{2}$, 1, $-1/\sqrt{2}$; **c)** 1, 3/2, 11/6, 25/12, 137/60.

6.2. **a)** 3, 7/3, 17/7, 41/17, 99/41; **b)** 0, 1/2, 3/4, 5/8.

6.3. **a)** Malejący, **b)** rosnący, **c)** niemonotoniczny, **d)** malejący. **e)** Dla dowolnych dodatnich liczb x, y nierówność $x > y$ jest równoważna nierówności $x/y > 1$. Ponieważ $a_{n+1}/a_n > 1$, więc ciąg jest rosnący. **f)** $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = (1+1/n)a_n$, więc $a_1 < a_3 < a_5 < \ldots$ oraz $a_2 < a_4 < a_6 < \ldots$. Dla $n \geqslant 3$ zachodzi równość $a_n = \dfrac{(n-1)!!}{(n-2)!!}$. Dla n nieparzystych, $n \geqslant 3$ zachodzi nierówność $a_{n-1} < a_n > a_{n+1}$. Ciąg (a_n) jest niemonotoniczny. **g)** Rosnący, **h)** malejący dla $n > 500$, **i)** rosnący dla $n > 3$.

6.4. **a), b), d), f)** — ciągi ograniczone; **c) e) g) h)** — ciągi nieograniczone.

6.5. Dla dowolnej liczby dodatniej ε należy wskazać liczbę δ (zależną od ε) taką, żeby z nierówności $n > \delta$ wynikała nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. Poszukując liczby δ, piszemy nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$, po czym tworzymy kolejne nierówności takie, aby każda z nich była warunkiem wystarczającym dla poprzedniej, a ostatnia miała postać $n > W(\varepsilon)$, gdzie $W(\varepsilon)$ jest pewnym wyrażeniem zależnym od ε. Wówczas możemy przyjąć $\delta \geqslant W(\varepsilon)$

a) $|a_n - g| = \left|\dfrac{3}{n+5} - 0\right| = \dfrac{3}{n+5} < \varepsilon$, $n+5 > \dfrac{3}{\varepsilon}$, $n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 5$,

przyjmujemy $\delta = 3/\varepsilon$.

b) $\delta = 1/\varepsilon$, **c)** $\delta = 5/\varepsilon$, **d)** $\delta = 1/\varepsilon$, **e)** $\delta = 2/(5\varepsilon)$, **f)** $\delta = 2/\varepsilon$, **g)** $\delta = 4/\varepsilon^2$.

6.6. **a)** $n! \geqslant n > A$, $\delta = A$; **b)** $\lg n > A$, $n > 10^A$, $\delta = 10^A$; **c)** $2^n > n > A$, $\delta = A$; **d)** $a = 1+h$, $h > 0$, $a^n = (1+h)^n = 1+nh+\ldots+h^n > nh > A$, $n > A/h$, $\delta = A/h$.

e) Dla $a = 0$ twierdzenie oczywiste. Dla $0 \neq |a| < 1$ mamy $|a| = \frac{1}{1+h}$, $h > 0$, $|a^n| = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{nh} < \varepsilon, n > \frac{1}{h\varepsilon} = \delta$;

f) $\frac{2^n}{n} = \frac{1}{n}(1+1)^n = \frac{1}{n}\left[1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+1\right] > \frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2} >$ $> A,\ n > 2A+1 = \delta$;

g) $\frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left[1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\ldots+1\right] >$ $> \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^2} = \frac{1}{6}\left(n-3+\frac{2}{n}\right) > \frac{n-3}{6} > A, n > 6A+3 = \delta$;

h) $\frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot\ldots\cdot 2}{3\cdot\ldots\cdot n} < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$;

i) $\frac{n^n}{n!} = \frac{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} > n > A,\ \delta = A$.

6.7. **a)** $\sqrt[3]{100-n} < A, n > 100-A^3 = \delta$;
b) $100n-n^2 < A, n^2-100n+A > 0$, $n > 50+\sqrt{2500-A} = \delta$ dla $A < 0$ oraz $\delta = 100$ dla $A \geqslant 0$;
c) $\lg\frac{1}{n} = -\lg n < A, \lg n > -A, n > 10^{-A} = \delta$.

6.8. **a)** 0, **b)** 1, **c)** 1/100, **d)** 6, **e)** 0, **f)** 4, **g)** 3/5, **h)** 1, **i)** 0, **j)** ∞, **k)** 0, **l)** 0, **m)** ∞, **n)** ∞, **o)** 0, **p)** 1, **q)** ∞, **r)** 0, **s)** ∞, **t)** 1, **u)** 1, **v)** ∞ (zob. zad. 6.6g), **w)** 0 (zob. zad. 6.6h), **z)** ∞.

6.9. **a)** 0, **b)** 3, **c)** a, **d)** ab, **e)** 0, **f)** 5, **g)** 3/2, **h)** 1, **i)** 0, **j)** 0, **k)** ∞, **l)** 0, **m)** ∞ dla $a \neq 0$, 1 dla $a = 0$; **n)** 0 dla $a \neq 0$, 1 dla $a = 0$; **o)** ∞, **p)** 0, **q)** 0, **r)** ∞, **s)** 1, **t)** 1, **u)** 1, **v)** 0, **w)** 1, **x)** ∞, **y)** 0, **z)** 0.

6.10. **a)** ∞, **b)** $-\infty$, **c)** 3, **d)** 0, **e)** 3, **f)** 1/5, **g)** 0, **h)** 0, **i)** 1/256, **j)** ∞, **k)** $\sqrt{n+4}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} =$ $= \frac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} \to 0$, **l)** $-\infty$, **m)** 0, **n)** ∞, **o)** 1/2, **p)** 1.

6.11. **a)** ∞, **b)** 2/3, **c)** ∞, **d)** 0, **e)** 1, **f)** ∞, **g)** 0, **h)** 6, **i)** 1/2, **j)** ∞, **k)** 5/2, **l)** $(\sqrt{3}+\sqrt{5})/2$.

6.12. **a)** 8, **b)** ∞, **c)** 0, **d)** 0, **e)** ∞, **f)** 7/3, **g)** 4, **h)** ∞, **i)** ∞ dla $c > 1$, 0 dla $|c| \leqslant 1$, ciąg rozbieżny dla $c < -1$; **j)** 0, **k)** 1, **l)** 1, **m)** 1, **n)** 1, **o)** Podciągi (a_{2n}) i (a_{2n-1}) są rosnące; wystarczy wykazać, że są nieograniczone. Dla a_{2n} otrzymujemy wzór $a_{2n} = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2n}\right) \geqslant 1+$ $+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$. Suma w nawiasie jest sumą częściową szeregu harmonicznego i dąży do ∞ (*Zarys*, s. 205), zatem $a_{2n} \to \infty$. Podobnie wykazujemy, że $a_{2n-1} \to \infty$. Zatem $\lim a_n = \infty$.

6.13. **a)** $k = -2$, **b)** $k = 1$, **c)** $k = -1$, **d)** $k = 0$. Liczba 1 nie może być granicą ciągu.

6.16. **a)** Dla danego ciągu dobieramy dwa ciągi: jeden ciąg o wyrazach mniejszych i jeden ciąg o wyrazach większych od wyrazów danego ciągu, np. $\sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{2^n+3^n} < \sqrt[n]{2\cdot 3^n}$. Ponieważ oba te ciągi mają granicę 3, więc i dany ciąg ma granicę 3.
b) 1, **c)** 0, **d)** 0, **e)** 1.

6.17. Wystarczy wykazać, że dany ciąg zawiera dwa podciągi zbieżne do dwóch różnych granic. **a)** $a_{2k} \to 1$, $a_{2k-1} \to -1$; **b)** $a_{2k-1} \to 0$, $a_{4k-2} \to -1$, $a_{4k} \to 1$; **c)** $a_{6k} = 1$, $a_{6k-3} \to -1$; **d), e), f), g), h)** — dowody podobne.

6.18. **a)** Ciąg jest monotoniczny i ograniczony, a więc zbieżny do pewnej granicy skończonej g (nieznanej). Ponieważ $a_n \to g$ oraz $a_{n+1} \to g$, więc ze wzoru rekurencyjnego otrzymujemy $g = \sqrt{6+g}$, stąd $g = 3$.
b) $g = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}g^2$, $g = 1-1/\sqrt{2}$; **c)** $g = \frac{1}{2}\left(g+\frac{1}{g}\right)$, $g = 1$.

6.19. Teza 1° wynika stąd, że $a_{n+1} = (a_n+b_n)/2$ jest średnią arytmetyczną liczb a_n, b_n, zaś $\sqrt{c} = \sqrt{a_n b_n}$ jest średnią geometryczną tych liczb (zob. zad. 1.7d). Teza 2° wynika z twierdzenia o dwóch ciągach (*Zarys*, s. 196). Niech $g = \lim a_n$. Z określenia ciągów

(a_n) i (b_n) wynika równość $2a_{n+1} = a_n + c/a_n$. W granicy mamy $2g = g + c/g$ i stąd $g = \sqrt{c}$.

6.20. Wskazówka. Skorzystać z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną (*Zarys*, s. 57).

6.21. **a)** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}$, **b)** 1/e, **c)** e,

d) e, **e)** $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2} \to \mathrm{e}^{1/2}$, **f)** $\mathrm{e}^{5/2}$,

g) e, **h)** e^2, **i)** e, **j)** $\mathrm{e}^{1/5}$, **k)** $\mathrm{e}^{-1/5}$, **l)** $\mathrm{e}^{-2/3}$, **m)** 1, **n)** e^{-2}, **p)** $\mathrm{e}^{4/3}$, **q)** $\mathrm{e}^{-1/4}$, **r)** $\mathrm{e}^{1/3}$.

6.22. **a)** ∞, **b)** 1/2, **c)** 0, **d)** $(1-b)/(1-a)$, **e)** 1, **f)** 4, **g)** 1.

h) Dla a_n mamy nierówność $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant a_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, zatem $a_n \to 1$.

i) Jeśli różnicami ciągów arytmetycznych (a_n), (b_n) są liczby r_1, $r_2 \neq 0$, to granicą rozważanego ciągu jest stosunek r_1/r_2 (po ewentualnym odrzuceniu jednego wyrazu, którego mianownik może być zerem).

6.23. **a)** $s_n = \frac{n}{100} \to \infty$, szereg rozbieżny; **b)** $s_n = 800(1-1/2^n) \to 800$, szereg zbieżny, s = 800; **c)** $s_n = \frac{1}{400}(2^n - 1) \to \infty$, szereg rozbieżny; **d)** $s_{2n} = 0$, $s_{2n-1} = 1/100$, $\lim s_n$ nie istnieje, szereg rozbieżny. **e)** Rozkładając każdy wyraz a_n na różnicę dwóch ułamków $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ i tworząc sumę częściową, po zredukowaniu otrzymujemy $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Ponieważ $s_n \to 1$, więc szereg jest zbieżny i ma sumę $s = 1$.

f) Rozumując jak wyżej, wykazujemy, że szereg jest zbieżny i ma sumę $s = 1$.

6.24. **a)** Nie spełnia, szereg rozbieżny.

b) Spełnia; rozkładając $a_n = \frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ otrzymujemy

$s_n = 3/2 - 1/n - 1/(n+1)$, $s_n \to 3/2$; szereg zbieżny, $s = 3/2$.

c) Spełnia; jest to szereg harmoniczny, rozbieżny (*Zarys*, s. 205)

d) Nie spełnia; szereg rozbieżny.

e) Spełnia; jest to suma dwóch szeregów geometrycznych zbieżnych; szereg jest zbieżny i ma sumę $s = 3/2$.

f) Spełnia; podobnie jak w e) szereg jest zbieżny i ma sumę $s = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1}$.

g) Spełnia; prawie wszystkie wyrazy szeregu są zerami; szereg jest zbieżny i ma sumę $s = 1 + \sqrt{3}/2$.

h) Nie spełnia, gdyż prawie wszystkie wyrazy są równe 1; szereg rozbieżny.

i) Spełnia; $s_n = \sqrt{n} \to \infty$; szereg rozbieżny.

j) Spełnia; podobnie jak w zad. 6.23 e) szereg zbieżny, $s = \frac{1}{3}$.

k) Spełnia; jak w zad. 6.23 e) szereg zbieżny, $s = 1/a$.

l) Spełnia; jak w zad. 6.23 e) szereg zbieżny, $s = 5/3$.

m) Spełnia; $s_n = \lg\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] > \lg\left(\frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$; szereg rozbieżny.

n) Spełnia; dla $n > 2^k$ mamy $s_n > \frac{1}{2\lg 2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right) \to \infty$.

6.25. **a)** $(0,1)\cup(2,3)$, $s = 1/(3x-x^2)$;
b) $(-\infty,-3)\cup(-1,1)\cup(3,\infty)$, $s = (x^2-3)/(x^2-2x-3)$;
c) $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathscr{Z}$, $s = \sin x/(1-\sin x)$;
d) $|x-k\pi| < \pi/4$, $k \in \mathscr{Z}$, $s = \operatorname{tg} x/(1-\operatorname{tg} x)$.

6.26. **a)** $\frac{3n+1}{n^3-n} = \frac{3}{n^2}\,\frac{1+1/(3n)}{1+3/n^3} < \frac{4}{n^2}$, szereg zbieżny;

b) $\frac{3n+1}{n^2-3} = \frac{3}{n}\,\frac{1+1/(3n)}{1-3/n^2} > \frac{3}{n}$, szereg rozbieżny;

c), e), g), j), k), l), p), r), t) — szeregi zbieżne; **d), f), h), i), m), n), o), q), s)** — szeregi rozbieżne.

6.27. **a), e), f), g), i), l), m), p)** — szeregi zbieżne; **b), c), d), h), j), k), n), o)** — szeregi rozbieżne.

6.28. **b), c), d), g), h), i), j)** — szeregi zbieżne; **a), e), f), k)** — szeregi rozbieżne.

6.29. **a)** $a_n \to 0$, zatem dla prawie wszystkich n mamy $0 < a_n < 1$, a więc $a_n^2 < a_n$.

b) Wskazówka. Skorzystać z tego, że średnia arytmetyczna $\frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$ jest nie mniejsza od średniej geometrycznej $\sqrt{a_n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} a_n$ i zastosować kryterium porównawcze.

6.30. $(a_n + b_n)^2 + (a_n - b_n)^2 = 2(a_n^2 + b_n^2)$, stąd $(a_n + b_n)^2 \leqslant 2(a_n^2 + b_n^2)$.

6.31. **a), b), d), e), f)** — szeregi zbieżne; **c)** szereg rozbieżny (nie spełnia warunku koniecznego zbieżności), **g)** zbieżny dla $r > 0$, **h)** zbieżny dla $-1 \leqslant x < 1$, **i)** szereg rozbieżny, gdyż łącząc kolejne wyrazy w pary $\frac{3}{2n-1} + \frac{-1}{2n} = \frac{4n+1}{4n(n-1/2)} > \frac{1}{n}$, otrzymujemy majorantę szeregu harmonicznego.

6.32. **a)** Zbieżny warunkowo; **b)** zbieżny bezwzględnie dla $r > 1$, warunkowo dla $0 < r \leqslant 1$, rozbieżny dla $r \leqslant 0$; **c), f), l)** — szeregi rozbieżne; **d), g), h), k)** — szeregi zbieżne bezwzględnie; **e), i), j)** — szeregi zbieżne warunkowo.

Odpowiedzi do rozdziału 7

7.1. **a)** $|x-c| < \delta$, **b)** $|y-g| < \varepsilon$, **c)** $0 < |x-c| < \delta$, co jest równoważne koniunkcji $x \neq c$, $|x-c| < \delta$; **d)** $x > \delta$,
e) $x < \delta$, **f)** $0 < x-c < \delta$, co jest równoważne koniunkcji $x > c$, $|x-c| < \delta$; **g)** $0 < c-x < \delta$, co jest równoważne koniunkcji $x < c$, $|x-c| < \delta$.

7.2. **a)** 0,4, **b)** 0,5, **c)** 0,6.

7.3. Każdy punkt C spełniający warunek $1 \leqslant C \leqslant 2$ lub $C = 0$ lub $C = \infty$.

7.4. **a)** Tak, **b)** tak, **c)** nie, **d)** tak.

7.5. **a)** Tak, **b)** tak, **c)** nie, **d)** tak.

7.6. **a)** Tak, **b)** tak, **c)** nie, **d)** tak.

7.7. **a)** $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{\delta>0} \bigwedge\limits_{x\in D} (0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-g| < \varepsilon)$

b) $\bigwedge\limits_{A} \bigvee\limits_{\delta>0} \bigwedge\limits_{x\in D} (0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) > A)$

c) $\bigwedge\limits_{A} \bigvee\limits_{\delta>0} \bigwedge\limits_{x\in D} (0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) < A)$

d) $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{\delta} \bigwedge\limits_{x\in D} (x > \delta \Rightarrow |f(x)-g| < \varepsilon)$

e) $\bigwedge\limits_{A} \bigvee\limits_{\delta} \bigwedge\limits_{x\in D} (x > \delta \Rightarrow f(x) > A)$

f) $\bigwedge\limits_{A} \bigvee\limits_{\delta} \bigwedge\limits_{x\in D} (x > \delta \Rightarrow f(x) < A)$

g) $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{\delta} \bigwedge\limits_{x\in D} (x < \delta \Rightarrow |f(x)-g| < \varepsilon)$

h) $\bigwedge\limits_{A} \bigvee\limits_{\delta} \bigwedge\limits_{x\in D} (x < \delta \Rightarrow f(x) > A)$

i) $\bigwedge\limits_{A} \bigvee\limits_{\delta} \bigwedge\limits_{x\in D} (x < \delta \Rightarrow f(x) < A)$

7.8. Dla dowolnej liczby dodatniej ε należy wskazać liczbę dodatnią δ (zależną od ε) taką, żeby dla każdego x należącego do D i różnego od c z nierówności

$$|x-c| < \delta \tag{A}$$

wynikała nierówność

$$|f(x)-g| < \varepsilon \tag{B}$$

Poszukując liczby δ, zakładamy: $x \in D$, $x \neq c$ i piszemy nierówność (B), po czym tworzymy nierówności kolejne takie, aby każda z nich była warunkiem wystarczającym dla poprzedniej, a ostatnia miała postać (A) i pozwalała odczytać liczbę δ.

Uwaga. Przy tworzeniu kolejnych nierówności można ograniczyć zakres rozważanych wartości x do sąsiedztwa punktu c o pewnym promieniu M, $M > 0$. Stąd wynika ograniczenie $\delta \leqslant M$. Umawiamy się, że tego rodzaju ograniczenia, a także powoływanie się na pewne wzory, będziemy zapisywać między wężykami $\S\ \S$.

a) $x \neq 7$; $\left|\frac{x^2-49}{x-7} - 14\right| < \varepsilon$, $|x-7| < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon$.

b) $x \neq 1$; $\left|\frac{5x^2-5}{x-1} - 10\right| < \varepsilon$, $5|x-1| < \varepsilon$, $|x-1| < \frac{\varepsilon}{5}$, $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

c) $x \neq 1$; $\left|\dfrac{x^3-1}{x-1}-3\right| < \varepsilon$, $|x^2+x+1-3| < \varepsilon$, $|x+2|\,|x-1| < \varepsilon$,

$\wr$ przyjmujemy ograniczenie $0 < x < 2$ (tj. sąsiedztwo punktu $c = 1$ o promieniu $M = 1$); wtedy $2 < x+2 < 4$, więc $|x+2| < 4$ $\wr$, $4|x-1| < \varepsilon$, $|x-1| < \varepsilon/4$. Liczba δ powinna spełniać nierówności $\delta \leqslant \varepsilon/4$, $\delta \leqslant 1$, zatem $\delta = \min\{\varepsilon/4,\ 1\}$.

d) $x \neq -1$, $x \neq 1$; $\left|\dfrac{x-1}{x^2-1}-\dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$, $\left|\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$, $\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < \varepsilon$

$\wr$ przyjmujemy ograniczenie $0 < x < 2$ (tj. sąsiedztwo punktu $c = 1$ o promieniu $M = 1$), wtedy $1 < x+1$, więc $1/(x+1) < 1$ $\wr$, $\dfrac{1}{2}|x-1| < \varepsilon$, $|x-1| < 2\varepsilon$; $\delta = \min\{2\varepsilon,\ 1\}$.

e) $x \neq 0$; $|(1+x^2)-1| = |x^2| < \varepsilon$, $|x| < \sqrt{\varepsilon}$, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

f) $x \neq 0$; $|\sin x - 0| = |\sin x| \leqslant$ $\wr$ *Zarys*, s. 225 $\wr$ $\leqslant |x| < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon$.

g) $x \neq 0$; $|\cos x - 1| = 2\sin^2\left|\dfrac{x}{2}\right| \leqslant 2\sin\left|\dfrac{x}{2}\right| \leqslant |x| < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon$.

h) $x \neq c$; $|\sin x - \sin c| = \left|2\cos\dfrac{x+c}{2}\sin\dfrac{x-c}{2}\right| \leqslant 2\sin\left|\dfrac{x-c}{2}\right| \leqslant$ $\leqslant |x-c| < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon$.

i) $x > 0$; $|\sqrt{x}| = \sqrt{x} < \varepsilon$, $x < \varepsilon^2$, $\delta = \varepsilon^2$.

7.9. Rozumujemy podobnie jak w poprzednim zadaniu, zastępując nierówność (A) względnie (B) nierównościami stosownymi dla rozważanego typu granicy.

a) $x \neq 0$; $1/x^2 > A$, $1/x^2 > |A|$, $x^2 < 1/|A|$, $|x| < 1/\sqrt{|A|}$, $\delta = 1/\sqrt{|A|}$.

b) $x > 0$; $\ln x < A$, $x < e^A$, $\delta = e^A$.

c) $x \neq 0$; $\left|\dfrac{x+1}{x}-1\right| = \left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$, $\wr x > 0 \wr$, $\dfrac{1}{x} < \varepsilon$, $x > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

d) $x^2-5x+8 > x^2-5x = x(x-5) > \wr x > 6 \wr > x > A$. Liczba δ powinna spełniać nierówności $\delta \geqslant A$, $\delta \geqslant 6$, zatem $\delta = \max\{A, 6\}$.

e) $1-x^2 < A$, $x^2 > 1-A$, $x^2 > 1+|A|$, $x > 1+|A|$, $\delta = 1+|A|$.

f) $x \neq 1$; $\left|\dfrac{x}{x-1}-1\right| = \left|\dfrac{1}{x-1}\right| = \wr x < 1 \wr = \dfrac{1}{1-x} < \varepsilon$, $1-x > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $x < 1-1/\varepsilon$, $\delta = 1-1/\varepsilon$.

g) $x^2-5x+8 > \wr x < 0 \wr > x^2 > \wr x < -1 \wr > |x| = -x > A$, $x < -A$. Liczba δ powinna spełniać nierówności $\delta \leqslant 0$, $\delta \leqslant -1$, $\delta \leqslant -A$, zatem $\delta = \min\{-A, -1\}$.

h) $x^3 < A$, $x < \sqrt[3]{A}$, $\delta = \sqrt[3]{A}$.

7.10. **a)** $\bigwedge\limits_{\varepsilon > 0} \bigvee\limits_{\delta > 0} \bigwedge\limits_{x \in D} (c < x < c+\delta \Rightarrow |f(x)-p| < \varepsilon)$

b) $\bigwedge\limits_{A} \bigvee\limits_{\delta > 0} \bigwedge\limits_{x \in D} (c < x < c+\delta \Rightarrow f(x) > A)$

c) $\bigwedge\limits_{A} \bigvee\limits_{\delta > 0} \bigwedge\limits_{x \in D} (c < x < c+\delta \Rightarrow f(x) < A)$

d) $\bigwedge\limits_{\varepsilon > 0} \bigvee\limits_{\delta > 0} \bigwedge\limits_{x \in D} (c-\delta < x < c \Rightarrow |f(x)-q| < \varepsilon)$

e) $\bigwedge\limits_{A} \bigvee\limits_{\delta > 0} \bigwedge\limits_{x \in D} (c-\delta < x < c \Rightarrow f(x) > A)$

f) $\bigwedge\limits_{A} \bigvee\limits_{\delta > 0} \bigwedge\limits_{x \in D} (c-\delta < x < c \Rightarrow f(x) < A)$

7.11. **a)** ∞ dla $x \to 0+0$, $-\infty$ dla $x \to 0-0$; **b)** 1 dla $x \to 0$; **c)** 1 dla $x \to 0+0$, -1 dla $x \to 0-0$; **d)** 0 dla $x \to 0+0$, -1 dla $x \to 0-0$.

7.12. **a)** $+\infty$ dla $x \to 1-0$, $-\infty$ dla $x \to 1+0$, $-\infty$ dla $x \to 2-0$, $+\infty$ dla $x \to 2+0$; **b)** 0 dla $x \to 1-0$, 1 dla $x \to 1+0$, 1 dla $x \to 2-0$, 2 dla $x \to 2+0$; **c)** 0 dla $x \to 1$, $-\infty$ dla $x \to 2-0$, ∞ dla $x \to 2+0$; **d)** 1 dla $x \to 1$; 0 dla $x \to 2-0$, granica dla $x \to 2+0$ nie istnieje, bo dla $x > 2$ funkcja jest nieokreślona.

7.13. Rodzaj monotoniczności funkcji w danym przedziale określamy za pomocą skrótów: rosn. — rosnąca, mal. — malejąca, niemal. — niemalejąca, nierosn. — nierosnąca.

a) $(-\infty, 0\rangle$ mal., $\langle 0, +\infty)$ rosn. **b)** $(-\infty, 0)$ mal., $(0, +\infty)$ mal. **c)** $(-\infty, +\infty)$ rosn. **d)** $(0, +\infty)$ rosn. **e)** $(-\infty, 0)$ mal., $(0, +\infty)$ rosn. **f)** $(-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi)$, $k \in \mathscr{Z}$, rosn.
g) $(-\infty, \infty)$ mal. **h)** $(-\infty, 0\rangle$ rosn., $\langle 0, \infty)$ mal.
i) $(-\infty, \infty)$ niemal. **j)** $(-\infty, 0)$ nierosn., $(0, \infty)$ niemal.

7.14. **a)** $-5 \leqslant y \leqslant 5$; **b)** $0 < y$, od góry nieograniczona; **c)** $0 < y \leqslant 0{,}3$; **d)** od góry i od dołu nieograniczona; **e)** $y \leqslant 0$, od dołu nieograniczona; **f)** $y \leqslant \ln \frac{1}{4}$, od dołu nieograniczona.

7.15. **a)** $\frac{1}{2}$, **b)** 1, **c)** $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \to 4$, **d)** $\frac{3}{2}$, **e)** $\frac{1}{2}$, **f)** $\frac{2x^3+x^2-x-1}{5x^3+x^2-x+1} = \frac{2x^3(1+\ldots)}{5x^3(1+\ldots)} \to \frac{2}{5}$, **g)** ∞, **h)** 0,

i) ∞, **j)** -1, **k)** $\frac{\sqrt{5x}-5}{x-5} = \frac{(\sqrt{5x}-5)(\sqrt{5x}+5)}{(x-5)(\sqrt{5x}+5)} =$

$= \frac{5}{\sqrt{5x}+5} \to \frac{1}{2}$,

l) 3/5, **m)** 2/7, **n)** 1/2, **o)** $10\sqrt{3}$, **p)** $-1/2$, **q)** ∞, **r)** 0, **s)** 1/5.

7.16. **a)** 3, **b)** 7/2, **c)** $-11/2$, **d)** 4, **e)** 1/3, **f)** 3/7, **g)** ∞, **h)** 0, **i)** ∞, **j)** ∞, **k)** 2, **l)** ∞, **m)** $\sqrt{2}/6$, **n)** 4/3, **o)** 4/3, **p)** 3/2, **q)** 1/2, **r)** 1/2, **s)** 3, **t)** 1/2, **u)** -1, **v)** -2, **w)** $\sqrt{3}/2$, **x)** e^3, **y)** e^4, **z)** e^{-4}.

7.17. **a)** -15, **b)** 0, **c)** ∞, **d)** $-\infty$, **e)** $-1/2$, **f)** 1, **g)** $-\infty$, **h)** $-\infty$, **i)** $-\infty$, **j)** ∞, **k)** 0, **l)** 0, **m)** 0, **n)** 12/5, **o)** 1/2, **p)** 1/4.

7.18. **a)** 1/6, **b)** 8/9, **c)** 5/4, **d)** $\sqrt{2}/8$, **e)** 6, **f)** 1, **g)** 1/2, **h)** -3, **i)** -4, **j)** $-\sqrt{3}$, **k)** 1/8, **l)** 1, **m)** 3/2, **n)** e^2.

7.19. P oznacza granicę prawostronną, L — granicę lewostronną. **a)** $P = \infty$, $L = -\infty$; **b)** $P = \infty$, $L = -\infty$; **c)** $P = -\infty$, $L = \infty$; **d)** $P = \infty$, $L = 0$; **e)** $P = 0$, $L = \infty$.

7.20. $|\cos x - \cos x_0| = \left|2 \sin \frac{x-x_0}{2} \sin \frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2 \left|\sin \frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant$

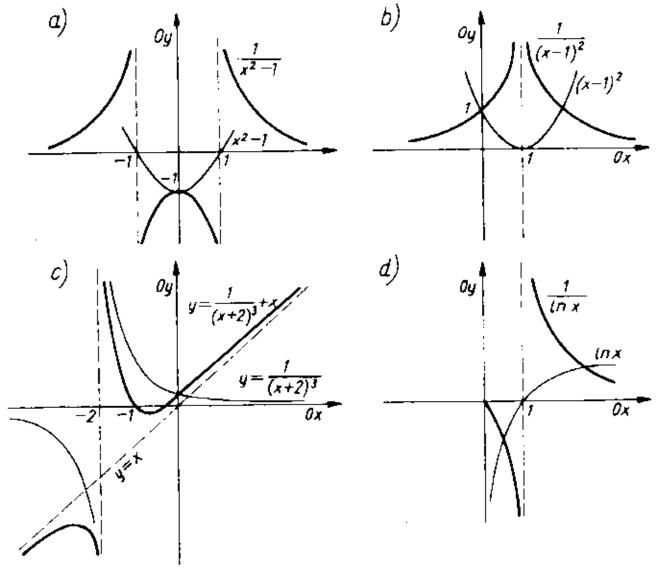
$\leqslant |x - x_0| < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon$.

7.21. **a)** 3/5, **b)** 1/2, **c)** 1.

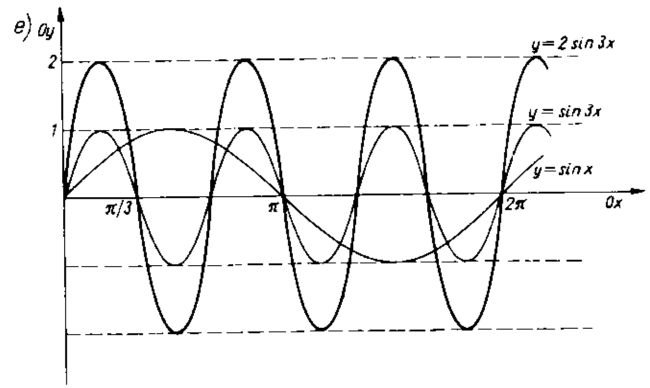
7.25. **a)** $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$; **b)** $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$;

c) $x = -1$, $x = 1$, $y = x$; **d)** $x = -1$, $y = x-3$; **e)** $y = x$, **f)** $y = x - 1/3$, **g)** $x = 1$ dla $x \to 1+0$, $y = x + 1/2$ dla $x \to \infty$, $y = -x - 1/2$ dla $x \to -\infty$; **h)** $y = 1$, $x = -1$ dla $x \to -1-0$, $x = 1$ dla $x \to 1+0$.

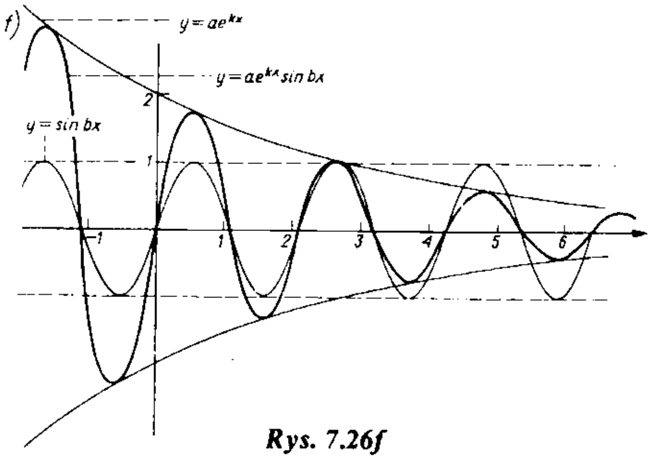
7.26.



Rys. 7.26 a, b, c, d



Rys. 7.26 e



Rys. 7.26f

7.27. Zob. *Zarys*, s. 248.

7.28. **a)** $Y-8 = 12(X-2)$, $Y-8 = -\frac{1}{12}(X-2)$; **b)** $Y = X+1$, $Y = -X+1$; **c)** $Y = 1$, $X = \pi/2$.

7.29. **a)** $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{27})$, $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{27})$; **b)** $(1,0)$; **c)** $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathscr{Z}$.

7.30. **a)** 1, $t = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathscr{Z}$; **b)** 10, $t = 1$; **c)** 1, $t = \infty$.

7.31. **a), b)** — Ciągła, $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$; **c)** ciągła, $f'(0) = 0$; **d)** ciągła prawostronnie, $f'_+(0) = 0$, $f'_-(0) = \infty$; **e)** nieciągła, $f'(0) = \infty$; **f)** ciągła, $f'(0) = \infty$.

7.32. **a)** Funkcja $y = \sqrt{x}$ jest odwrotna do funkcji $x = y^2$, $y \geqslant 0$; zatem $(\sqrt{x})' = 1/(y^2)' = 1/(2y) = 1/(2\sqrt{x})$. **b)** $(\sqrt[3]{x})' = 1/(y^3)' = 1/(3y^2) = 1/(3\sqrt[3]{x^2})$, **c)** $(e^x)' = 1/(\ln y)' = 1/(1/y) = y = e^x$, **d)** podobnie jak c), **e)** $(\arcsin x)' = 1/(\sin y)' = 1/\cos y = 1/\sqrt{1-\sin^2 y} = 1/\sqrt{1-x^2}$; **f), g), h)** — podobnie jak e).

7.33. **a)** a, **b)** $2ax+b$, **c)** $-a/(ax+b)^2$, **d)** $-2x/(x^2+a^2)^2$, **e)** $\frac{3}{2}\sqrt{x}$, **f)** $4x^3$, **g)** $6x^2-2x$, **h)** $1/(x+1)^2$, **i)** $2/(x+1)^2$, **j)** $4x/(x^2+1)^2$, **k)** $1/\sqrt{2x+3}$, **l)** $1/[3\sqrt[3]{(x-1)^2}]$,

m) $4(x+1)^3$, **n)** $\frac{1}{2}(2x+1)/\sqrt{x^2+x}$, **o)** $1/\cos^2 x$, **p)** $-1/\sin^2 x$.

7.34. **a)** $4x-3$, **b)** x^2+x+1, **c)** $3/7$, **d)** $1+1/(2\sqrt{x})$, **e)** $5\cos 5x$, **f)** $-\sin 2x$, **g)** $3/\sqrt{6x+7}$, **h)** $12(2x-1)^5$, **i)** $6x^2-14x+7$, **j)** $(x+1)/(-2x\sqrt{x})$, **k)** $-2/(1+x)^2$, **l)** $\frac{2(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$, **m)** $10x(x^2+1)^4$, **n)** $x/\sqrt{1+x^2}$, **o)** $-\sin\sqrt{x}/(2\sqrt{x})$, **p)** $-\sin x/(2\sqrt{\cos x})$, **q)** $(\sqrt{x}-1)/x^2$, **r)** $1/[\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2]$, **s)** $\frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$, **t)** $\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$, **u)** $\frac{-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, **v)** $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$, **w)** $\operatorname{ctg} x$, **z)** $\frac{1}{x}\cos(\ln x)$.

7.35. **a)** $\frac{2x}{1+x^2}$, $\frac{2x}{(1+x^2)\ln 2}$, $\frac{2x}{(1+x^2)\ln\frac{1}{2}}$, $\frac{2x}{(1+x^2)\ln 10}$; **b)** $2xe^{1+x^2}$, $2xe^{1+x^2}\ln 2$, $2xe^{1+x^2}\ln\frac{1}{2}$, $2xe^{1+x^2}\ln 10$; **c)** $1/\sqrt{1-x^2}$, $2x/\sqrt{1-x^4}$, $1/(2\sqrt{x}\sqrt{1-x})$, $-1/\sqrt{1-x^2}$; **d)** $1/(1+x^2)$, $2x/(1+x^4)$, $1/[2\sqrt{x}(1+x)]$, $-1/(1+x^2)$; **e)** $0, 0, 0, 0$.

7.36. **a)** $\cos x + \sin x$, **b)** $1/(\sin x\cos x)^2$, **c)** $\sin x + x\cos x$, **d)** $\frac{\sin x + x\cos x}{1+\operatorname{tg} x} - \frac{x\sin x}{1+\sin 2x}$, **e)** $e^x(\sin x + \cos x)$, **f)** $e^x(1+x)$, **g)** $2e^x/(1-e^x)^2$, **h)** $2^x\ln 2$, **i)** $1+\ln x$, **j)** $(\ln x - 1)/\ln^2 x$, **k)** $2/\sin 2x$, **l)** $\frac{1/x + x - 2x\ln x}{(1+x^2)^2}$, **m)** $\frac{2(1-\cos x - x\sin x)}{(1-\cos x)^2}$, **n)** $\frac{-1+\sin x}{\cos^2 x}$, **o)** $2/(1+\sin 2x)$, **p)** $e^{-x}(-\sin x + \cos x)$, **q)** $xe^x/(1+x)^2$, **r)** $(1-x)e^{-x}$, **s)** $(\cos x)e^{\sin x}$, **t)** $(5^x - 5^{-x})\ln 5$, **u)** $\frac{1}{2}e^{x/2}$, **v)** $2x\exp x^2$, **w)** $\frac{2}{x^3}\exp(-1/x^2)$, **z)** $\operatorname{sgn} x, x \neq 0$.

7.37. Dla $n = 0$ funkcja nieciągła. Dla $n = 1$ funkcja ciągła, pochodna nie istnieje. Dla $n = 2$ funkcja ciągła, pochodna istnieje i jest nieciągła. Dla $n = 3$ funkcja ciągła, pochodna istnieje i jest ciągła.

7.38. **a)** $x^x(1+\ln x)$, **b)** $x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{1}{x}\sin x\right)$,

c) $(\sin x)(\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x)$, **d)** $2x^{\ln x - 1}\ln x$,

e) $x^{(e^x)}e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$, **f)** $(\ln x)^x(1/\ln x + \ln\ln x)$,

g) $(\sin x)^{1+\cos x}(\operatorname{ctg}^2 x - \ln \sin x)$, **h)** $\frac{-2x^x(\ln x + 1)}{(x^x-1)^2}$,

i) $\cos(x^x)\,x^x(\ln x + 1)$.

7.39. **a)** $-x^{-2}+2x^{-3}-3x^{-4}$, **b)** $\frac{1}{3}x^{-2/3}+\frac{1}{5}x^{-4/5}$, **c)** $-\frac{1}{3}x^{-4/3}$,

d) $x^{-3/4}+x^{-11/12}$, **e)** $-4x^{-5}+4x^{-3}$, **f)** $\frac{4}{3}x^{1/3}+\frac{3}{4}x^{-1/4}$,

g) $\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{1}{6}x^{-5/6}$, **h)** $\frac{5}{9}x^{-4/9}$.

7.40. Funkcja f jest parzysta, gdy $f(-x) = f(x)$. Łatwo sprawdzić, że dla funkcji ch równość taka zachodzi. Funkcja f jest nieparzysta, gdy $f(-x) = -f(x)$. Dla funkcji sh równość taka zachodzi, a także dla funkcji th i cth.

7.41.–7.42. Należy skorzystać z definicji funkcji hiperbolicznych.

7.43. **a)** $\operatorname{sh} 2x$, **b)** $\operatorname{th}^2 x$, **c)** $-4/\operatorname{sh}^2 2x$, **d)** $\operatorname{th} x$, **e)** $1/(x \operatorname{ch}^2 \ln x)$,

f) $\operatorname{ch} x \operatorname{sh} \operatorname{sh} x$, **g)** $1/\operatorname{ch} 2x$, **h)** $\frac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{ch} x}$ dla $x \neq 0$.

7.44. **a)** $y = \operatorname{arsh} x$, $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$; podstawiając $z = e^y$, otrzymujemy

$$x = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad \text{stąd} \quad z^2 - 2xz - 1 = 0, \quad z = x + \sqrt{x^2+1},$$

$\operatorname{arsh} x = y = \ln z = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; **b)**, **c)**, **d)** — dowody podobne.

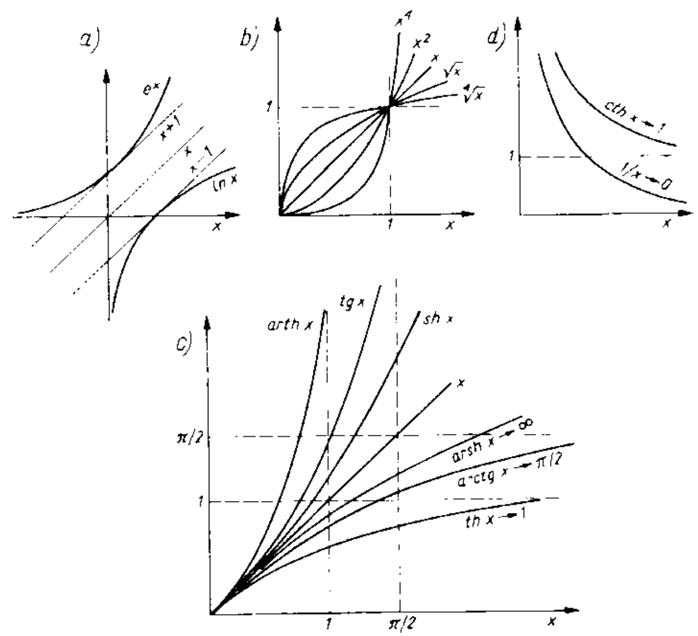
7.45. **a)** $(\operatorname{arsh} x)' = 1/(\operatorname{sh} y)' = 1/\operatorname{ch} y = 1/\sqrt{\operatorname{sh}^2 y - 1} = 1/\sqrt{x^2-1}$; **b)**, **c)**, **d)** — dowody podobne.

7.46. **a)** $\operatorname{arsh} x + x/\sqrt{x^2+1}$, **b)** $2x/\sqrt{x^4+1}$, **c)** $\operatorname{arth} x + x/(1-x^2)$ dla $|x| < 1$; **d)** $1/(1-x^2)$ dla $|1/x| < 1$, czyli dla $|x| > 1$;

e) $2x \operatorname{arch} x + x^2/\sqrt{x^2-1}$ dla $x > 1$; **f)** $e^x/\sqrt{e^{2x}-1}$ dla $e^{2x} > 1$, czyli dla $x > 0$; **g)** $1/(1-x^2)$ dla $|x| < 1$; **h)** $e^x/(1-e^{2x})$ dla $e^{2x} < 1$, czyli dla $x < 0$.

7.47. **a)** $\log_{1/2} x < 0 < \lg x < \log_3 x < \ln x < \log_2 x$, **b)** $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4 = 0{,}7854$, $\sin 1 = 0{,}8415$, 1, $\operatorname{tg} 1 = 1{,}5574$, $\arcsin 1 = \pi/2 = 1{,}5708$.

7.48.



Rys. 7.48

7.49. **a)** $\pi/6$, $5\pi/6$, 0, $3\pi/4$, $-\pi/4$; **b)** $-\pi/2$, 0, $\pi/3$, $\pi/2$, $\pi/4$.

7.50. **a)** 0, **b)** $-\pi/2$, **c)** $-\pi/2$, **d)** $\pi/4$, **e)** $\pi/2$, **f)** $-\pi/2$, **g)** 1, **h)** 1, **i)** 0, **j)** $1/3$, **k)** 2, **l)** 1, **m)** granica prawostronna $-\infty$, lewostronna $+\infty$, **n)** 1, **o)** 0, **p)** 1, **q)** -1, **r)** 1, **s)** -1, **t)** 0, **u)** ∞, **v)** $\ln 2$, **w)** 1, **y)** 1, **z)** 1.

7.51. **a)** $4/\sin 2x$, $1/[2(1+x^2)]$, $-\frac{7}{6}\sqrt[6]{1/x^{13}}$, $\operatorname{sh}^2 x + x\operatorname{sh} 2x$;

b) $\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$, $x^{x+1}\left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right)$, $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\frac{-\sqrt{2}\operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$, $x \neq 0$;

c) $1+\frac{x\operatorname{arsh} x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{4x}{1-x^4}$, $\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$, $\frac{1}{1+x^2}$;

d) $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$, $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{-5}{3\sqrt[3]{x^8}}$, e^x;

e) $-\frac{5\sqrt[6]{x}}{6x^2}$, $x^{1-x}\left(\ln\frac{1}{x}+\frac{1-x}{x}\right)$, $\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^4 x}}$, $\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \neq 0$;

f) $1-2x\operatorname{arth} x$, $\frac{1}{1-4x^2}$, $\frac{17}{12}\sqrt[12]{x^5}$, $\frac{2}{1-x^2}$;

g) $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$, $\frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$, $\frac{3}{2}\sqrt{x}$, $\frac{1}{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}$;

h) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$, $(1-x)^x\left(\ln(1-x)+\frac{x}{x-1}\right)$, $-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $\frac{-2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}$, $x \neq 0$;

i) $2x\operatorname{arsh} x+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{\operatorname{ctg} x}{1-\sin 2x}$, $\frac{5}{6}\sqrt[6]{\frac{1}{x}}$, $\arccos x$;

j) $\frac{1}{\sin x\cos x\ln\operatorname{tg} x}$, $\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, $\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$, $\operatorname{ch}^2 x + x\operatorname{sh} 2x$;

k) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$, $(x+1)^x\left[\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}\right]$, $\frac{1}{8(x+\sqrt{x})}$, $\frac{\sqrt{2}\operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$, $x \neq 0$;

l) $\sqrt{1+x^2}+2x\operatorname{arsh} x$, $\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$, $\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, $\frac{-\pi/2}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x}$.

7.52. **a)** $y=-62+\frac{1}{2}x$, $\Sigma|\delta y|=26$; **b)** $y=-\frac{80}{7}+\frac{3}{14}x$, $\Sigma|\delta y|=6$.

7.53. $y=\frac{2}{3}+\frac{7}{6}x$, $\Sigma\delta y^2=\frac{16}{9}$. **7.54.** $y=\frac{55}{32}-\frac{17}{8}x+\frac{11}{8}x^2, \Sigma\delta y^2 = 7+\frac{135}{512}$.

7.55. $y=1+x$, $\Sigma\delta y^2=\frac{3}{2}$. **7.56.** $y=\frac{1}{4}-\frac{23}{20}x+\frac{29}{20}x^2$.

Odpowiedzi do rozdziału 8

8.1. **a)** $d(x^3)=3x^2dx$, **b)** $d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{dx}{x^2}$, **c)** $d(xe^x)=e^x(1+x)\,dx$, **d)** $d[\ln(1+x^2)]=\frac{2x\,dx}{1+x^2}$, **e)** $d(\operatorname{arctg} x)=\frac{dx}{1+x^2}$.

8.2. **a)** $\Delta f=0{,}751$, $df=0{,}7$, $r=0{,}051$; **b)** $r=0{,}000501$, **c)** $r=-1/401$, **d)** $r=-1/39800$, **e)** Czterocyfrowe tablice trygonometryczne nie wykazują różnicy między Δf i df. Korzystając ze wzoru $\operatorname{arctg} x = x - x^3/3 + x^5/5 - \ldots$, otrzymujemy $\Delta f = \operatorname{arctg} 0{,}01 = 0{,}009999669$, stąd $r=-0{,}000000331$.

8.3. Stosujemy wzór $f(x+dx)\approx f(x)+f'(x)\,dx$. **a)** $\sqrt[3]{1{,}06}\approx 1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}06 = 1{,}02$, **b)** 0,5151, **c)** 0,8104, **d)** 0,05.

8.4. $dl=0{,}0223$ m.

8.5. $V=x^3$, $dV=3x^2dx$, $\frac{dV}{V}=3\frac{dx}{x}=0{,}0075$, $dV=0{,}0075\,V=0{,}06$.

8.6. Odpowiedzi podajemy w kolejności: sup, inf, max, min. Znak $\sim$ oznacza, że dana wielkość nie istnieje. **a)** 9, 0, 9, 0; **b)** 9, 0, $\sim$, 0; **c)** 1, -1, 1, -1; **d)** $\sim, \sim, \sim, \sim$; **e)** $\sim$, 0, $\sim$, $\sim$; **f)** 1, 0, 1, $\sim$; **g)** $\sim, \sim, \sim, \sim$; **h)** 1, 0, $\sim$, 0.

8.7. **a)** min: $x=2$, **b)** min: $x=-5/2$, **c)** max: $x=7/2$, min: $x=2$, min: $x=5$; **d)** ekstremum (także niewłaściwe) nie występuje. **e)** min: $x=0$, **f)** min: $x=-1$, min: $x=1$; **g)** max: $x=0$, min: $x=-1$, min: $x=1$; **h)** ekstremum nie występuje. W każdym punkcie $x\neq k\pi$ występuje ekstremum niewłaściwe.

i) max: $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathscr{Z}$; w każdym z pozostałych punktów występuje ekstremum niewłaściwe. **j)** max: $|x| = 1/k$, min: $|x| = 2/(2k-1)$, $k \in \mathscr{N}$; w punkcie $x = 0$ występuje minimum niewłaściwe.

8.8. $c = (a+b)/2$.

8.9. $c = \pm\sqrt{(a^2+ab+b^2)/3}$. Stąd i z warunku $a < c < b$ otrzymujemy:
a) $c = \sqrt{3}$, **b)** $c = -\sqrt{7}$, **c)** $c = \sqrt{3}$ lub $c = -\sqrt{3}$, **d)** $c = 1$.

8.10. $c_1 = \pi/4$.

8.11. **a)** Stosując twierdzenie Lagrange'a do funkcji $\ln x$, otrzymujemy $\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{c}$, stąd $\ln\frac{b}{a} = \frac{1}{c}(b-a)$. Ponieważ $0 < a < c < b$, więc $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$, zatem $\frac{1}{b}(b-a) < \ln\frac{b}{a} < \frac{1}{a}(b-a)$.
b), c) Dowody podobne.

8.12. Stosujemy oznaczenia: $\nearrow$ funkcja rosnąca, $\searrow$ funkcja malejąca.
a) $\nearrow(-\infty; -1)$, $\searrow(-1; 5)$, $\nearrow(5; \infty)$;
b) $\searrow(-\infty; -1)$, $\nearrow(-1; 1)$, $\searrow(1; \infty)$;
c) $\nearrow(-\infty; -1-\sqrt{2})$, $\searrow(-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2})$, $\nearrow(-1+\sqrt{2}; \infty)$;
d) $\searrow(0; 1/e^2)$, $\nearrow(1/e^2; \infty)$;
e) $\searrow(0; e)$, $\nearrow(e, \infty)$;
f) $\nearrow(-2\sqrt{2}; -2)$, $\searrow(-2; 0)$; $\nearrow(0; 2)$, $\searrow(2; 2\sqrt{2})$;
g) $\searrow(-\infty; 1)$, $\nearrow(1; \infty)$;
h) $\searrow(-1; 1)$;
i) $\nearrow(-\infty; 1-\sqrt{7})$, $\searrow(1-\sqrt{7}; -1)$, $\searrow(-1; 2)$, $\searrow(2; 1+\sqrt{7})$, $\nearrow(1+\sqrt{7}; \infty)$;
j) $\searrow(-\infty; 0)$, $\nearrow(0; 2)$, $\nearrow(2; 2\sqrt[3]{4})$, $\searrow(2\sqrt[3]{4}; \infty)$;
k) $\nearrow(0; 1/e)$, $\searrow(1/e; e)$, $\nearrow(e; \infty)$;
l) $\searrow(-\infty; -1)$, $\searrow(1; \infty)$;
m) $\searrow(-\infty; -3/2)$, $\nearrow(-3/2; 0)$, $\searrow(0; 3/2)$, $\nearrow(3/2; \infty)$;
n) $\nearrow(-\infty; -1)$, $\nearrow(-1; 1)$, $\nearrow(1; \infty)$;
o) $\nearrow(-\pi/4 + k\pi; 3\pi/4 + k\pi)$, $k \in \mathscr{Z}$;
p) $\searrow(-\infty; -1)$, $\nearrow(-1; 1)$, $\searrow(1; \infty)$;
r) $\searrow(-\infty; 0)$, $\nearrow(0; \infty)$;

s) $\nearrow(-\infty; \ln\sqrt{2+\sqrt{5}})$, $\searrow(\ln\sqrt{2+\sqrt{5}}; \infty)$;
t) $\searrow(0; 1/e)$, $\nearrow(1/e; \infty)$.

8.13. **a)** max: $f(-1) = 2$, min: $f(1) = -2$; **b)** max: $f(0) = 0$,
c) min: $f(1/2) = e^2/4$, **d)** ekstremum nie istnieje,
e) max: $f(-1/\sqrt{2}) = \sqrt[3]{4}$, min: $f(0) = 1$, max: $f(1/\sqrt{2}) = \sqrt[3]{4}$;
f) min: $f(-1) = 1$, max: $f(0) = 2$, min: $f(1) = 1$; **g)** max: $f(0) = 1$;
h) min: $f(-\sqrt[4]{1/3}) = -3/(4\sqrt[4]{3})$, max: $f(\sqrt[4]{1/3}) = 3/(4\sqrt[4]{3})$;
i) min: $f(\pi/2 + 2k\pi) = 1$, $k \in \mathscr{Z}$;
j) max: $f(2k\pi) = e - 1$, min: $f(2k\pi + \pi) = 1 + 1/e$, $k \in \mathscr{Z}$;
k) min: $f(-1) = 1/3$, max: $f(1) = 3$; **l)** min: $f(1) = e$,
m) max: $f(-1) = 1/e$, min: $f(0) = 0$, max: $f(1) = 1/e$.

8.14. **a)** $f(1) = 11/6$, $f(0) = -3/2$; **b)** $f(-1) = 4$, $f(-2) = -22$;
c) $f(4) = 3/5$, $f(0) = -1$; **d)** $f(-1) = \sqrt{5}$, $f(1) = 1$;
e) $f(1/\sqrt{2}) = \sqrt[3]{4}$, $f(0) = 1$.

8.15. $\pi/3$. **8.16.** $(\pm\sqrt{19/2}, 19/2)$. **8.17.** 24. **8.18.** 4/9.

8.19. $x = h = \sqrt[3]{3V/(5\pi)}$. **8.20.** $r = R$. **8.21.** $x = 12$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{7}{24}$.

8.22. **a)** 2, **b)** 1/2, **c)** 1/3, **d)** 1/3, **e)** 0, **f)** 1/2, **g)** ∞, **h)** 1, **i)** 1/2, **j)** 1/2, **k)** 1, **l)** 1, **m)** 1.

8.23. **a)** 1, **b)** 1. **c)** $1/(na^{n-1})$, **d)** 1, **e)** 0, **f)** $-\infty$, **g)** 0, **h)** -1, **i)** 2/3, **j)** 0, **k)** 1, **l)** 1, **m)** 1, **n)** 1, **o)** $e^{-1/6}$, **p)** $e^{-1/3}$.

8.24. **a)** 1, **b)** 2, **c)** 1, **d)** 1, **e)** $-\infty$, **f)** 1, **g)** 0, **h)** 1, **i)** $-1/3$, **j)** ∞, **k)** e^{-1}, **l)** $e^{1/2}$, **m)** 0, **n)** $e^{2/\pi}$, **o)** e^{-1}, **p)** $-e/2$, **r)** $-1/2$, **s)** $\exp\frac{\ln^2 a - \ln^2 b}{2}$.

8.25. **a)** $1/x$, **b)** $(x+2)e^x$, **c)** $-2b^2\cos 2bx$, **d)** $2b^2\cos 2bx$, **e)** $(4x^2-2)e^{-x^2}$, **f)** $-4\cos x/\sin^3 x$, **g)** $2x(x^2+3)/(1-x^2)^3$, **h)** $e^{ax}[(a^2-b^2)\sin bx + 2ab\cos bx]$, **i)** $e^{ax}[(a^2-b^2)\cos bx - 2ab\sin bx]$.

8.26. **a)** $5!x$, $5!$, 0, 0; **b)** $b^4\sin bx$, $b^5\cos bx$, $-b^6\sin bx$, $-b^7\cos bx$; **c)** a^4e^{ax}, a^5e^{ax}, a^6e^{ax}, a^7e^{ax}.

8.27. a) e^x, b) $(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$, c) $\sin(x+n\pi/2)$, d) $\operatorname{sh}x$ dla n parzystych, $\operatorname{ch}x$ dla n nieparzystych; e) $(-1)^n e^x$, f) $(-1)^n n!\,x^{-(n+1)}$, g) $\cos(x+n\pi/2)$, h) $\operatorname{ch}x$ dla n parzystych, $\operatorname{sh}x$ dla n nieparzystych; i) xe^x+ne^x, j) $1+\ln x$ dla $n=1$ oraz $(-1)^n(n-2)!\,x^{-(n-1)}$ dla $n\geqslant 2$, k) $-2^{n-1}\cos(2x+n\pi/2)$, l) $2^{n-1}\cos(2x+n\pi/2)$, m) $\sqrt{2^n}\,e^x\sin(x+n\pi/4)$, n) $\sqrt{2^n}\,e^x\cos(x+n\pi/4)$.

8.28. a) $e^x(x^2+30x+210)$, b) $x^3\operatorname{sh}x+30x^2\operatorname{ch}x+270x\operatorname{sh}x+720\operatorname{ch}x$, c) $2^7e^x(\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x)$, d) $e^x(x^{-1}-4x^{-2}+12x^{-3}-24x^{-4}+24x^{-5})$.

8.29. $e^x=e^{x_0}+e^{x_0}(x-x_0)+\dfrac{1}{2}e^{\xi}(x-x_0)^2$.

8.30. a) $e^x=1+x+\dfrac{e^{\theta x}}{2}x^2$, b) $e^{-x}=1-x+\dfrac{e^{-\theta x}}{2}x^2$,

c) $\sin x=x-\dfrac{\sin\theta x}{2}x^2$, d) $\cos x=1-\dfrac{\cos\theta x}{2}x^2$,

e) $\operatorname{sh}x=x+\dfrac{\operatorname{sh}\theta x}{2}x^2$, f) $\operatorname{ch}x=1+\dfrac{\operatorname{ch}\theta x}{2}x^2$,

g) $\operatorname{arctg}x=x-\dfrac{\theta x}{[1+(\theta x)^2]^2}x^2$, h) $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2(1+\theta x)^2}x^2$.

8.31. Stosujemy oznaczenia: $\frown$ funkcja wypukła ku górze, $\smile$ ku dołowi

a) $\smile(-\infty;2)$, $\frown(2;\infty)$; b) $\smile(-\infty;1)$, $\frown(1;3)$, $\smile(3;\infty)$; c) $\smile(-\infty;\infty)$, d) $\smile(-\infty;-4)$, $\frown(-4;-1)$, $\smile(-1;2)$, $\frown(2;\infty)$; e) $\smile(0;\sqrt{e})$, $\frown(\sqrt{e};\infty)$;

f) $\frown\left(\exp\dfrac{(-1+8k)\pi}{4};\exp\dfrac{(3+8k)\pi}{4}\right)$, $\smile\left(\exp\dfrac{(3+8k)\pi}{4};\exp\dfrac{(7+8k)\pi}{4}\right)$, $k\in\mathscr{Z}$;

g) $\smile(0;\infty)$, h) $\frown(-\infty;-1)$, $\smile(1;\infty)$; i) $\frown(-2\sqrt{2};0)$, $\frown(0;2\sqrt{2})$.

8.32. a) $2/3$, b) $\pm\sqrt{1/2}$, c) ± 1, d) 1, e) 0, f) 6, g) 0, h) 0.

8.33. Wskazówka. Skorzystać z wypukłości funkcji $y=x\ln x$.

8.34. a) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{e^{\theta x}}{4!}x^4$, b) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{\cos\theta x}{4!}x^4$,

c) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{\sin\theta x}{4!}x^4$.

8.35. a) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{e^{\theta x}}{n!}x^n$,

b) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots+\dfrac{\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2}}{(n-1)!}x^{n-1}+\dfrac{\cos\left(\theta x+n\dfrac{\pi}{2}\right)}{n!}x^n$,

c) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots+\dfrac{\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2}}{(n-1)!}x^{n-1}+\dfrac{\sin\left(\theta x+n\dfrac{\pi}{2}\right)}{n!}x^n$.

8.36. a) $\min: f(-1)=-1$, $\max: f(0)=0$, $\min: f(1)=-1$, punkty (argumenty) przegięcia: $-1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$; b) $\max: f(-1)=2$, $\min: f(1)=-2$, punkty przegięcia: $-1/\sqrt{2}$, 0, $1/\sqrt{2}$; c) $\min: f(-1)=-1$, $\max: f(0)=0$, $\min: f(1)=-1$, punkty przegięcia: $-\sqrt{3/5}$, $\sqrt{3/5}$.

8.37. Dla funkcji a), b), c), d) podajemy pełne rozwiązania i wykresy, dla pozostałych podajemy szkice wykresów.

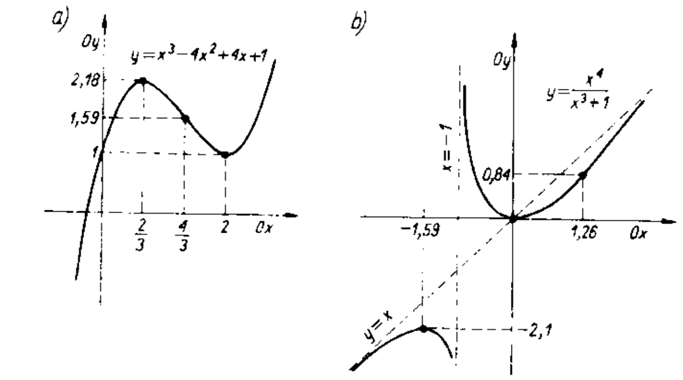
a) $f(x)=x^3-4x^2+4x+1$; 1° $D=(-\infty,\infty)$, 2° $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, 3° asymptot nie ma, 4° $f'(x)=3x^2-8x+4$ dla $x\in D$, 5° $f'(x)=0$ dla $x=2/3$ i dla $x=2$, 6° f: $\nearrow(-\infty;2/3)$, $\searrow(2/3;2)$, $\nearrow(2;\infty)$; $\max: f(2/3)=59/27$, $\min: f(2)=1$; 7° $f''(x)=6x-8$ dla $x\in D$, 8° $f''(x)=0$ dla $x=4/3$, 9° f: $\frown(-\infty;4/3)$, $\smile(4/3;\infty)$; argument przegięcia $x=4/3$; 10° $f(4/3)=43/27$, $f'(4/3)=-4/3$.

b) $f(x)=x^4/(x^3+1)$; 1° $D=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$, 2° $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$; 3° prosta $x=-1$ jest asymptotą pionową obustronną, prosta $y=x$ jest asymptotą ukośną dla $x\to\infty$ i dla $x\to-\infty$, 4° $f'(x)=x^3(x^3+4)/(x^3+1)^2$ dla $x\in D$, 5° $f'(x)=0$ dla $x=0$ i dla $x=\sqrt[3]{-4}=1{,}59$, 6° f: $\nearrow(-\infty;\sqrt[3]{-4})$, $\searrow(\sqrt[3]{-4};-1)$,

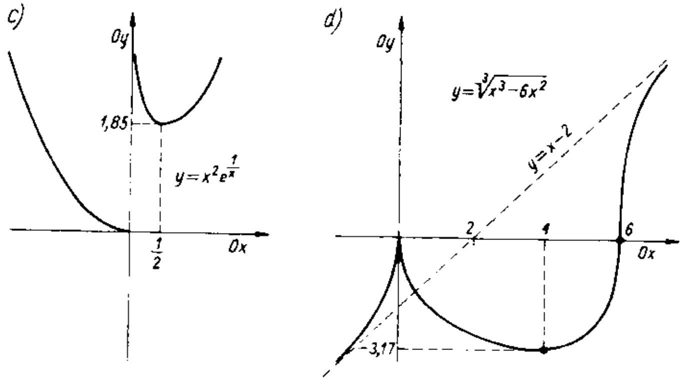
$\searrow(-1;0)$, $\nearrow(0;\infty)$, max: $f(\sqrt[3]{-4}) = -4\sqrt[3]{4}/3 = -2{,}1$, min: $f(0) = 0$; 7° $f''(x) = -6x^2(x^3-2)/(x^3+1)^3$ dla $x \in D$, 8° $f''(x) = 0$ dla $x = 0$ i dla $x = \sqrt[3]{2} = 1{,}26$, 9° f: $\cup(-\infty; -1)$, $\cup(-1; \sqrt[3]{2})$, $\cap(\sqrt[3]{2}; \infty)$; argument przegięcia $x = \sqrt[3]{2}$; 10° $f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{16}/3 = 0{,}84$, $f'(\sqrt[3]{2}) = 4/3$.

c) $f(x) = x^2 e^{1/x}$; 1° $D = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, 2° $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, 3° asymptota pionowa prawostronna $x = 0$, 4° $f'(x) = (2x-1)e^{1/x}$ dla $x \in D$, 5° $f'(0) = 0$ dla $x = 1/2$, 6° $\searrow(-\infty; 0)$, $\searrow(0; 1/2)$, $\nearrow(1/2; \infty)$, min: $f(1/2) = e^2/4 = 1{,}85$; 7° $f''(x) = (2x^2-2x+1)e^{1/x}/x^2$ dla $x \in D$, 8° $f''(x) \neq 0$, 9° f: $\cup(-\infty; 0)$, $\cup(0; \infty)$, punktu przegięcia nie ma; 11° $\lim\limits_{x \to 0-0} f'(x) = 0$; graniczny lewostronny kierunek stycznej w punkcie $(0, 0)$ ma współczynnik kierunkowy $\operatorname{tg}\alpha = 0$, czyli jest równoległy do osi Ox.

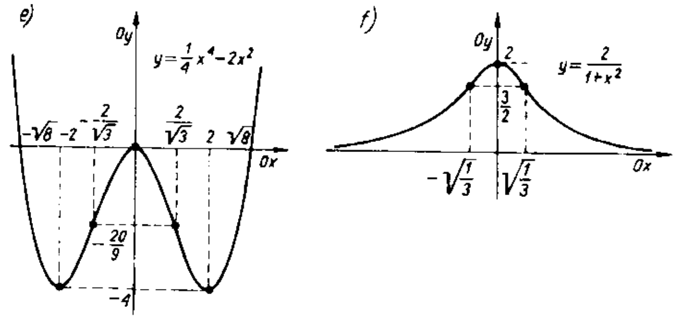
d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$; 1° $D = (-\infty; \infty)$, funkcja f jest ciągła; 2° $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; 3° asymptota ukośna dla $x \to \infty$ i dla $x \to -\infty$ ma równanie $y = x - 2$; 4° $f'(x) = (x-4)/\sqrt[3]{x(x-6)^2}$ dla $x \in D$ z wyjątkiem punktów $x = 0$ i $x = 6$, w których f' nie istnieje; 5° $f'(x) = 0$ dla $x = 4$; 6° f: $\nearrow(-\infty; 0)$, $\searrow(0; 4)$, $\nearrow(4; 6)$, $\nearrow(6; \infty)$; max: $f(0) = 0$, min: $f(4) = \sqrt[3]{-32} = -3{,}175$; 7° $f''(x) = -8x^2/\sqrt[3]{x^{10}(x-6)^5}$ dla $x \in D$ z wyjątkiem punktów $x = 0$ i $x = 6$, w których f'' nie istnieje; 8° $f''(x) \neq 0$, 9° f: $\cup(-\infty; 0)$, $\cup(0; 6)$, $\cap(6; \infty)$; argument przegięcia $x = 6$; 10° $f(6) = 0$; $f'(6) = \infty$, styczna w punkcie przegięcia jest równoległa do osi Oy; 11° $\lim\limits_{x \to 0-0} f'(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} f'(x) = -\infty$; wykres ma w punkcie $(0, 0)$ ostrze ze styczną równoległą do osi Oy.



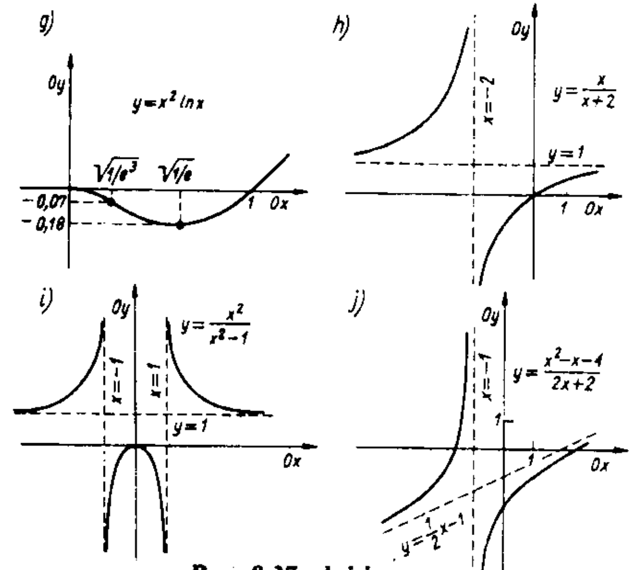
Rys. 8.37a,b



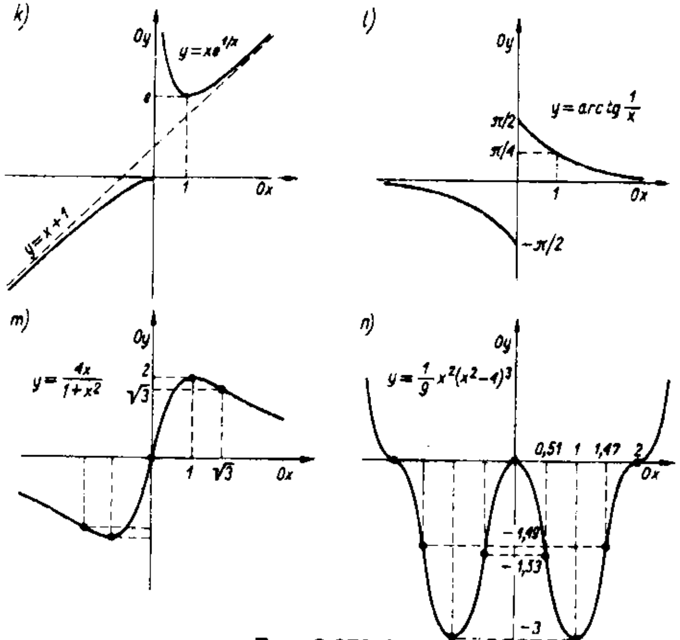
Rys. 8.37c,d



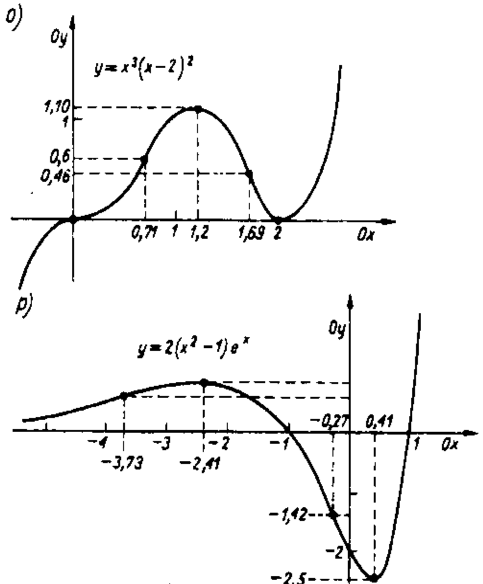
Rys. 8.37e,f



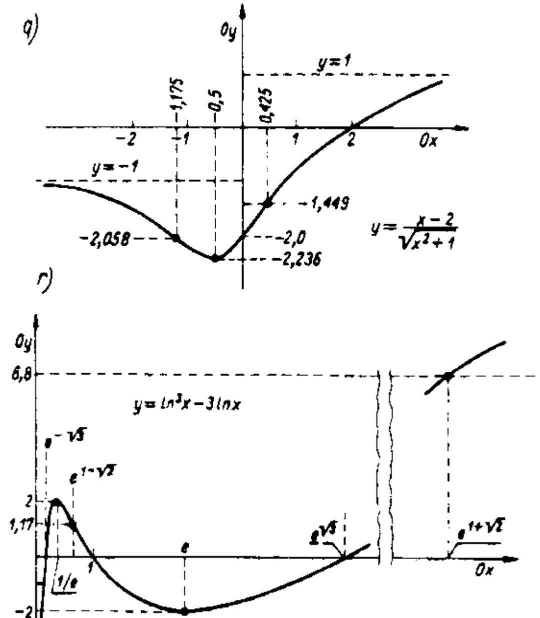
Rys. 8.37g,h,i,j



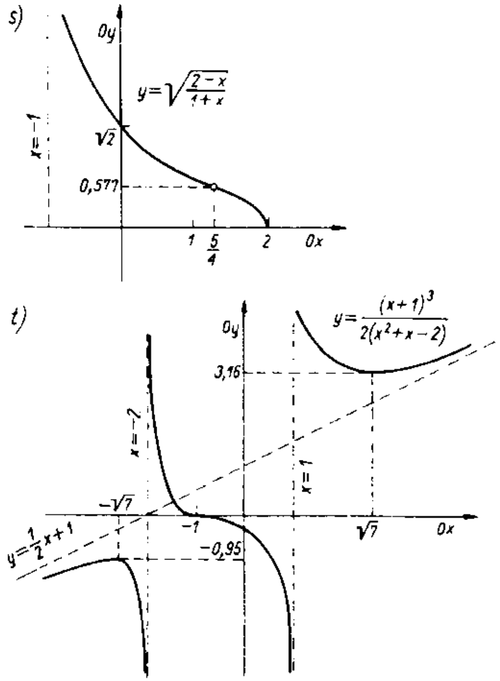
Rys. 8.37k,l,m,n



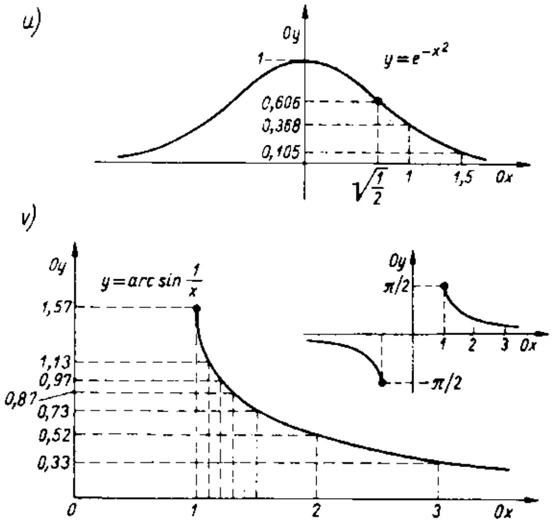
Rys. 8.37o,p



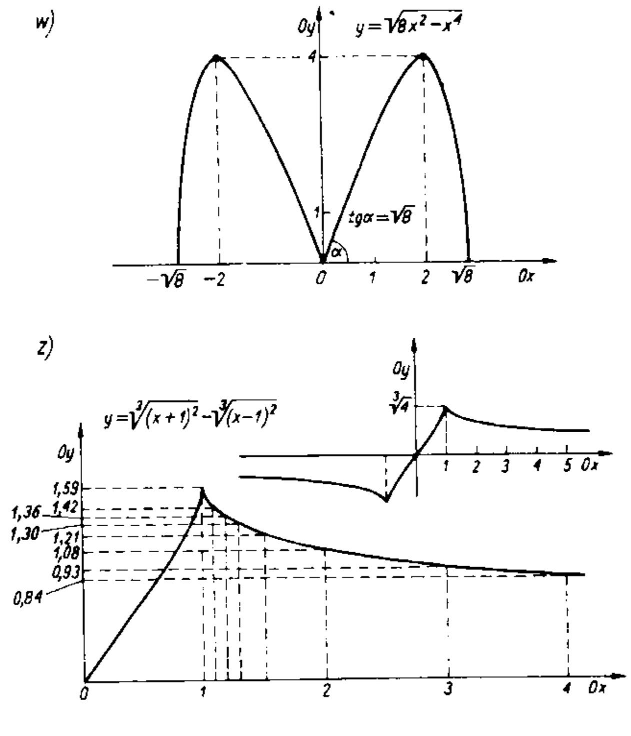
Rys. 8.37q,r



Rys. 8.37s,t



Rys. 8.37u,v



Rys. 8.37w,z

8.38. W danej nierówności dla $x = 0$ lewa strona jest równa prawej. Wystarczy wykazać, że dla $x > 0$ lewa strona rośnie szybciej niż prawa. To zaś zachodzi, jeśli pochodna lewej strony jest większa od pochodnej prawej strony.

8.39. Prosta $y = x-1$ jest w punkcie $(1, 0)$ wspólną styczną krzywej $y = \ln x$ i krzywej $y = \frac{1}{2}x^2-1$, które są wypukłe: pierwsza ku górze, druga ku dołowi, i leżą po różnych stronach stycznej.

8.40. **a)** $e^{-x} = 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\dots \quad x\in\mathscr{R}$

b) $e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\dots \quad x\in\mathscr{R}$

c) $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \qquad x \in \mathscr{R}$

d) $xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \dots \qquad x \in \mathscr{R}$

e) $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad x \in \mathscr{R}$

f) $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad x \in \mathscr{R}$

g) $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \qquad |x| < 1$

h) $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \qquad |x| < 1$

i) $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots \qquad |x| < 1$

j) $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots \qquad |x| < 1$

k) $(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \dots \qquad |x| < 1$

l) $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots \qquad |x| < 1$

m) $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \dots \qquad |x| < 1$

n) $(1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 - \dots \qquad |x| < 1$

o) $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \dots \qquad |x| < 1$

p) $(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \dots \qquad |x| < 1$

Odpowiedzi do rozdziału 9

9.1. **a)** x, y dowolne (cała płaszczyzna), **b)** $xy \geqslant 0$ (ćwiartka I i ćwiartka III wraz z osiami układu), **c)** $-1 \leqslant \frac{x}{x+y} \leqslant 1$ (obszary kątów rozwartych między prostą $y = 0$ i prostą $y = -2x$), **d)** $xy \neq 0$ (cztery ćwiartki płaszczyzny z wyłączeniem osi układu), **e)** $x^2 + y^2 < 0$ (cztery ćwiartki płaszczyzny z wyłączeniem osi układu), **e)** $x^2 + y^2 < 1$ (wnętrze koła), **f)** $-1 < x < 1$ (pas między prostą $x = 1$ i prostą $x = -1$), **g)** $y \neq 0$ (półpłaszczyzna $y > 0$ i półpłaszczyzna $y < 0$), **h)** $y \neq 0$ (półpłaszczyzna $y > 0$ i półpłaszczyzna $y < 0$), **i)** $x^2 + y^2 > 1$ zewnętrze koła.

9.2. **a)** Proste równoległe, **b)** proste przechodzące przez początek układu, z wyłączeniem początku układu; **c)** osie układu i hiperbole, których asymptotami są osie układu.

9.3. **a)** $\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{P\in D} (0 < PQ < \delta \Rightarrow |f(P) - g| < \varepsilon)$

b) $\bigwedge_{A} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{P\in D} (0 < PQ < \delta \Rightarrow f(P) > A)$

c) $\bigwedge_{A} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{P\in D} (0 < PQ < \delta \Rightarrow f(P) < A)$

9.4. **a)** Granicą jest 0, ponieważ podstawiając $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, otrzymujemy $z = r^4\cos^3\varphi\sin^3\varphi$, a to wyrażenie dąży do 0, gdy $r \to 0$. **b)** Granica nie istnieje, ponieważ wzdłuż prostej $y = x$ jest $z = 2$, a wzdłuż prostej $y = -x$ jest $z = -2$. **c)** Granicą jest ∞, ponieważ upraszczając przez $x - y$, dla $y \neq x$, otrzymujemy $z = 1/(x^2 + xy + y^2) = 1/[(x + y/2)^2 + 3y^2/4] \to \infty$ dla $x \to 0$, $y \to 0$. **d)** Granicą jest 2, ponieważ mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt{xy+1} + 1$ dla $xy \neq 0$, otrzymujemy $z = \sqrt{xy+1} + 1 \to 2$ dla $x \to 0$, $y \to 0$. **e)** 1, **f)** ∞, **g)** 0, **h)** granica nie istnieje. **i)** Granica nie istnieje, ponieważ wzdłuż prostej $x + y = kx$, $k \neq 0$, mamy $z = kx/(1+k) \to 0$ dla $x \to 0$, natomiast wzdłuż krzywej $x + y = x^2$ mamy $z = x - 1 \to -1$ dla $x \to 0$, a wzdłuż krzywej $x + y = -x^4$ mamy $z = x + 1/x^2 \to \infty$ dla $x \to 0$. **j)** 0, **k)** Granica nie istnieje, **l)** ∞.

9.5. $z_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[z(x+h, y) - z(x, y)]$

$$z_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[z(x, y+h) - z(x, y)]$$

$$z_{xx}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[z_x(x+h, y) - z_x(x, y)]$$

$$z_{xy}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[z_x(x, y+h) - z_x(x, y)]$$

$$z_{yx}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[z_y(x+h, y) - z_y(x, y)]$$

$$z_{yy}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[z_y(x, y+h) - z_y(x, y)]$$

9.6. **a)** $3x^2y - y^3,\ x^3 - 3xy^2$; **b)** $2x/y - y/x^2,\ -x^2/y^2 + 1/x$;

c) $\sqrt{y} - y/(3x\sqrt[3]{x}),\ x/(2\sqrt{y}) + 1/\sqrt[3]{x}$;

d) $1/\sqrt{x^2+y^2},\ y/[\sqrt{x^2+y^2}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})]$; **e)** $yx^{y-1},\ x^y \ln x$;

f) $y^2(1+xy)^{y-1},\ (1+xy)^y\left[\ln(1+xy) + \dfrac{xy}{1+xy}\right]$;

g) $y\cos(x+y) - xy\sin(x+y),\ x\cos(x+y) - xy\sin(x+y)$;

h) $(-1/y)\,e^{-x/y},\ (x/y^2)\,e^{-x/y}$;

i) $x|y|\sqrt{2}/w,\ -x^2y\sqrt{2}/(|y|\,w)$, gdzie $w = (x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}$;

j) $4x^3 - 8xy^2,\ 4y^2 - 8x^2y$;

k) $x(x^3+3xy^2-2y^3)/(x^2+y^2)^2,\ y(y^3+3x^2y-2x^3)/(x^2+y^2)^2$;

l) $2(x+y)/(x^3y),\ 2(x+y)/(xy^3)$; **m)** $1/(x+y^2),\ 2y/(x+y^2)$;

n) $(x/y)^{y-1},\ (x/y)^y[\ln(x/y) - 1]$; **o)** $-y/(x^2+y^2),\ x/(x^2+y^2)$;

p) $\operatorname{tg}^2\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{x^2}{y}\dfrac{2}{\cos^2(x^2/y)},\quad -\dfrac{x^3}{y^2}\dfrac{1}{\cos^2(x^2/y)}$;

q) $\dfrac{-2y}{(x-y)^2}\exp\dfrac{x+y}{x-y},\quad \dfrac{2x}{(x-y)^2}\exp\dfrac{x+y}{x-y}$;

r) $1/(1+x^2),\ 1/(1+y^2)$;

s) $y\ln(x+y) + xy/(x+y),\ x\ln(x+y) + xy/(x+y)$;

t) $-y/(x^2+y^2),\ x/(x^2+y^2)$;

u) $2x(1-r^2-r)/(1+r)^2,\ 2y(1-r^2-r)/(1+r)^2,\ r = \sqrt{x^2+y^2}$;

v) $yw,\ xw$, gdzie $w = [1+\pi xy\cos(\pi xy)]\,e^{\sin(\pi xy)}$;

w) $\sin^2(x+y^2) + x\sin[2(x+y^2)],\ 2xy\sin[2(x+y^2)]$;

x) $|y|/r^2,\ -(\operatorname{sgn} y)\,x/r^2$, gdzie $r^2 = x^2+y^2,\ y \neq 0$;

y) $2z[1+\ln(2x+y)],\ z[1+\ln(2x+y)]$, gdzie $z = (2x+y)^{2x+y}$;

z) $yx^{-2}3^{-y/x}\ln 3,\ -x^{-1}3^{-y/x}\ln 3$.

9.8. **a)** $(2x^2+y^2)/r,\ xy/r,\ (x^2+2y^2)/r$, gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2}$;

b) $2a^2w,\ 2abw,\ 2b^2w$, gdzie $w = \cos[2(ax+by)]$;

c) $-(x^2-y^2)/r^4,\ -2xy/r^4,\ (x^2-y^2)/r^4$, gdzie $r^2 = x^2+y^2$;

d) $-4y/(x+y)^3,\ 2(x-y)/(x+y)^3,\ 4x/(x+y)^3$;

e) $-2x/(1+x^2)^2,\ 0,\ -2y/(1+y^2)^2$.

9.9. $2x/y^3$.

9.10. **a)** $\dfrac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}$, **b)** $6x\cos y - 3y^2\sin x$, **c)** $e^{x+y}(x^3+9x^2+$ $+18x+6)$.

9.13. **a)** $df(x, y) = -\dfrac{y}{x^2}dx + \dfrac{1}{x}dy = \dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2},\ x \neq 0$;

b) $\dfrac{-2x\,dx - 2y\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$, **c)** $\dfrac{-4xy^2\,dx + 4x^2y\,dy}{(x^2-y^2)^2},\ |x| \neq |y|$;

d) $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \neq 0$; **e)** $\dfrac{y\,dx + x\,dy}{1+x^2y^2}$,

f) $\dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2},\ x \neq 0$.

9.14. **a)** $\Delta f = 0,\ df(P_0) = 0$; **b)** $\Delta f = 2,\ df(P_0) = 1$; **c)** $\Delta f =$ $= -2,\ df(P_0) = -4$.

9.15. **a)** $\Delta f = -2/3,\ df(P_0) = 0$; **b)** $\Delta f = -2/9,\ df(P_0) = -4/9$;

c) $\Delta f = 18/81,\ df(P_0) = 8/81$.

9.16. **a)** $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2},\ df(x, y) = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2},\ \tilde{x} = 1 + 0{,}02\theta$,

$\tilde{y} = 2 + 0{,}03\theta$,

$$df(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{(1+0{,}02\theta)\,0{,}02 + (2+0{,}03\theta)\,0{,}03}{(1+0{,}02\theta)^2 + (2+0{,}03\theta)^2}$$

Szukamy liczb a, b takich, żeby $a < df(\tilde{P}) < b$. Jeśli w liczniku powyższego ułamka przyjmiemy $\theta = 1$, a jednocześnie w mianowniku przyjmiemy $\theta = 0$, to otrzymamy $b = 0{,}01626$. Jeśli zaś w liczniku przyjmiemy $\theta = 0$ a w mianowniku $\theta = 1$, to otrzymamy $a = 0{,}01549$. Liczbę a można zaokrąglić w dół, a liczbę b — w górę. Mamy oszacowanie $0{,}0154 < \Delta f < 0{,}0163$

b) $0{,}012 < df(\tilde{x}, \tilde{y}) = \dfrac{0{,}16}{(2-0{,}04\theta)^2+(3+0{,}02\theta)^2} < 0{,}0125$,

c) $0{,}0038 < df(\tilde{x}, \tilde{y}) = \dfrac{0{,}02\,(7-0{,}13\theta)}{[1+(1-0{,}03\theta)^2+(2-0{,}02\theta)^2]^2} < 0{,}0041$.

9.17. **a)** $f(x, y) = x^y$, $df(x, y) = x^y\left(\dfrac{y}{x}dx + \ln x\, dy\right)$, $P_0 = (1, 1)$, $P_1 = (1{,}01,\ 1{,}01)$, $dx = dy = 0{,}01$, $f(P_0) = 1$, $f(P_1) = ?$

Przybliżenie: wzór (10), $df(P_0) = 0{,}01$, $f(P_1) \approx 1{,}01$.
Oszacowanie: $\tilde{P} = (1+0{,}01\theta,\ 1+0{,}01\theta)$, $df(\tilde{P}) = 0{,}01\,(1+0{,}01\theta)^{1+0{,}01\theta}[1+\ln(1+0{,}01\theta)]$.
Ponieważ x^y jest funkcją rosnącą ze względu na x i na y dla $x > 0$ i $y > 1$ i ponieważ $\ln(1+x) < x$ (zob. zad. 8.38), więc $0{,}01 < df(\tilde{P}) < 0{,}01 \cdot 1{,}01^2(1+0{,}01) = 0{,}01030301$. Stąd mamy oszacowanie $1{,}01 < f(P_1) < 1{,}01030301$.

b) Przybliżenie $1{,}02^{1{,}05} \approx 1{,}02$; oszacowanie $1{,}02 < 1{,}02^{1{,}05} < 1{,}023$.

c) $f(x, y) = \sin x \cos y$, $df(x, y) = \cos x \cos y\, dx - \sin x \sin y\, dy$, $P_0 = (30°, 45°)$, $P_1 = (31°, 46°)$, $dx = dy = 1° = \pi/180$, $f(P_0) = \sqrt{2}/4 = 0{,}353553$, $f(P_1) = ?$

Przybliżenie: $df(P_0) = (\cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45°)\dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{180}\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) = 0{,}004516$, $\quad f(P_1) \approx f(P_0) + df(P_0) = 0{,}353553 + 0{,}004516 = 0{,}358069$.

Oszacowanie: $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (30° + \theta 1°, 45° + \theta 1°)$, $df(\tilde{P}) = df(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\cos\tilde{x}\cos\tilde{y} - \sin\tilde{x}\sin\tilde{y})\dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{180}\cos(\tilde{x}+\tilde{y}) = \dfrac{\pi}{180}\cos(75° + \theta 2°)$. Ponieważ w przedziale $(0°;\ 90°)$ cosinus jest funkcją malejącą, więc

$$\frac{\pi}{180}\cos 77° < df(\tilde{P}) < \frac{\pi}{180}\cos 75° = 0{,}004516$$

Ponieważ $\cos 77° = \sin 13°$, a dla funkcji $\sin x$, gdzie x — miara łukowa, mamy w przedziale $(0;\ \pi/2)$ nierówność $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$ (łuk sinusoidy jest nad cięciwą tego łuku), więc $\sin 13° > \dfrac{2}{\pi}13\dfrac{\pi}{180}$, zatem $\dfrac{\pi}{180}\cos 77° > \dfrac{\pi}{180}\dfrac{2}{\pi}13\dfrac{\pi}{180} = 0{,}002521$. Stąd wynikają oszacowania

$$0{,}002521 < df(\tilde{P}) < 0{,}004516$$
$$0{,}353553 = f(P_0) = 0{,}353553$$
$$0{,}356074 < f(P_1) < 0{,}358069$$

d) Przybliżenie $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3} \approx 2{,}95$; oszacowanie $2{,}85 < \sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3} < 2{,}97$.

9.18. **a)** $d^2f(x, y) = \dfrac{(y^2-x^2)dx^2 - 4xy\,dx\,dy + (x^2-y^2)dy^2}{(x^2+y^2)^2}$,

b) $d^2f(x, y) = -\cos x \operatorname{sh} y\, dx^2 - 2\sin x \operatorname{ch} y\, dx\, dy + \cos x \operatorname{sh} y\, dy^2$,

c) $d^2f(x, y) = e^{x+y}(dx^2 + 2\,dx\,dy + dy^2)$.

9.19. **a)** $d^3z = 6\,dx^3 - 18\,dx^2\,dy + 18\,dx\,dy^2 + 6\,dy^3$,

b) $d^3z = e^{2x+3y}(8\,dx^3 + 36\,dx^2\,dy + 54\,dx\,dy^2 + 27\,dy^3)$,

c) $d^3z = f'''g\,dx^3 + 3f''g'\,dx^2\,dy + 3f'g''\,dx\,dy^2 + fg'''\,dy^3$.

9.20. **a)** $\dfrac{dz}{dt} = e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2)$, **b)** $\dfrac{dz}{dx} = [e^x + 3x^2e^{(x^3)}]/[e^x + e^{(x^3)}]$,

c) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 4uv$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = 2u^2 - 6v^2$, **d)** 0, **e)** $\dfrac{dz}{dx} = x^{1/x}(1-\ln x)/x^2$,

f) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \cos 2u$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = c\cos 2cv$.

9.21. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

9.22. **a)** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}2x + \dfrac{\partial f}{\partial v}y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial f}{\partial u}2y + \dfrac{\partial f}{\partial v}x$;

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} y + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{1}{y}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} x + \frac{\partial f}{\partial v}(-x/y^2);$

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)g(v) + f(u)g'(v), \ \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)g(v) - f(u)g'(v).$

9.23. a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v};$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{v^2+u}{v} + \frac{\partial z}{\partial v}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{v^2-u}{v} - \frac{\partial z}{\partial v}.$

9.24. $z = z[x(t), y(t)], \ z_t = z_x x_t + z_y y_t, \ z_{tt} = (z_t)_t =$
$= (z_x x_t + z_y y_t)_t = (z_x)_t x_t + z_x x_{tt} + (z_y)_t y_t + z_y y_{tt} =$
$= (z_{xx} x_t + z_{xy} y_t) x_t + z_x x_{tt} + (z_{yx} x_t + z_{yy} y_t) y_t + z_y y_{tt} =$
$= z_{xx} x_t^2 + 2z_{xy} x_t y_t + z_{yy} y_t^2 + z_x x_{tt} + z_y y_{tt}.$

9.25. a) $z = z[x(u,v), y(u,v)], \ z_u = z_x x_u + z_y y_u, \ z_v = z_x x_v + z_y y_v,$
$z_{uu} = (z_u)_u = (z_x x_u + z_y y_u)_u = (z_x)_u x_u + z_x x_{uu} + (z_y)_u y_u +$
$+ z_y y_{uu} = (z_{xx} x_u + z_{xy} y_u) x_u + z_x x_{uu} + (z_{yx} x_u + z_{yy} y_u) y_u +$
$+ z_y y_{uu} = z_{xx} x_u^2 + 2z_{xy} x_u y_u + z_{yy} y_u^2 + z_x x_{uu} + z_y y_{uu},$
$z_{uv} = (z_u)_v = (z_x x_u + z_y y_u)_v = \ldots = z_{xx} x_u x_v + z_{xy}(x_u y_v +$
$+ x_v y_u) + z_{yy} y_u y_v + z_x x_{uv} + z_y y_{uv},$
$z_{vv} = z_{xx} x_v^2 + 2z_{xy} x_v y_v + z_{yy} y_v^2 + z_x x_{vv} + z_y y_{vv}.$

b) Korzystając z wyników zad. 9.25a i przestawiając litery u, v z literami x, y, otrzymujemy wzory
$z_{xx} = z_{uu} u_x^2 + 2z_{uv} u_x v_x + z_{vv} v_x^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx},$
$z_{xy} = z_{uu} u_x u_y + z_{uv}(u_x v_y + u_y v_x) + z_{vv} v_x v_y + z_u u_{xy} + z_v v_{xy},$
$z_{yy} = z_{uu} u_y^2 + 2z_{uv} u_y v_y + z_{vv} v_y^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy}.$

9.26. a) $-4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$, b) $4\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

9.27. Różniczkując równości (15) względem x, otrzymujemy dwa równania

$$\frac{\partial r}{\partial x}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

Mnożąc pierwsze równanie przez $\cos\varphi$, drugie przez $\sin\varphi$ i dodając, otrzymujemy pierwszą z równości (17). Podobnie otrzymujemy pozostałe.

9.28. Różniczkujemy funkcję $u[r(x,y), \varphi(x,y)]$ i korzystamy z (16).

9.29. Do pochodnych danych wzorami (18) stosujemy postępowanie, jakie w zad. 9.28 stosowaliśmy do funkcji u.

9.31. a) $(1+h)^3 + (1+k)^3 = 2 + 3(h+k) + 3(1+\theta h)h^2 + 3(1+\theta k)k^2,$

b) $(1+h)^4 + (1+k)^4 = 2 + 4(h+k) + 6(1+\theta h)^2 h^2 + 6(1+\theta k)^2 k^2,$

c) $(1+h)^3 + 2(1+k)^3 - (1+h)(1+k) = 2 + (2h+5k) +$
$+ 3(1+\theta h)h^2 - hk + 6(1+\theta k)k^2,$

d) $e^{h+k} = 1 + (h+k) + \frac{1}{2}e^{\theta(h+k)}(h^2 + 2hk + k^2),$

e) $(1+h)\ln(e+k) = 1 + h + \frac{k}{e} + \frac{hk}{e+\theta k} - \frac{1+\theta h}{2(e+\theta k)^2}k^2,$

f) $(-1+h)\ln(1+k) = -k + \frac{hk}{1+\theta k} - \frac{1-\theta h}{2(1+\theta k)^2}k^2,$

g) $A(1+h)^2 + 2B(1+h)(-1+k) + C(-1+k)^2 =$
$= (A-2B+C) + 2(A-B)h + 2(B-C)k + Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$

9.32. a) min: $f(0,0) = 0$, b) max: $f(0,0) = 1$, c) nie ma ekstremum.

d) Jeden punkt stacjonarny $P_0 = (0,0)$; $W(P_0) = 0$. Ponieważ: 1° $f(P_0) = 0$, 2° dla $x = 0$, $y > 0$, jest $f(x,y) > 0$, 3° dla $x = 0$, $y < 0$ jest $f(x,y) < 0$, więc nie ma ekstremum.

e) Jeden punkt stacjonarny $P_0 = (0,0)$; $W(P_0) = 0$. Ponieważ 1° $f(P_0) = 0$, 2° dla $P \neq P_0$ jest $f(P) > 0$, więc w punkcie P_0 jest minimum.

9.33. a) max: $f(4,4) = 12$, b) max: $f(0,3) = 9$,

c) min: $f(1,1) = -1$, w punkcie $(0,0)$ nie ma ekstremum;

d) min: $f(0,0) = 0$, max: $f(-5/3, 0) = 125/27$, w punktach $(-1, 2)$ i $(-1, -2)$ nie ma ekstremum; e) max: $f(\pi/3, \pi/6) = 3\sqrt{3}/2$,

f) min: $f(-4,1) = -1$, g) min: $f(2,2) = 0$, h) min: $f(5,2) =$ $= 30$, i) max: $f(-1,1) = 3$, min: $f(1,1) = -1$, w punktach $(0,0)$ i $(0,2)$ nie ma ekstremum;

j) min: $f(2\pi/3, 2\pi/3) = -3\sqrt{3}/8$, max: $f(\pi/3, \pi/3) = 3\sqrt{3}/8$;

k) min: $f(1, 1/2) = 0$, w punkcie $(0,0)$ nie ma ekstremum;

l) min: $f(-1/6, 0) = -13/108$, w punktach $(-3/2, 0)$, $(1, \sqrt{35/2})$, $(1, -\sqrt{35/2})$ nie ma ekstremum;

m) min: $f(1,2) = 7 - 10\ln 2$.

9.34. a) Jeden punkt stacjonarny $P_0 = (0,0)$; $W(P_0) = 0$. Ponieważ: 1° $f(P_0) = 0$, 2° $f(P) = f(x,y) = (x+y)^2 + y^4 > 0$ dla $P \neq P_0$, więc w punkcie P_0 jest minimum.

b) Trzy punkty stacjonarne: $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $P_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. $W(P_0) = 0$. Ponieważ: 1° $f(P_0) = 0$, 2° dla $y = x$, $x \neq 0$ jest $f(x, y) = 2x^4 > 0$, 3° dla $y = -x$, $0 < x < 2$ jest $f(x, y) = 2x^2(x^2-4) < 0$, więc w punkcie P_0 nie ma ekstremum. $W(P_1) > 0, f_{xx}(P_1) > 0$, min: $f(P_1) = -8$. $W(P_2) > 0, f_{xx}(P_2) > 0$, min: $f(P_2) = -8$.

c) Trzy punkty stacjonarne: $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (-1, -1)$. $W(P_0) = 0$. Ponieważ: 1° $f(P_0) = 0$, 2° dla $y = x$, $0 < x < 1$, jest $f(x, y) > 0$, 3° dla $y = -x$, $x < 0$, jest $f(x, y) < 0$, więc w punkcie P_0 nie ma ekstremum. $W(P_1) = 0$. Ponieważ: 1° $f(P_1) = 0$, 2° dla $y = x-1$, $x > 1$, jest $f(x, y) > 0$, 3° dla $y = x-1$, $0 < x < 1$, jest $f(x, y) < 0$, więc w punkcie P_1 nie ma ekstremum. $W(P_2) < 0$, więc w punkcie P_2 nie ma ekstremum. Funkcja nie ma ekstremum.

d) Punktami stacjonarnymi są: punkt $P_0 = (0,0)$ i każdy punkt Q okręgu $x^2+y^2 = 1$. $W(P_0) > 0$, $f_{xx}(P_0) < 0$, max: $f(P_0) = 1$. $W(Q) = 0$. Ponieważ $f(Q) = 0$, $f(P) > 0$ dla $0 \neq PP_0 \neq 1$, więc w każdym punkcie Q jest minimum niewłaściwe.

9.35. Funkcja f ma wartość 0 na osiach Ox, Oy i na prostej $x+y = 4$, która dzieli trójkąt T na trójkąt T_1 i trapez T_2. Wewnątrz T_2 jest $f(x, y) < 0$, wewnątrz T_1 jest $f(x, y) > 0$. Zatem funkcja f przyjmuje swą największą wartość w pewnym punkcie wewnątrz T_1 i jest to maksimum. Wewnątrz T_1 jest jeden punkt stacjonarny $P_0 = (2, 1)$, zatem $\max\limits_T f = f(P_0) = 4$.

9.36. Trzy punkty stacjonarne: $P_0 = (1/2, 0)$, $P_1 = \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{4}, 0\right)$, $P_2 = \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{4}, 0\right)$. W punkcie P_0 jest maksimum $f(P_0) = 21/16$. W punkcie P_1 nie ma ekstremum. Punkt P_2 leży zewnątrz koła K. Funkcja f zawężona do okręgu koła K jest równa $\frac{3}{2}x$ dla $|x| \leqslant 1$ i dla $x = 1$ ma największą na tym okręgu wartość, równą 3/2. Wartość ta jest większa od $f(P_0)$, więc $\max\limits_K f = f(1,0) = 3/2$.

9.37. **a)** $1-\sqrt{3}$, **b)** $\sqrt{2}/2$, **c)** $-\sqrt{2}/2$, **d)** $(\sqrt{3}-1)/2$, **e)** $4\sqrt{2}$,

f) 0, **g)** $4/\sqrt{a^2+b^2}$, **h)** $(\cos\alpha+\sin\alpha)/2$; 1) 45°, 2) 225° 3) 135° lub $-45°$,

9.38. **a)** $[-2, 1]$, **b)** $[10xy-3y^3, 5x^2-9xy^2+4y^3]$, **c)** $[a/\sqrt{4+a^2+b^2}, b/\sqrt{4+a^2+b^2}]$.

9.39. **a)** $-12/(5\sqrt{145})$, **b)** $7\sqrt{2}/10$.

9.40. W punktach okręgu $x^2+y^2 = 2/3$.

9.41. $(-1/3, 3/4)$ lub $(7/3, -3/4)$.

Odpowiedzi do rozdziału 10

10.1. **a)** Przestrzeń, **b)** $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ (kula), **c)** $x^2+y^2 \leqslant 1$ (cylinder), **d)** $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (warstwa), **e)** przestrzeń, **f)** $-1 \leqslant x+y+z \leqslant 1$ (warstwa), **g)** przestrzeń. Ściany układu $Oxyz$ rozcinają przestrzeń na 8 obszarów zwanych *oktantami*. Oktanty półprzestrzeni $z > 0$ oznaczamy numerami *1, 2, 3, 4* zgodnie z numeracją ćwiartek płaszczyzny Oxy. Oktanty półprzestrzeni $z < 0$ oznaczamy numerami *5, 6, 7, 8* w tej samej kolejności. **h)** $xyz > 0$ (oktanty *1, 3, 6, 8*), **i)** $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ (oktant *1*).

10.2. **a)** Płaszczyzny prostopadłe do wektora $[1, 1, 1]$, **b)** płaszczyzny prostopadłe do wektora $[1, 1, 0]$, **c)** płaszczyzny prostopadłe do wektora $[1, 0, 0]$, **d)** sfery, których środkiem jest początek układu, **e)** powierzchnie cylindryczne, których osią jest oś Oz, **f)** płaszczyzna $x = 0$ i pary płaszczyzn $x = \pm\sqrt{c}$, $c > 0$.

10.3. **a)** Forma określona dodatnio,

b) $\Phi(P) = (x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2 \geqslant 0$, jeśli $\Phi(P) = 0$, to $x+y = x+z = y+z = 0$ i stąd $x = y = z = 0$; forma określona dodatnio.

c) $\Phi(P) = (x+y)^2+(x+z)^2+(y-z)^2 \geqslant 0$; jeśli $\Phi(P) = 0$, to $x+y = x+z = y-z = 0$ i stąd $x = -y = -z$; $\Phi(1, -1, -1) = 0$; forma półokreślona dodatnio.

d) $\Phi(P) = (x+y)^2+(x+z)^2 \geqslant 0$; jeśli $\Phi(P) = 0$, to $x = -y = -z$; $\Phi(1, -1, -1) = 0$; forma półokreślona dodatnio.

e) $\Phi(P) = (x+y)(x+5y)+z^2$, $\Phi(0, 0, 1) > 0$, $\Phi(2, -1, 0) < 0$; forma nieokreślona.

f), g) forma półokreślona dodatnio, **h)** forma określona ujemnie; **i), j)** forma półokreślona ujemnie,

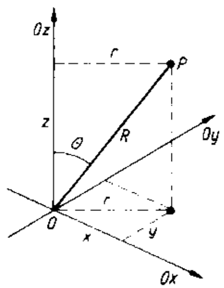
k), l), m), n) forma nieokreślona; **o)** równanie charakterystyczne ma pierwiastki ujemne; forma określona ujemnie.

10.4. **a), b), c)** Warunek ma postać taką, jak w rozwiązaniu zad. 9.3.

d) $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0}\bigvee\limits_{\delta>0}\bigwedge\limits_{P\in D}(PP_0 < \delta \Rightarrow |f(P)-f(P_0)| < \varepsilon)$,

e) $\bigvee\limits_{A}\bigwedge\limits_{P\in G} |f(P)| \leqslant A$.

10.5.



Rys. 10.5

Oznaczenia: $O = (0, 0, 0)$; $\{O\}$ — zbiór złożony z punktu O; $\{Oz\}$ — zbiór złożony z punktów osi Oz; $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = OP$; $r = \sqrt{x^2+y^2}$ — odległość punktu P od osi Oz; jeśli $OP \neq 0$, to $\theta = \measuredangle\{Oz, \overrightarrow{OP}\}$. Skróty: cg. — ciągła, ogr. — ograniczona, nieogr. — nieograniczona.

a) $D = \mathscr{R}^3\backslash\{O\}$, $f(P) = \dfrac{r^4}{R^2} = r^2\sin^2\theta$, f cg. nieogr., $\lim\limits_{P\to O} f(P) = 0$;

b) $D = \mathscr{R}^3\backslash\{O\}$, $f(P) = \dfrac{r^2}{R^2} = \sin^2\theta$, f cg. ogr. $\lim\limits_{P\to O} f(P)$ nie istnieje;

c) $D = \mathscr{R}^3\backslash\{O\}$, $f(P) = \dfrac{1}{R}$, f cg. nieogr., $\lim\limits_{P\to O} f(P) = \infty$;

d) $D = \mathscr{R}^3\backslash\{O\}$, $f(P) = \dfrac{z}{R^3} = \dfrac{\cos\theta}{R^2}$, f cg. nieogr., $\lim\limits_{P\to O} f(P)$ nie istnieje;

e) $D = \mathscr{R}^3\backslash\{Oz\}$, $f(P) = \dfrac{R^2}{r^2} = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$, f cg. nieogr.; jeśli $Q = (0, 0, h)$, $h \neq 0$, to $\lim\limits_{P\to Q} f(P) = \infty$; $\lim\limits_{P\to O} f(P)$ nie istnieje;

f) $D = \mathscr{R}^3\backslash\{Oz\}$, $f(P) = \dfrac{z}{r} = \operatorname{ctg}\theta$, f cg. nieogr.; niech $Q = (0, 0, h)$; jeśli $h > 0$, to $\lim\limits_{P\to Q} f(P) = \infty$; jeśli $h < 0$, to $\lim\limits_{P\to Q} f(P) = -\infty$; $\lim\limits_{P\to O} f(P)$ nie istnieje.

10.6. Pochodne rzędu 1 — zob. *Zarys*, s. 345. Pochodne rzędu 2 są granicami ilorazów różnicowych pochodnych rzędu 1, np.

$$f_{xx}(x, y, z) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f_x(x+h, y, z)-f_x(x, y, z)]$$

$$f_{yz}(x, y, z) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f_y(x, y, z+h)-f_y(x, y, z)]$$

10.7. **a)** $u_x = y\cos 2z$, $u_y = x\cos 2z$, $u_z = -2xy\sin 2z$;
b) $u_x = y$, $u_y = x$, $u_z = 0$; **c)** $u_x = 3x^2yz$, $u_y = x^3z$, $u_z = x^3y$;
d) $u_x = 3x^2+2$, $u_y = 2yz^2+3z+3$, $u_z = 2y^2z+3y$;
e) $u_x = x/u$, $u_y = y/u$, $u_z = z/u$;
f) $u_x = a/g$, $u_y = b/g$, $u_z = c/g$, gdzie $g = ax+by+cz$;
g) $u_x = y\,e^{xy-z}$, $u_y = x\,e^{xy-z}$, $u_z = -e^{xy-z}$;
h) $u_x = y^z$, $u_y = xzy^{z-1}$, $u_z = xy^z\ln y$;
i) $u_x = yz(xy)^{z-1}$, $u_y = xz(xy)^{z-1}$, $u_z = (xy)^z\ln(xy)$;
j) $u_x = \dfrac{z}{y}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z-1}$, $u_y = -\dfrac{zx}{y^2}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z-1}$, $u_z = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z\ln\dfrac{x}{y}$.

10.8. $du(x, y, z) = u_x(x, y, z)\,dx + u_y(x, y, z)\,dy + u_z(x, y, z)\,dz$ lub krócej $du = u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz$.

10.9. **a)** $du = \dfrac{a\,dx+b\,dy+c\,dz}{ax+by+cz}$, **b)** $du = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z\left(\dfrac{z}{x}dx - \dfrac{z}{y}dy + \ln\dfrac{x}{y}dz\right)$,

c) $du = \dfrac{1}{u}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$,

d) $du = x^{yz}\left[\dfrac{yz}{x}dx + (\ln x)(z\,dy + y\,dz)\right]$,

e) $du = x^{y/z}\left[\frac{y}{zx}\,dx + \frac{\ln x}{z^2}(z\,dy - y\,dz)\right]$,

f) $du = -2e^{-(x^2+y^2+z^2)}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$.

10.10. a) e^{x+y+z}, b) $(1+x)(1+y)(1+z)e^{x+y+z}$, c) $e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2)$.

10.11. $d^2u = u_{xx}\,dx^2 + u_{yy}\,dy^2 + u_{zz}\,dz^2 + 2u_{xy}\,dx\,dy + 2u_{xz}\,dx\,dz + 2u_{yz}\,dy\,dz$.

10.12. a) $d^2u = e^{x+y+z}(dx+dy+dz)^2$,
b) $d^2u = e^{ax+by+cz}(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^2$,
c) $d^2u = \frac{1}{x}dx^2 + \frac{1}{y}dy^2 + \frac{1}{z}dz^2$,
d) $d^2u = 2(z\,dx\,dy + y\,dx\,dz + x\,dy\,dz)$.

10.13. $u_{tt} = u_{xx}x_t^2 + u_{yy}y_t^2 + u_{zz}z_t^2 + 2u_{xy}x_ty_t + 2u_{xz}x_tz_t + 2u_{yz}y_tz_t + u_xx_{tt} + u_yy_{tt} + u_zz_{tt}$.

10.14. a) $u_t = 6t^5 - 3t^2$, $u_{tt} = 30t^4 - 6t$; b) $u_t = 34t - 14$, $u_{tt} = 34$;
c) $u_t = f_x(-\sin t) + f_y\cos t + f_z c$, $u_{tt} = f_{xx}\sin^2 t + f_{yy}\cos^2 t + f_{zz}c^2 - 2f_{xy}\cos t\sin t - 2f_{xz}c\sin t + 2f_{yz}c\cos t - f_x\cos t - f_y\sin t$;
d) $u_t = af_x + bf_y + cf_z$, $u_{tt} = a^2f_{xx} + b^2f_{yy} + c^2f_{zz} + 2abf_{xy} + 2acf_{xz} + 2bcf_{yz}$.

10.15. $u_{XX} = u_{xx}x_X^2 + u_{yy}y_X^2 + u_{zz}z_X^2 + 2u_{xy}x_Xy_X + 2u_{xz}x_Xz_X + 2u_{yz}y_Xz_X + u_xx_{XX} + u_yy_{XX} + u_zz_{XX}$,
$u_{XY} = u_{xx}x_Xx_Y + u_{yy}y_Xy_Y + u_{zz}z_Xz_Y + u_{xy}(x_Xy_Y + x_Yy_X) + u_{xz}(x_Xz_Y + x_Yz_X) + u_{yz}(y_Xz_Y + y_Yz_X) + u_xx_{XY} + u_yy_{XY} + u_zz_{XY}$;
Podobnie wyrażają się pozostałe pochodne drugiego rzędu.

10.16. Wzory te otrzymuje się ze wzorów (8) i wzorów z poprzedniego zadania w wyniku przestawienia liter x, y, z z literami X, Y, Z.

10.17. $u_x = c_{11}u_X + c_{12}u_Y + c_{13}u_Z$,
$u_y = c_{21}u_X + c_{22}u_Y + c_{23}u_Z$,
$u_z = c_{31}u_X + c_{32}u_Y + c_{33}u_Z$,
$u_{xx} = c_{11}^2u_{XX} + c_{12}^2u_{YY} + c_{13}^2u_{ZZ} + 2c_{11}c_{12}u_{XY} + 2c_{11}c_{13}u_{XZ} + 2c_{12}c_{13}u_{YZ}$,

$u_{xv} = c_{11}c_{21}u_{XX} + c_{12}c_{22}u_{YY} + c_{13}c_{23}z_{ZZ} + (c_{11}c_{22} + c_{21}c_{12})u_{XY} + (c_{11}c_{23} + c_{21}c_{13})u_{XZ} + (c_{12}c_{23} + c_{22}c_{13})u_{YZ}$;
podobnie wyrażają się pozostałe pochodne drugiego rzędu.

10.18. a) $e^{h+k+l} = 1 + (h+k+l) + \frac{1}{2}e^{\theta(h+k+l)}(h+k+l)^2$,

b) $\ln[(1+h)^{1+h}(1+k)^{1+k}(1+l)^{1+l}] = h+k+l + \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{1+\theta h} + \frac{k^2}{1+\theta k} + \frac{l^2}{1+\theta l}\right)$ dla $h^2+k^2+l^2 < 1$,

c) $(x+h)(y+k)(z+l) = xyz + (yzh + xzk + xyl) + (zhk + yhl + xkl) + 30hkl$.

10.19. a) $\min: f(-1, -2, 3) = -14$, b) $\min: f(1/2, 1, 1) = 4$,
c) $\min: f(24, -144, -1) = -6913$,
d) $\min: f(\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{8}) = 4\sqrt[4]{2}$.
e) Punktami stacjonarnymi są: punkt $P_0 = (1, 1, 1)$ oraz wszystkie punkty osi układu i trzech prostych $\{x = 0, y+z = 4\}$, $\{y = 0, x+z = 4\}$, $\{z = 0, x+y = 4\}$. Funkcja f zeruje się na płaszczyznach układu i na płaszczyźnie $x+y+z = 4$. Te cztery płaszczyzny ograniczają czworościan, wewnątrz którego znajduje się P_0. Mamy $f(P_0) = 1$; jest to maksimum właściwe. Rozważając znak f po różnych stronach wymienionych płaszczyzn, wnioskujemy, że w pozostałych punktach nie ma ekstremum.
f) Punktami stacjonarnymi są: osiem punktów $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ oraz wszystkie punkty osi układu i okręgów $\{x = 0, y^2+z^2 = 5\}$, $\{y = 0, x^2+z^2 = 5\}$, $\{z = 0, x^2+y^2 = 5\}$. Rozumując jak w e), wnioskujemy, że w wymienionych ośmiu punktach są ekstrema właściwe, w innych punktach nie ma ekstremum.
g) Punktami stacjonarnymi są: punkt $P_0 = (1, 1, 1)$ oraz wszystkie punkty płaszczyzn Oxy i Oxz i prostej $\{x = 0, 2y+3z = 7\}$. Rozumując jak w e), wnioskujemy, że w punkcie P_0 jest maksimum właściwe, a w każdym punkcie płaszczyzny $y = 0$ spełniającym warunek $xz(1-x-3z) \neq 0$ jest ekstremum niewłaściwe. W innych punktach nie ma ekstremum.

h) $\min: f\left(\frac{1}{2}\sqrt[15]{16}, \frac{1}{4}\sqrt[5]{16}, \frac{1}{2}\sqrt[15]{\frac{1}{4}}\right) = \frac{15}{4}\sqrt[15]{\frac{1}{16}}$.

10.20. **a)** $1-1/\sqrt{2}$, **b)** 5, **c)** $20/\sqrt{19}$, **d)** $-4/\sqrt{3}$, **e)** $2+\sqrt{2}$, **f)** $6/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

10.21. **a)** 0, **b)** $1/\sqrt{3}$, **c)** $1/2$.

10.22. **a)** $[3x^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^2]$, **b)** $[A, B, C]$,
c) $[x, y, z]/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, **d)** $-[x,y,z]/\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}$,
e) $-[3xz, 3yz, x^2+y^2-2z^2]/\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}$,
f) $[x, y, 0]/(x^2+y^2)$.

10.27. **a)** $\operatorname{grad} u = -2t^{-5/2}e^{-R^2/t}[x, y, z]$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = t^{-7/2}\left(-\dfrac{3}{2}t+R^2\right)e^{-R^2/t}$;

b) $\operatorname{grad} u = -e^{-t}[\sin x, \sin y, \sin z]$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -(\cos x+\cos y+ \cos z)e^{-t}$.

10.28. W poniższych odpowiedziach wskaźniki k, l przyjmują wartości $1,\ldots,n$. Symbol Kroneckera δ_{kl} oznacza liczbę 1 dla $k=l$, względnie liczbę 0 dla $k \neq l$.
a) $u_{x_k} = 2x_k$, $u_{x_k x_l} = 2\delta_{kl}$;
b) $u_{x_k} = 2ux_k$, $u_{x_k x_l} = 2u(2x_k x_l+\delta_{kl})$;
c) $u_{x_k} = x_k/r$, $u_{x_k x_l} = \delta_{kl}/r - x_k x_l/r^3$;
d) $u_{x_k} = e^r x_k/r$, $u_{x_k x_l} = e^r(x_k x_l/r^2+\delta_{kl}/r - x_k x_l/r^3)$;
e) $u_{x_k} = -x_k/r^3$, $u_{x_k x_l} = -\delta_{kl}/r^3+3x_k x_l/r^5$;
f) $u_{x_k} = x_k/r^2$, $u_{x_k x_l} = \delta_{kl}/r^2 - 2x_k x_l/r^3$.

10.29. Wskaźniki k, l przyjmują wartości $1,\ldots,n$.
a) $u_{x_k} = \cos x_k - x_k \sin x_k$, $u_{x_k x_k} = -2\sin x_k - x_k \cos x_k$, $u_{x_k x_l} = 0$ dla $k \neq l$;
b) $u_{x_k} = a_k \cos \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$, $u_{x_k x_l} = -a_k a_l \sin \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$;
c) $u_{x_k} = a_k u$, $u_{x_k x_l} = a_k a_l u$.

10.30. **a)** $\operatorname{grad} r^2 = 2[x_1,\ldots,x_n]$, **b)** $\operatorname{grad} r = \dfrac{1}{r}[x_1,\ldots,x_n]$.

10.31. **a)** Punkt stacjonarny $x^{(0)} = \left(a, b, \dfrac{4c-2d}{3}, \dfrac{4d-2c}{3}\right)$. Drugie pochodne są stałe i tworzą macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Druga różniczka ma postać $d^2u = dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2+ +dx_3\,dx_4$ i na podstawie twierdzenia Sylvestra jest formą określoną dodatnio. Funkcja ma w punkcie $x^{(0)}$ minimum właściwe.
b) Punkt stacjonarny $x^{(0)} = (a, b, d, c)$. Druga różniczka $d^2u = dx_1^2+dx_2^2+2\,dx_3\,dx_4$ jest formą nieokreśloną. Ekstremum nie ma.
c) W przypadku $c \neq d$ nie ma punktów stacjonarnych, więc nie ma ekstremum. W przypadku $c = d$ punktami stacjonarnymi są wszystkie punkty prostej $p = \{x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c - x_4\}$. Druga różniczka $d^2u = dx_1^2+dx_2^2+(dx_3+dx_4)^2$ jest formą półokreśloną dodatnio. Badanie dodatkowe: sprowadzając funkcję do postaci

$$u = \frac{1}{2}[(x_1-a)^2+(x_2-b)^2+(x_3+x_4-c)^2] - \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

stwierdzamy, że w każdym punkcie prostej p występuje minimum niewłaściwe.

Odpowiedzi do rozdziału 11

11.2. **a)** $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ dla $|x| \leqslant 1$, **b)** rozwiązanie nie istnieje,
c) $y = x(1-x)/(x+1)$ dla $x \neq 1$,
d) $y = x+1\pm\sqrt{(2x+1)(x+1)}$ dla $x \leqslant -1$ lub $x \geqslant -1/2$,
e) $y = 0$ (zob. zad. 8.13b) dla dowolnego x;
f) oznaczając $x-y=t$, mamy $t+1=e^t$, stąd $t=0$, więc $x-y=0$, zatem $y=x$ dla dowolnego x.
g) Rozumując jak w f), otrzymujemy $x^2+y^2=0$. Równanie to jest spełnione tylko w punkcie (0, 0). Rozwiązanie $y=f(x)$ w przedziale nie istnieje.
h) Oznaczając $y/x = u$, otrzymujemy $\pi u/4 = \operatorname{arctg} u$, stąd $u = \pm 1$ lub $u = 0$, zatem $y = x$ lub $y = -x$ lub $y = 0$ dla $x \neq 0$.

11.3. **a)** Nie można, bo $F(P_0) \neq 0$.
b) Nie można, bo $F_y(P_0) = 0$. Jednak ponieważ $F_x(P_0) \neq 0$, więc zamieniając role x, y można poszukiwać funkcji uwikłanej $x = g(y)$. Rozwiązując efektywnie względem x, otrzymujemy $x = (3y^2-2y-3)/(4y-6)$ dla $y \neq 3/2$.
c) Nie można, bo $F(P_0) = F_x(P_0) = 0$. Natomiast, rozwiązując efektywnie, otrzymujemy $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 0$ i stąd $y = x$ dla dowolnego x.
d) Nie można, bo $F(P_0) = F_x(P_0) = F_y(P_0) = 0$. P_0 jest punktem osobliwym (*Zarys*, s. 363). Oznaczając $x^2+y^2 = t$, otrzymujemy $t = \ln(t+1)$, stąd $t = 0$, zatem $x^2+y^2 = 0$. Obrazem równania jest punkt $(0, 0)$.

11.4. **a)** $F(0, 1/2) = 0$, $F_x = 2x-y+1$, $F_y = -x+4y-1$, $F_y(0, 1/2) \neq 0$, $f'(x) = -(2x-y+1)/(-x+4y-1)$, $f''(x) = -2(7x^2+14y^2-7xy+7x-7y+2)/(-x+4y-1)^3$;
b) $F(2/e, e) = 0$, $F_y(2/e, e) \neq 0$, $f'(x) = -y^2/(xy-1)$, $f''(x) = y^3(2xy-3)/(xy-1)^3$;
c) $F(e, 1) = 0$, $F_y(e, 1) \neq 0$, $f'(x) = -2xy/(x^2-2e^{2y})$, $f''(x) = [2y(x^2-2e^{2y})(3x^2+2e^{2y})+16x^2y^2e^{2y}]/(x^2-2e^{2y})^3$;
d) $f'(x) = -ye^x/(e^x+e^y)$; korzystając z równania $ye^x+e^y = 0$, otrzymujemy $f'(x) = e^y/(e^x+e^y)$, $f''(x) = -e^{2x+y}/(e^x+e^y)^3$.

11.5. **a)** Z układu równań $F = F_x = 0$ otrzymujemy dwa punkty $P_1 = (1, 2)$ i $P_2 = (-1, -2)$. W obu tych punktach jest $F_y \neq 0$, przy czym $-F_{xx}/F_y$ jest dodatnie w P_1 i ujemne w P_2. Funkcja $y = f_1(x)$ określona równaniem $F = 0$ w otoczeniu punktu P_1, ma dla $x = 1$ minimum $y = 2$. Funkcja $y = f_2(x)$ określona równaniem $F = 0$ w otoczeniu punktu P_2 ma dla $x = -1$ maksimum $y = -2$. Otrzymany rezultat zapisujemy

$$1)\ x = 1,\ y_{min} = 2, \qquad 2)\ x = -1,\ y_{max} = -2$$

Krzywe $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ nie są przedłużalne jedna w drugą. Są to dwie gałęzie hiperboli.
b) 1) $x = -1$, $y_{max} = 0$; 2) $x = -3$, $y_{min} = -2$;
c) $x = 1$, $y_{max} = 1$;
d) 1) $x = \sqrt[8]{3}$, $y_{min} = \sqrt[8]{243}$; 2) $x = -\sqrt[8]{3}$, $y = \sqrt[8]{243}$;
e) 1) $x = 0$, $y_{max} = \sqrt[4]{5}$; 2) $x = 1$, $y_{min} = \sqrt{2}$; 3) $x = -1$, $y_{min} = \sqrt{2}$; 4) $x = 0$, $y_{min} = -\sqrt[4]{5}$; 5) $x = 1$, $y_{max} = -\sqrt{2}$;

6) $x = -1$, $y_{max} = -\sqrt{2}$. Te same wyniki otrzymujemy, rozwiązując równanie efektywnie względem y.
f) Oznaczając $a = \sqrt{1/2}e^{-\pi/4}$, mamy: 1) $x = a$, $y_{min} = -a$; 2) $x = -a$, $y_{max} = a$.

11.6. **a)** 1) $x = -1$, $y_{max} = 0$; 2) $x = -3$, $y_{min} = -2$; 3) $y = -1+\sqrt{1/2}$, $x_{max} = -2+\sqrt{2}$; 4) $y = -1-\sqrt{1/2}$, $x_{min} = -2-\sqrt{2}$;
b) 1) $y = 1$, $x_{max} = 0$; 2) $y = 1$, $x_{min} = 2$;
c) 1) $x = 0$, $y_{min} = 0$; 2) $x = 0$, $y_{min} = -1$. Ten sam wynik otrzymujemy, rozwiązując równanie efektywnie względem y. Mamy $(x^2-y^2)^2-(x^2-y) = 0$, stąd $(x^2-y)(x^2-y-1) = 0$, zatem $y = x^2$ lub $y = x^2+1$ (dwie parabole).
d) 1), 2) $x = \pm\sqrt{2/27}$, $y_{max} = 2/\sqrt{27}$; 3), 4), $x = \pm\sqrt{2/27}$, $y_{min} = -2/\sqrt{27}$; 5), 6) $y = \pm\sqrt{2/27}$, $x_{max} = 2/\sqrt{27}$; 7), 8) $y = \pm\sqrt{2/27}$, $x_{min} = -2/\sqrt{27}$. Obrazem równania jest linia czterolistna symetryczna względem obu osi i obu dwusiecznych układu.

11.7. **a)** $A = (1, 1), m_1 = 1, m_2 = -1$; $B = (-1, -1), m_1 = 1, m_2 = -1$. Z równania $F = (x-y)(xy-1) = 0$ wynika, że obraz równania składa się z prostej $y = x$ i hiperboli $xy = 1$.
b) $A = (1, 1)$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$; $B = (0, 0)$, $m_1 = 0$, $m_2 = 1$. Z równania $F = (y-x)(y-x^2) = 0$ wynika, że obraz równania składa się z prostej $y = x$ i paraboli $y = x^2$.
c) $A = (0, 0)$. Z równania $y^2 = x^2(x-1)$ wynika, że dla $x = 0$ jest $y = 0$, dla $x \geq 1$ jest $y = \pm x\sqrt{x-1}$, a dla pozostałych x równanie nie jest spełnione. A jest punktem izolowanym.
d) $A = (0, 0)$. Z równania $F = y(x-y)(x+y) = 0$ wynika $y = 0$ lub $y = x$ lub $y = -x$ dla dowolnego x. A jest punktem przecięcia się trzech prostych.
e) $A = (1/2, 1/2)$, $m_1 = 1$, $m_2 = -1$.

11.9. **a)** $z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ dla dowolnych x, y,
b) $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ dla $x^2+y^2 \leq 1$,
c) $z = -xy/(x+y)$ dla $x+y \neq 0$,
d) $z = -1\pm\sqrt{2y^2-x^2+4x+6}$ dla $2y^2 \geq x^2-4x-6$;

e) podstawiając $t = x+y+z$, otrzymujemy równanie $t = e^t$, które ma pierwiastek $t_0 \approx 0{,}57$; zatem $z = t_0 - x - y$;
f) podstawiając $t = z/\sqrt{x^2-y^2}$, otrzymujemy równanie $t = \operatorname{tg} t$, które ma nieskończenie wiele pierwiastków ..., $t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots$, przy czym $t_0 = 0$, $t_1 \approx 4{,}49$, $t_{-n} = -t_n$; zatem $z = t_n\sqrt{x^2-y^2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ dla $|x| > |y|$.

11.10. **a)** Nie, gdyż punkt $(0, 0, 0)$ jest punktem osobliwym.
b) Nie, gdyż $F_z(P_0) = 0$. Ponieważ $F_x(P_0) \neq 0$, więc w otoczeniu punktu P_0 można rozważać funkcję uwikłaną $x = g(y, z)$.
c) Można.

11.11. **a)** $f_x = yz/(e^z - xy)$, $f_y = xz/(e^z - xy)$;
b) $f_x = 1$, $f_y = (z-x)/[(z-x)^2+y^2+y]$;
c) $f_x = yz/(z^2-xy)$, $f_y = xz/(z^2-xy)$;
d) $f_x = 1/\left(1+\ln\dfrac{z}{y}\right)$, $f_y = z/\left(y+y\ln\dfrac{z}{y}\right)$;
e) $f_x = -(x^2-yz)/(z^2-xy)$, $f_y = -(y^2-xz)/(z^2-xy)$;
f) $f_x = -\dfrac{z\cos x+\sin y}{y\cos z+\sin x}$, $f_y = -\dfrac{x\cos y+\sin z}{y\cos z+\sin x}$.

11.12. **a)** Z układu równań $F = F_x = F_y = 0$ otrzymujemy dwa punkty $P_1 = (0,0,0)$ i $P_2 = (0,0,5)$. W każdym z nich jest $F_z \neq 0$ i $W > 0$, więc jest ekstremum. Ponieważ wartość $-F_{xx}/F_z$ jest dodatnia w punkcie P_1, a ujemna w punkcie P_2, więc dla $x = y = 0$ jest na jednym elemencie funkcji uwikłanej $z_{\min} = 0$, a na drugim $z_{\max} = 5$.
b) Z układu równań $F = F_x = F_y = 0$ otrzymujemy dwa punkty, w których jest $F_z \neq 0$ i $W < 0$, więc ekstremum nie ma.
c) Z układu równań $F = F_x = F_y = 0$ otrzymujemy trzy punkty: $(0,0,0)$, $(0,0,\sqrt{3})$, $(0,0,-\sqrt{3})$, w których jest $F_z \neq 0$ i $W > 0$. Ze znaku wartości $-F_{xx}/F_z$ w tych punktach wynika, że dla $x = y = 0$ jest na jednym elemencie funkcji uwikłanej $z_{\min} = 0$, na drugim $z_{\max} = \sqrt{3}$ i na trzecim $z_{\max} = -\sqrt{3}$.
d) Ekstremum nie istnieje, ponieważ $F_x \neq 0$.
e) Z układu równań $F = F_x = F_y = 0$ otrzymujemy punkt $(0, 0, \sqrt[3]{20})$, w którym jest $F_z \neq 0$ i $W < 0$. Ekstremum nie istnieje.

11.14. **a)** $y = -x/2 \pm \sqrt{1-3x^2/4}$, $z = -x/2 \mp \sqrt{1-3x^2/4}$ dla $|x| \leqslant 2/\sqrt{3}$;
b) $y = -(x-2)/2 \pm \sqrt{x-1}$, $z = -(x-2)/2 \mp \sqrt{x-1}$ dla $x \geqslant 1$;
c) $y = x/2 \pm \sqrt{1-3x^2/4}$, $z = 1+x^2/2 \mp \sqrt{1-3x^2/4}$ dla $|x| \leqslant 2/\sqrt{3}$.

11.15. **a)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y(x+z)-3z^2}{x(y+z)+3(y^2+z^2)}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z(x-y)+3y^2}{x(y+z)+3(y^2+z^2)}$;
b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y/z-z}{x+1/y+y/z+\ln z}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{-z-1/y-\ln z}{x+1/y+y/z+\ln z}$;
c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2(x-z)}{x^2(z-y)}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2(y-x)}{x^2(z-y)}$.

11.16. **a)** $u = y/(x^2+y^2)$, $v = x/(x^2+y^2)$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$;
b) $u = \sqrt{x^2+y^2}$, $v = \sqrt{x^2+y^2}\arccos(x/\sqrt{x^2+y^2})$ dla $(x, y) \neq$ $\neq (0, 0)$.

11.17. **a)** $u_x = (y\cos v - \sin u)/J$, $u_y = (y\cos v + \sin v)/J$, $v_x = (x\cos u + \sin v)/J$, $v_y = (x\cos u - \sin v)/J$, gdzie $J = x\cos u + y\cos v$;
b) $u_x = (u\sin v)/J$, $u_y = (-u\cos v)/J$, $v_x = -(e^u - \cos v)/J$, $v_y = (e^u + \sin v)/J$, gdzie $J = u[e^u(\sin v - \cos v)+1]$.

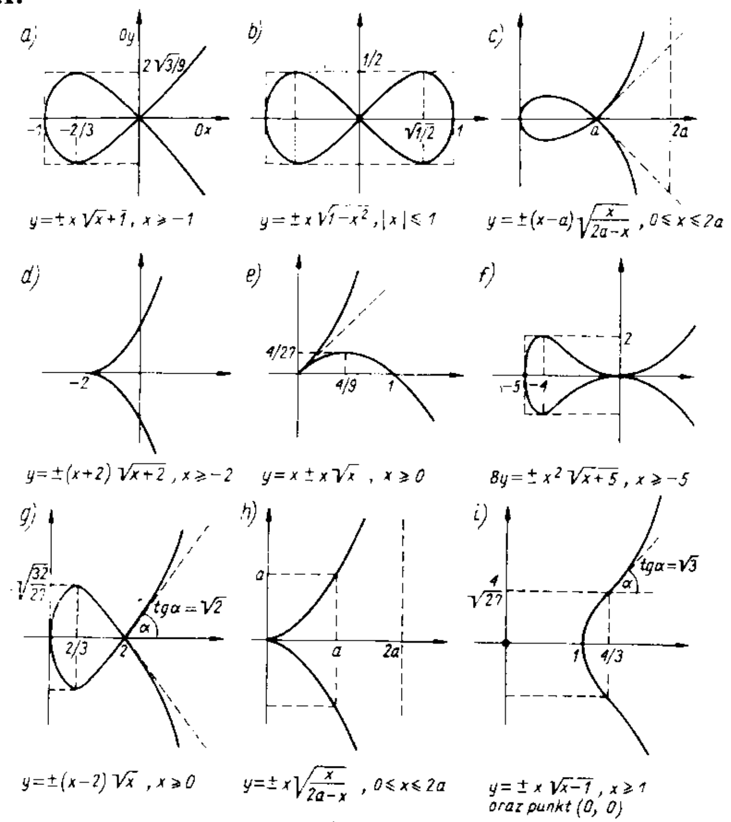
11.18. **a)** $u_{\max} = c = \sqrt{a^2+b^2}$, dla $x = a/c$, $y = b/c$, $u_{\min} = -c$ dla $x = -a/c$, $y = -b/c$;
b) $u_{\min} = a^2$ dla $x = a\cos\alpha$, $y = a\sin\alpha$;
c) $u_{\max} = 1+1/\sqrt{2}$ dla $x = \pi/8+k\pi$, $y = -\pi/8+k\pi$; $u_{\min} = 1-1/\sqrt{2}$ dla $x = 5\pi/8+k\pi$, $y = 3\pi/8+k\pi$, $k \in \mathscr{Z}$

11.19. **a)** $u_{\min} = -3$ dla $x = -1/3$, $y = 2/3$, $z = -2/3$; $u_{\max} = 3$ dla $x = 1/3$, $y = -2/3$, $z = 2/3$;
b) $u_{\max} = (a/6)^6$ dla $x = y = z = a/6$,
c) $u_{\max} = (5/3)^3$ dla $x = y = z = 5/3$,
d) $u_{\max} = 1/8$ dla $x = y = z = \pi/6$,
e) $u_{\min} = c^2$ dla $x = y = 0$, $z = \pm c$; $u_{\max} = a^2$ dla $x = \pm a$, $y = z = 0$;
f) $u_{\min} = 9$ dla $x = y = z = 3$.

11.20. $P = (3, -1, 1)$. **11.21.** $P = (21/13, 2, 63/26)$.

Odpowiedzi do rozdziału 12

12.1.



Rys. 12.1

12.2. **a)** $y = -x(x+2)$ dla $x \in \mathscr{R}$, parabola.
b) $y = x-1$ dla $x \geqslant 2$, gdyż $x = t^2+2 \geqslant 2$; półprosta.
c) $y = x+5$ dla $x \geqslant -9/4$, gdyż $x = t^2-t-2 \geqslant -9/4$; półprosta.
d) $x/a+y/b = 1$ dla $0 \leqslant x \leqslant a$; odcinek.
e) Podnosząc oba równania do kwadratu i dodając, otrzymujemy $x^2+y^2 = a^2$; okrąg.
f) Podnosząc równania do kwadratu i odejmując, otrzymujemy $x^2-y^2 = a^2(\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{sh}^2 t) = a^2$, stąd $y = \pm\sqrt{x^2-a^2}$ dla $x \geqslant a$, gdyż $x = a\,\mathrm{ch}\,t \geqslant a$; prawa gałąź hiperboli.

g) $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$, $x \in \mathscr{R}$, $y = b\,\mathrm{ch}\,t \geqslant b$; górna gałąź hiperboli.

h) $y = 1/x$ dla $x > 0$, gałąź hiperboli; **i)** $y = x\sqrt{x}$ dla $x > 0$.

12.3. $(-3, 8)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 5)$, $(-3, 16)$. Krzywa jest nieograniczona, przecina oś Ox dla $t = 0$ i dla $t = -2/3$ w punktach $(1, 0)$ i $(5/9, 0)$ oraz przecina oś Oy dla $t = 1$ i dla $t = -1$ w punktach $(0, 5)$ i $(0, 1)$. Punktami skrajnymi krzywej są $(8/9, -1/3)$ i $(1, 0)$. Po wyrugowaniu parametru otrzymujemy $9x^2-6xy+y^2-14x-6y+5 = 0$. Jest to linia drugiego stopnia. Badanie tej linii (*Zarys*, s. 403) wykazuje, że jest to parabola.

12.4. **a)** Styczna $Y = X$, normalna $Y = -X$; **b)** styczna $Y = X-1$, normalna $Y = -(X-1)$;
c) styczna $Y+\ln 2 = -\sqrt{3}(X-\pi/3)$, normalna $Y+\ln 2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(X-\pi/3)$.

12.5. $(12, 36)$, $(28/9, 28/27)$.

12.6. Przyrównując pochodną do $-1/2$, otrzymujemy równanie $x^4+2x^2-4x+1 = 0$, którego jeden pierwiastek odgadujemy: $x_1 = 1$ — odpowiada mu na krzywej punkt $(1, 1/2)$. Drugi pierwiastek x_2 leży w przedziale $(1/4; 1/3)$ i można go wyznaczyć w przybliżeniu (z dowolną dokładnością).

12.7. **a)** $X-\sqrt{3}\,Y+5+\sqrt{3} = 0$, $X\sqrt{3}+Y-1+\sqrt{3} = 0$;
b) $5X+6Y-13 = 0$, $6X-5Y+21 = 0$;
c) $X-Y = 0$, $X+Y = 0$; **d)** $X-5Y-8 = 0$, $5X+Y-14 = 0$;
e) $X-Y-3 = 0$, $X+Y+1 = 0$; **f)** $X+Y-2a = 0$, $X-Y = 0$.

12.8. **a)** $\dot{r}(t) = 2[1, -4t]$, $\dfrac{X-1}{1} = \dfrac{Y+3}{-4}$; **b)** $\dot{r}(t) = [-2\sin t, \cos t]$, $X+2Y = 2\sqrt{2}$;
c) $\dot{r}(t) = t[3t, 2]$ i jest to wektor styczny dla $t \neq 0$; dla $t = 0$ wektorem stycznym jest wektor $[0, 2]$; dla $t = \sqrt{2}$ styczna ma równanie $\dfrac{X-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{Y}{2}$.
d) $\dot{r}(t) = e^{2t}[2, 3e^t]$; $3(X-1) = 2(Y-1)$;

e) $\dot{r}(t) = [1-\cos t, \sin t] = 2\sin t/2\,[\sin t/2, \cos t/2]$ i jest to wektor styczny dla $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathscr{Z}$; dla $t = 2k\pi$ wektorem stycznym jest wektor $[0, 1]$; dla $t = \pi/2$ styczna ma równanie $X-(\pi/2-1) = Y-1$. Rozważana krzywa jest *cykloidą* (*Zarys*, s. 411).

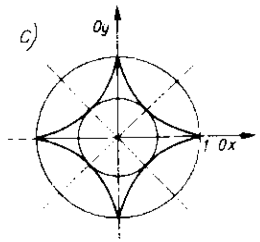
12.9. **a)** Ze wzoru (3) otrzymujemy $r^2 = 2$, zatem krzywa jest okręgiem lub jego częścią. Przekształcając, otrzymujemy

$$x = \sqrt{2}\cos(\pi/4-t),\ y = \sqrt{2}\sin(\pi/4-t)$$

Gdy t rośnie od 0 do 2π, to punkt M wyrusza z pozycji (1, 1) i obiega jednokrotnie okrąg w kierunku ujemnym. Krzywa jest okręgiem.

b) $r^2 = 4+5\cos^2 t$. Promień wodzący przyjmuje wartość najmniejszą 2 i wartość największą 3. Niech $\varphi = (Ox, \boldsymbol{r})$. Wówczas $\operatorname{tg}\varphi = y/x = \frac{2}{3}\operatorname{tg} t$. Jeśli t rośnie od 0 do $\pi/2$, to φ też rośnie od 0 do $\pi/2$ i wektor $\boldsymbol{r}$ obraca się, przy czym jego moduł maleje od 3 do 2. Krzywa jest symetryczna: 1° względem osi Ox (punkty symetryczne odpowiadają wartościom t, $2\pi-t$), 2° względem osi Oy (punkty symetryczne odpowiadają wartościom t, $\pi-t$, gdy $0 \leqslant t \leqslant \pi$ oraz wartościom t, $3\pi-t$, gdy $\pi < t \leqslant 2\pi$), 3° względem punktu O (jest to wniosek z poprzednich dwóch symetrii). Rugując parametr t, otrzymujemy równanie $4x^2+9y^2 = 36$. Jest to elipsa.

c) $r^2 = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2t$. Mamy $r = 1$ dla $t = k\pi/2$ oraz $r = 1/2$ dla $t = \pi/4+k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$. Wobec związku $\operatorname{tg}\varphi = y/x = \operatorname{tg}^3 t$, wymienionym wartościom t odpowiadają takie same wartości φ. Osie układu i dwusieczne układu są osiami symetrii krzywej. Ze związku $\dot{\boldsymbol{r}} = -\frac{3}{2}\sin 2t\,[\cos(-t), \sin(-t)]$ wynika, że w każdym punkcie krzywej leżącym na osi układu jest ostrze o stycznej leżącej na tej samej osi układu. Rugując t, otrzymujemy $x^{2/3}+y^{2/3} = 1$. Jest to *astroida*:



Rys. 12.9c

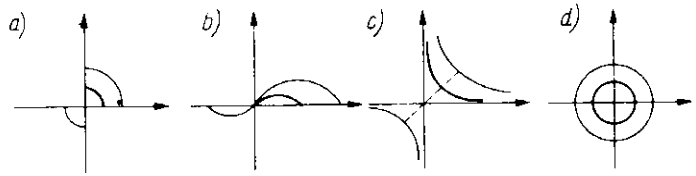
Mnożąc odcięte przez c^2/a i rzędne przez c^2/b, $c^2 = a^2-b^2$, otrzymujemy ewolutę elipsy (*Zarys*, s. 410).

12.11. **a)** $x = s\cos t$, $y = s\sin t$, $t \in \langle 0; \pi/2\rangle$;

b) $y = s\sin\frac{x}{s}$ dla $x \in \langle 0; s\pi\rangle$, gdy $s > 0$ i dla $x \in \langle s\pi; 0\rangle$, gdy $s < 0$;

c) $y = s^3/x^2$ dla $x \in (0; \infty)$, gdy $s > 0$ i dla $x \in (-\infty; 0)$, gdy $s < 0$;

d) $x^2+y^2 = s^2a^2$.



Rys. 12.11

12.13. **a)** $x^2+y^2+8x-6y = 0$, **b)** $(x+1)^2+(y-4)^2 = 10$, **c)** $x^2+y^2+6x+10y+9 = 0$, **d)** $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$ lub $(x-5)^2+(y-5)^2 = 25$.

12.15. **a)** $x^2/64+y^2/28 = 1$, **b)** $x^2/4+y^2 = 1$, **c)** $x^2/81+y^2/36 = 1$.

12.16. **a)** $x^2-y^2 = 12$, **b)** $x^2-y^2 = 1$, **c)** $x^2/16-y^2/9 = 1$.

12.17. **a)** $y^2 = 4x$, **b)** $y^2 = 2x-3$. **c)** Rozważana parabola ma równanie $x^2 = 2p(y-y_0)$, y_0 — rzędna wierzchołka; odległość wierzchołka od ogniska $|p/2|$ jest równa 1, zatem $p = 2$ lub $p = -2$, stąd wynikają dwie możliwości: $x^2 = 4(y-y_0)$ lub $x^2 = -4(y-y_0)$. Podstawiając $x = 4$, $y = 10$, otrzymujemy $y_0 = 6$ lub $y_0 = 14$. Odpowiedź: $x^2 = 4(y-6)$ lub $x^2 = -4(y-14)$.

12.18. $16x^2+7y^2 = 403$.

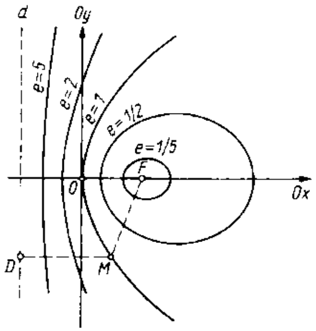
12.19. **a)** $xX+yY = a^2$, **b)** $(X-p)(x-p)+(Y-q)(y-q) = a^2$,
c) $\frac{1}{2}(yX+xY) = a$, **d)** $xX/a^2+yY/b^2 = 1$,
e) $xX/a^2-yY/b^2 = 1$, **f)** $yY = a(X+x)$.

12.20. **a)** $X+2\sqrt{3}\cdot Y = 8$, **b)** $2X+Y = 1$, **c)** $Y = 2(X+1)$.

12.21. **a)** $Y = \pm 2X+6$, **b)** $Y = \frac{4}{3}X$ lub $Y = 0$,
c) $Y = 2(1\pm\sqrt{3})X+1$.

12.22. **a)** $3X+4Y+29\pm 25 = 0$, **b)** $Y = 2X\pm 4\sqrt{2}$, **c)** $Y = X+p/2$.

12.23. **a)** $y^2 = 12x$, **b)** $3(x-5)^2+4y^2 = 48$, **c)** $3(x+5)^2-y^2 = 48$,
d) $24(x-13/4)^2+25y^2 = 75/2$, **e)** $24(x+13/4)^2-y^2 = 75/2$.



Rys. 12.23

12.24. Dowolna elipsa o danych ogniskach ma równanie $x^2/a^2+y^2/(a^2-c^2) = 1$, $a > c$ i wektor normalny $\boldsymbol{E} = [x/a^2, y/(a^2-c^2)]$. Dowolna hiperbola o danych ogniskach ma równanie $x^2/A^2-y^2/(c^2-A^2) = 1$, $0 < A < c$ i wektor normalny $\boldsymbol{H} = [x/A^2, -y/(c^2-A^2)]$. Należy wykazać, że jeśli (x, y) jest punktem wspólnym tych dwóch krzywych, to $\boldsymbol{EH} = 0$.

12.25. **a)** $9x^2+25y^2 = 225$, **b)** $7x^2-9y^2 = 63$, $x < 0$,
c) $7x^2-9y^2 = 63$.

12.26. **a)** $r = a$, **b)** $r^2 = a^2/\cos 2\varphi$, **c)** $r = a\cos\varphi$.

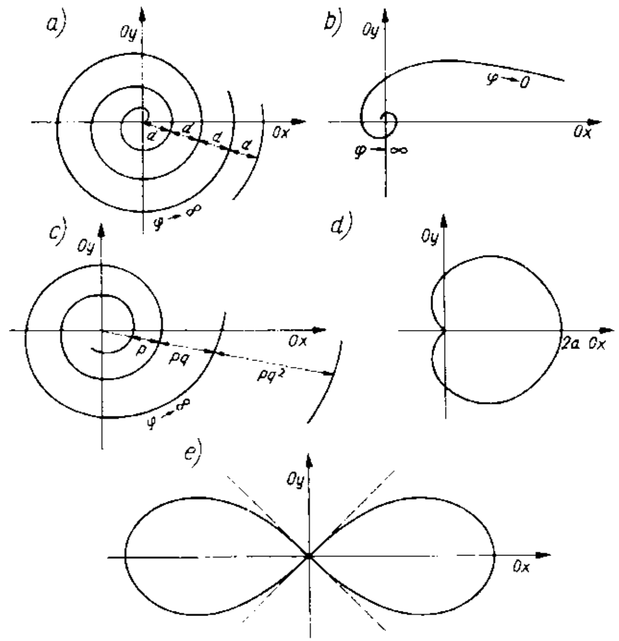
12.27. **a)** $xy = a^2$, **b)** $x = a$, **c)** $x^2+y^2-2ay = 0$,
d) $x+y = a\sqrt{2}$, **e)** $y = mx$, **f)** $x\cos\alpha+y\sin\alpha = a$.

12.28. **a)** $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$, **b)** $\frac{(x+\sqrt{5})^2}{4}-y^2 = 1$,

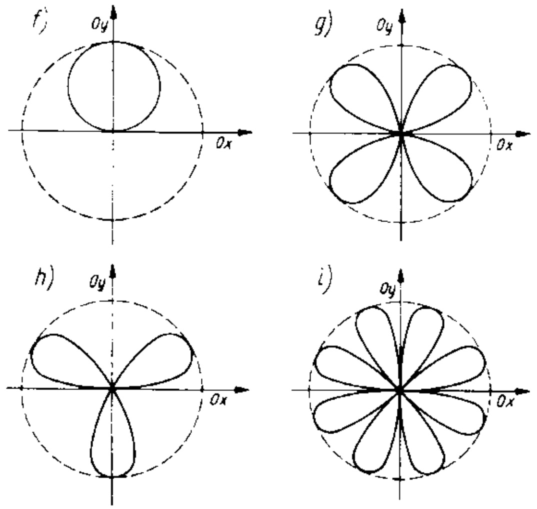
c) $y^2 = 6\left(x+\frac{3}{2}\right)$, **d)** $\frac{(x-\sqrt{3})^2}{4}+y^2 = 1$,

e) $\frac{(x+5)^2}{16}-\frac{y^2}{9} = 1$, **f)** $y^2 = x+\frac{1}{4}$.

12.29.



Rys. 12.29a,b,c,d,e



Rys. 12.29f,g,h,i

12.30. **a)** Oznaczmy $r = OP = \sqrt{x^2+y^2}$, $R = OQ = \sqrt{X^2+Y^2}$. Inwersja wyraża się równościami $\frac{1}{r}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{R}\overrightarrow{OQ}$, $rR = a^2$. Pierwsza z tych równości orzeka, że wektory $\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OQ}$ są równoległe i zgodnie skierowane, druga zaś wyraża związek między długościami tych wektorów. Stąd otrzymujemy związek

$$\overrightarrow{OP} = \frac{r}{R}\overrightarrow{OQ} = \frac{a^2}{R^2}\overrightarrow{OQ}$$

Przechodząc do współrzędnych, otrzymujemy związki (10).

12.31. Podstawiając (10) do (11), otrzymujemy (12).

12.32. Równanie lemniskaty sprowadzamy do postaci $r^4 = a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, a następnie do postaci $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$. Podstawiając (10), otrzymujemy $X^2 - Y^2 = a^2$.

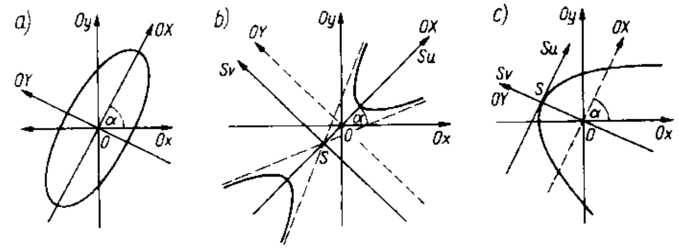
12.33. **a)** elipsa, **b)** zbiór pusty, **c)** punkt, **d)** hiperbola, **e)** dwie proste przecinające się, **f)** parabola, **g)** zbiór pusty, **h)** dwie proste równoległe, **i)** prosta.

12.34. Podajemy rysunki do zadań a) b) c). Wykonanie pozostałych rysunków pozostawiamy Czytelnikowi. Przy kreśleniu krzywej można skorzystać z tych punktów krzywej, które łatwo wyznaczyć w układzie Oxy, np. z punktów przecięcia krzywej osiami układu.

a) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $X^2/24 + Y^2/4 = 1$;

b) $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $u = X+\sqrt{2}$, $v = Y$, $u^2/8 - v^2/4 = 1$;

c) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $u = X$, $v = Y-\sqrt{5}$, $u^2 = -2\sqrt{5}v$;



Rys. 12.34

d) $\operatorname{tg}\alpha = 1/2$, $Y = -4/\sqrt{5}$ lub $Y = -2/\sqrt{5}$, $x-2y = 4$ lub $x-2y = 2$;

e) $\operatorname{tg}\alpha = 1/2$, $X^2/4 - Y^2/6 = 1$;

f) $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $u = X-\sqrt{2}$, $v = Y$, $u^2/8 + v^2/4 = 1$;

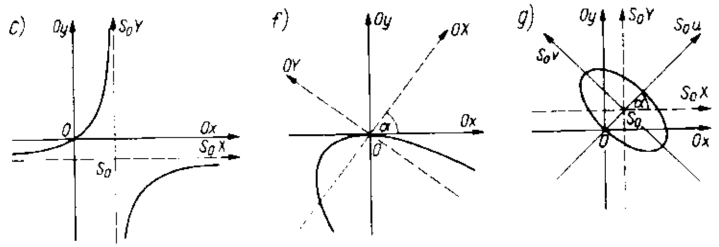
g) $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $u = X-3/\sqrt{2}$, $v = Y+1/\sqrt{2}$, $v^2 = 4\sqrt{2}u$;

h) $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $X = 3/\sqrt{2}$ lub $X = 1/\sqrt{2}$, $x+y = 3$ lub $x+y = 1$.

12.35. **a)** $S_0 = (-1, 1)$, $X^2 + 2(X+Y)^2 = -3$, zbiór pusty;

b) $2x_0 - y_0 = 3$, obieramy $S_0 = (0, -3)$, $(2X-Y)^2 = -1$, zbiór pusty;

c) $S_0 = (2, -1)$, $XY = -2$, hiperbola $(x-2)(y+1) = -2$ (rys. c);



Rys. 12.35

d) $x_0-2y_0=3$, obieramy $S_0=(3,0)$, $X-2Y=\pm 1$, dwie proste równoległe $x-2y=4$ lub $x-2y=2$;

e) $x_0+y_0=1$, obieramy $S_0=(1,0)$, $X+Y=0$, prosta $x+y=1$;

f) środka nie ma, parabola, obrót $\operatorname{tg}\alpha=4/3$, $3Y=-X(X+4)$ (rys. f);

g) $S_0=(1,1)$, $X^2+XY+Y^2=3$, obrót $\operatorname{tg}\alpha=1$, wprowadzamy układ S_0uv obrócony o 45° względem układu S_0XY, wzory przejścia $X=(u-v)/\sqrt{2}$, $Y=(u+v)/\sqrt{2}$, otrzymujemy $u^2/2+$ $+v^2/6=1$, elipsa (rys. g);

h) $S_0=(3,3)$, $X^2-XY+Y^2=9$, obrót $\operatorname{tg}\alpha=1$, $u^2/18+$ $+v^2/6=1$, elipsa.

12.36. a) $\operatorname{tg}\alpha=2$, $u=X-2/\sqrt{5}$, $v=Y+4/\sqrt{5}$, $-u^2+4v^2=8$;

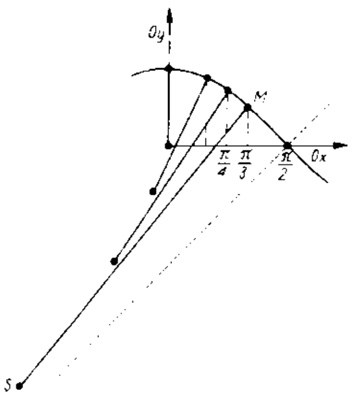
b) $\operatorname{tg}\alpha=1$, $u=X-2/\sqrt{2}$, $v=Y$, $u^2/12+v^2/4=1$;

c) $S_0=(2,-1)$, $(X+Y)^2+3Y^2=0$, stąd $X=Y=0$, punkt $(2,-1)$;

d) $S_0=(2,-1)$, $(X-Y)(X-3Y)=0$, dwie proste przecinające się $(x-y+3)(x-3y-5)=0$.

12.37. $[0,-1]$, 1; $\dfrac{5\sqrt{3}}{12}[-1,-2]$, $\dfrac{5\sqrt{15}}{12}\approx 1{,}6$; $\dfrac{3}{2}[-1,-2]$,

$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}6$; $\dfrac{7}{4}[-\sqrt{3},-2]$, $\dfrac{7\sqrt{7}}{4}\approx 4{,}6$; $\overrightarrow{MS}$ nie istnieje, $R=\infty$.



Rys. 12.37. Promienie krzywizny cosinusoidy

12.38. a) $X=-4$, $Y=8/3$, $R=5\sqrt{10}/3$; b) nie istnieje;

c) $X=3$, $Y=-2$, $R=2\sqrt{2}$; d) $X=-2$, $Y=3$, $R=2\sqrt{2}$;

e) $X=0$, $Y=2a$, $R=a$; f) $X=2a$, $Y=0$, $R=a$;

g) $X=-3/2$, $Y=16/3$, $R=5\sqrt{5}/2$; h) $X=\pi/4-5/2$, $Y=9/4$, $R=5\sqrt{5}/4$.

12.39. a) $27X^2+8Y^3=0$, b) $8X^3-27Y^2=0$.

c) Dana krzywa jest astroidą. Jej ewoluta ma równanie $(X+Y)^{2/3}+(X-Y)^{2/3}=2a^3$ i jest astroidą, która powstaje z danej atroidy przez jednokładność w skali $s=2$ i obrót o 45°.

d) $(2X)^{2/3}+Y^{2/3}=3^{2/3}$, e) $X^2+Y^2=a^2$.

f) Dana krzywa jest kardioidą. Jej równanie typu (22) ma postać

$$x=a(1+\cos\varphi)\cos\varphi,\quad y=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi \tag{I}$$

Ewoluta ma równanie

$$X-\frac{2}{3}a=\frac{a}{3}(1-\cos\varphi)\cos\varphi,\quad Y=\frac{a}{3}(1-\cos\varphi)\sin\varphi$$

które przy podstawieniu $\varphi=\pi+\alpha$ przyjmuje postać

$$X-\frac{2}{3}a=-\frac{a}{3}(1+\cos\alpha)\cos\alpha,\quad Y=-\frac{a}{3}(1+\cos\alpha)\sin\alpha \tag{II}$$

Z porównania (II) i (I) widać, że ewoluta jest kardioidą, która powstaje z danej kardioidy przez jednokładność w skali $s=-1/3$ i translację o wektor $\left[\frac{2}{3}a, 0\right]$.

12.40. a) F jest rodziną parabol, które w swych wierzchołkach są styczne do osi Ox. Figura W jest prostą $y=0$ i jest obwiednią.

b) F jest rodziną parabol sześciennych, które w swych punktach przegięcia są styczne do osi Ox. Figura W jest prostą $y=0$ i jest obwiednią.

c) F jest rodziną prostych równoległych do osi Ox. Figura W jest zbiorem pustym. Obwiedni nie ma.

d) F jest rodziną prostych równoległych do osi Ox. Figura W jest prostą $y=0$, a więc jedną z prostych rodziny F. Obwiedni nie ma.

e) F jest rodziną prostych odległych od początku układu o 1. Figura W jest okręgiem $x^2+y^2=1$ i jest obwiednią.

f) F jest rodziną prostych przechodzących przez początek układu. Figura W jest punktem $(0, 0)$. Jest to obwiednia zdegenerowana.
g) F jest rodziną okręgów dla $c \neq 0$ z dołączeniem punktu $(0, 0)$ odpowiadającego wartości $c = 0$. Figura W jest parą prostych $y = x$, $y = -x$. Punkt $(0, 0)$ jest punktem osobliwym rodziny dla $c = 0$. Pozostała część figury W jest obwiednią.
h) F jest dla $c \neq 0$ rodziną okręgów stycznych w początku układu do osi Oy. Wartości $c = 0$ odpowiada punkt $(0, 0)$. Figura W jest punktem $(0, 0)$. Jest to obwiednia zdegenerowana.
i) F jest rodziną parabol, którą należy rozdzielić na dwie podrodziny: F_1 dla $c > 0$ i F_2 dla $c < 0$. Dla F_1 figura W ma równanie $y = 2|x|$, $x \neq 0$ i jest obwiednią rodziny F_1. Analogicznie — obwiednią dla F_2 jest para półprostych $y = -2|x|$, $x \neq 0$.
j) F jest rodziną parabol dla $c \neq 0$ z dołączeniem prostej $y = 0$ dla $c = 0$. Dla figury W mamy układ równań $x^2 = 2c$, $y = c^2$. Dla $c < 0$ układ ten jest sprzeczny, zatem dla całej rodziny F obwiednia nie istnieje. Dla $c \geqslant 0$ figura W jest krzywą $y = \frac{1}{4}x^4$ i jest obwiednią tej części rodziny F, która odpowiada wartościom $c \geqslant 0$.
k) Rodzinę F rozdzielamy na dwie podrodziny: F_1 i F_2. F_1 jest rodziną elips dla $c > 0$ (w tym okrąg dla $c = 1$), F_2 jest rodziną hiperbol dla $c < 0$ z dołączeniem prostej $x = 0$ dla $c = 0$. Dla figury W mamy układ równań $y^2 = 3c^2$, $x^2 = -2c^3$. Dla $c > 0$ układ ten jest sprzeczny; podrodzina F_1 obwiedni nie ma. Dla $c \leqslant 0$ figura W jest krzywą $y = \pm\sqrt{3}\,\sqrt[3]{x^2/2}$ i jest obwiednią rodziny F_2.
l) F jest rodziną elips, którą należy rozdzielić na trzy podrodziny: F_1 dla $c < 0$, F_2 dla $0 < c < 1$, F_3 dla $c > 1$. Figura W jest dla $c < 0$ i dla $c > 1$ zbiorem pustym, natomiast dla $0 < c < 1$ jest astroidą $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, która po odrzuceniu wierzchołków jest obwiednią rodziny F_2. Podrodziny F_1 i F_3 nie mają obwiedni.

12.41. Mamy $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$. Jeśli współrzędne wektora $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$ oznaczymy literami a, b, c, a współrzędne wektora $(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}$ literami A, B, C, to równania rozważanych prostych i płaszczyzn będą następujące:

$$\frac{X-x}{\dot{x}} = \frac{Y-y}{\dot{y}} = \frac{Z-z}{\dot{z}}, \quad \frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c}$$

$$\frac{X-x}{A} = \frac{Y-y}{B} = \frac{Z-z}{C}, \quad \dot{x}(X-x)+\dot{y}(Y-y)+\dot{z}(Z-z) = 0$$

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z) = 0, \quad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z) = 0$$

przy czym $a = \dot{y}\ddot{z}-\dot{z}\ddot{y}$, $b = \dot{z}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{z}$, $c = \dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}$ oraz $A = b\dot{z}-c\dot{y}$, $B = c\dot{x}-a\dot{z}$, $C = a\dot{y}-b\dot{x}$.

12.43. a) $[2, 4, 1]$, $[-12, 2, 16]$, $[-62, 44, -52]$;
b) $[-1, 0, 2]$, $[-2, 0, -1]$, $[0, 5, 0]$ dla $t = 0$, $[1, 0, 0]$, $[0, 1, -1]$, $[0, -1, 1]$ dla $t = \pi$;
c) $[1, 0, 0]$, $[0, 0, 2]$, $[0, 2, 0]$ dla $t = 0$, $[1, 2, 3]$, $[6, -6, 2]$, $[-22, -16, 18]$ dla $t = 1$.

12.44. a) $k = \sqrt{2}/4$, $\tau = \sqrt{2}/4$; b) $k = 2$, $\tau = 3$;
c) $k = \tau = 2abt/(a^2+2b^2t^2)^2$.

12.45. a) $2X+Y+2Z = 6$, $-Y+2Z = 11$; b) $X-Z = 1$, $Y = -1$;
c) $X = 1$, $Y+Z = 5$.

12.46. a) $X = Z$, b) $X = Y$ cała krzywa leży w tej płaszczyźnie,
c) $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$, płaszczyzna ściśle styczna nie istnieje, krzywa jest prostą $1-x = y/5 = 3z$.

Odpowiedzi do rozdziału 13

13.1. a) $[3, 4, 12]$, b) $[2, -3, -1]$, c) $[1, 1, 3]$,
d) $[-2, -4, 1]$, e) $[-3, 4, 5]$, f) $[1, -1, 2]$.

13.2. a) $2x+2y-3z+1 = 0$, b) $2x+2y-z-1 = 0$,
c) $x+y-2z = 0$.

13.3. $x+4y+6z+21 = 0$ lub $x+4y+6z-21 = 0$.

13.4. $z = -1/2+\sqrt{1/2}$ lub $z = -1/2-\sqrt{1/2}$.

13.5. $x+y+z = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

13.6. Częścią wspólną płaszczyzny T i powierzchni S jest: a) punkt M, b) prosta $6x = 3y = 2z$, c) okrąg $x^2+y^2 = 1$, $z = 1$.

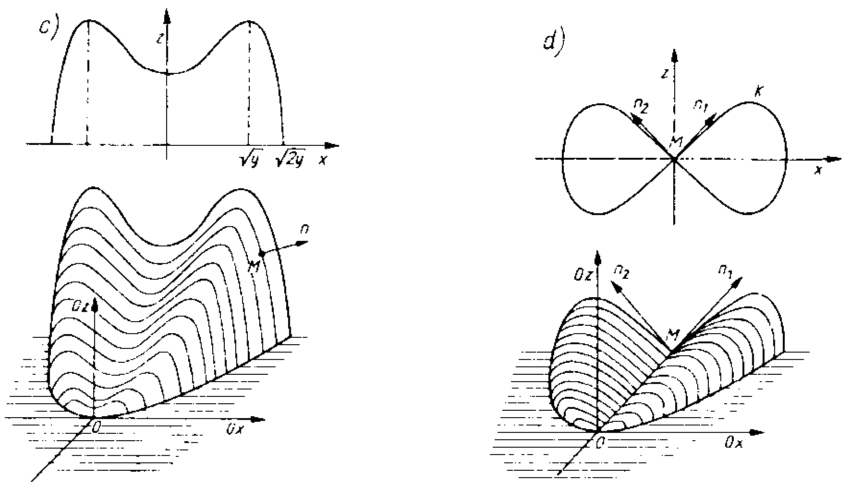
13.7. a) Podstawiając współrzędne punktu M do równań powierzchni S, otrzymujemy układ równań: $u+v = 2$, $u-v = 0$, $uv = 1$, który ma dokładnie jedno rozwiązanie $u = v = 1$, zatem punkt M jest punktem jednokrotnym powierzchni S. Ze wzoru (6) otrzymujemy $\boldsymbol{n} = [u+v, v-u, -2]$. Stąd dla $u = v = 1$ mamy $\boldsymbol{n} = [2, 0, -2]$. Aby poznać kształt powierzchni S, rugujemy parametry u, v i otrzymujemy dla S równanie $x^2 - y^2 = 4z$ (jest to paraboloida hiperboliczna, *Zarys*, s. 432, rys. 95.1).

b) Postępując jak w a), stwierdzamy, że M jest punktem jednokrotnym, odpowiadającym wartościom $u = 2$, $v = 1$; $\boldsymbol{n} = [3, 1, -1]$. Rugując parametry, otrzymujemy dla S równanie $x^2 + y^2 = 2z$ (jest to paraboloida obrotowa, *Zarys*, s. 426).

c) M jest punktem jednokrotnym, odpowiadającym wartościom: $u = 2$, $v = 1$; $\boldsymbol{n} = [36, -15, 2]$. Rugując parametry, otrzymujemy dla S równanie

$$z = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2y - x^2}\,(y + x^2) \quad \text{dla} \quad y \geqslant \frac{1}{2}x^2$$

z którego wynika, że powierzchnia S jest symetryczna względem płaszczyzn Oxy i Oyz. Jeśli w otrzymanym równaniu przyjmiemy, że $y = \text{const} > 0$ (oznacza to przecięcie powierzchni S płaszczyzną $y = \text{const}$), to otrzymamy funkcję zmiennej x, która dla $x = \pm\sqrt{y}$ ma maksimum równe $y\sqrt{y}$ oraz dla $x = 0$ ma minimum równe $y\sqrt{y/2}$. Rysunek 13.7c przedstawia wykres tej funkcji oraz część powierzchni S.



Rys. 13.7c,d

d) Punkt M odpowiada na płaszczyźnie parametrów dwóm punktom: $P_1 = (-1, 1)$ i $P_2 = (1, -1)$. Punkt M jest wielokrotny i nie można w tym punkcie stosować wzoru (6) w odniesieniu do całej powierzchni S. Można jednak obrać otoczenia punktów P_1 i P_2, którym na S odpowiadają płaty S_1 i S_2, takie że do każdego z nich oddzielnie można stosować wzór (6). M jest punktem wspólnym tych płatów. Otrzymujemy w punkcie M wektor normalny $[4, 0, 4]$ dla S_1 i wektor normalny $[4, 0, -4]$ dla S_2. Iloczyn wektora normalnego i liczby różnej od 0 jest też wektorem normalnym. Dzieląc otrzymane wektory normalne przez 4 i przez -4, otrzymujemy wektory $\boldsymbol{n}_1 = [1, 0, 1]$ i $\boldsymbol{n}_2 = [-1, 0, 1]$ przedstawione na rys. 13.7d.

Aby zbadać kształt powierzchni S, rugujemy parametry i otrzymujemy dla S równanie

$$z = \pm \frac{1}{2}x\sqrt{2y - x^2} \quad \text{dla} \quad y \geqslant \frac{1}{2}x^2$$

z którego wynika, że powierzchnia S jest symetryczna względem płaszczyzn Oxy i Oyz. Podstawiając w tym równaniu $y = \text{const} = 2$, otrzymujemy

$$z = \pm \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2} \quad \text{dla} \quad |x| \leqslant 2$$

Jest to krzywa K (rys. 13.7d), będąca przekrojem powierzchni S płaszczyzną $y = 2$. Z równań parametrycznych powierzchni wynika, że wartości $y = 2$ odpowiada na płaszczyźnie parametrów okrąg $u^2 + v^2 = 2$ przechodzący przez punkty P_1 i P_2. Obiegowi punktu (u, v) po tym okręgu

$$u = \sqrt{2}\cos\varphi, \qquad v = \sqrt{2}\sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

odpowiada obieg punktu (x, y, z) po krzywej K

$$x = 2\cos t, \qquad y = 2, \qquad z = \sin 2t, \qquad t = \varphi - \pi/4$$

przy czym punkt (x, y, z) przechodzi dwukrotnie przez punkt M.

13.8. $[a/\sqrt{2}, -a\sqrt{2}, 1]$. **13.9.** $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 1]$.

13.10. Powierzchnia jest sferą o środku w początku układu i promieniu równym 1, rozciętą wzdłuż południka $\varphi = \pi$. Wektor normalny w punkcie M jest równoległy do promienia sfery w punkcie M.

13.11. **a)** $z = \pm a\sqrt{x^2+y^2}$, stąd $z^2 = a^2(x^2+y^2)$;
b) $z = \pm a\sqrt{x^2+y^2}+b$, stąd $(z-b)^2 = a^2(x^2+y^2)$;
c) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, stąd $\ln(x^2+y^2) = 2z$;
d) $z = \exp(\pm\sqrt{x^2+y^2})$, stąd $x^2+y^2 = \ln^2 z$;
e) $z = \pm(\sqrt{x^2+y^2})^3$, stąd $z^2 = (x^2+y^2)^3$;
f) $z = \pm 1/\sqrt{x^2+y^2}$, stąd $z^2(x^2+y^2) = 1$;
g) $\pm\sqrt{x^2+y^2} = a$; stąd $x^2+y^2 = a^2$.

13.12. **a)** $z^2 = a^2(x^2+y^2)$, **b)** $(z-b)^2 = a^2(x^2+y^2)$,
c) $x^2+y^2 = \ln^2 z$, **d)** $x^2+y^2 = \cos^2 z$, $0 \leqslant z \leqslant \pi$;
e) $z = x^2+y^2-1$, **f)** $z^2 = (x^2+y^2)^3$.

13.13. **a)** $y^2+z^2 = a^2x^2$, **b)** $y^2+z^2 = (ax+b)^2$,
c) $y^2+z^2 = e^{2x}$, **d)** $x = \cos\sqrt{y^2+z^2}$, $\sqrt{y^2+z^2} \leqslant \pi$;
e) $y^2+z^2 = (x^2-1)^2$, **f)** $y^2+z^2 = x^6$.

13.14. **a)** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2+z^2}{b^2} = 1$, **b)** $y^2+z^2 = e^{-2x^2}$, **c)** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{b^2} = 1$,
d) $y^2+z^2 = 2x$, **e)** $(x-a)^2+y^2+z^2 = a^2$,
f) $[x^2+(y^2+z^2)]^2 = a^2[x^2-(y^2+z^2)]$.

13.15. **a)** Oznaczmy: $P = (x, y, z)$ — dowolny punkt tworzącej T; Q — rzut punktu P na oś l, a więc na oś Oz; $Q = (0, 0, z)$; $M = (X, Y, Z)$ — dowolny punkt przestrzeni. Okrąg o środku Q, przechodzący przez punkt P i leżący w płaszczyźnie prostopadłej do osi l (w rozważanym przypadku: do osi Oz), ma równanie $X^2+Y^2 = x^2+y^2$, $Z = z$. Uwzględniając równanie tworzącej i rugując x, y, z, otrzymujemy równanie powierzchni S

$$X^2+Y^2-m^2Z^2 = a^2$$

Wyprowadzając to równanie, użyliśmy dużych liter X, Y, Z, aby odróżnić punkt M powierzchni S od punktu P tworzącej T. Teraz, mając już równanie powierzchni S, możemy je zapisać za pomocą małych liter. Odpowiedź: $x^2+y^2-m^2z^2 = a^2$.
b) $x^2+z^2-y^2/m = a^2$, **c)** $x^2+y^2 = (1-z)^2+z^2$.

13.16. Niech O będzie początkiem układu, a $M = (X, Y, Z)$ dowolnym punktem powierzchni S. Wyprowadzimy równanie powierzchni S w postaci wektorowej, przedstawiając wektor $\overrightarrow{OM}$ jako funkcję dwóch parametrów t, φ. Oznaczmy $H = (a, b, c)$; $V = [A, B, C]$, $V = |V|$, $k = 1/V$; $P = (x(t), y(t), z(t))$ — dowolny punkt tworzącej; Q — rzut punktu P na l; L – okrąg o środku Q przechodzący przez P i zawarty w płaszczyźnie prostopadłej do l. Powierzchnia S jest sumą takich okręgów odpowiadających wszystkim punktom P, tzn. wszystkim wartościom t należącym do E. Rozważmy wektor $\overrightarrow{QP}$ oraz wektor $\overrightarrow{QR}$ prostopadły do $\overrightarrow{QP}$ i do V oraz równy co do modułu wektorowi $\overrightarrow{QP}$. Mamy $\overrightarrow{QR} = k\overrightarrow{HP}\times V$, $\overrightarrow{QP} = -k\overrightarrow{QR}\times V = -k^2(\overrightarrow{HP}\times V)\times V$. Tworzymy wektor $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QP}\cos\varphi+\overrightarrow{QR}\sin\varphi$. Gdy φ rośnie od 0 do 2π, to koniec M tego wektora zakreśla okrąg L. Mamy $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QM}$. Stąd, po wykonaniu rachunków, otrzymujemy $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}+k^2(\overrightarrow{HP}\cdot V)(1-\cos\varphi)V+\overrightarrow{HP}\cos\varphi+k(\overrightarrow{HP}\times V)\sin\varphi$. Jest to wektorowe równanie powierzchni S. Po przejściu do współrzędnych, otrzymamy równania analityczne.

13.17. **a)** Oznaczmy: (x, y, z) — punkt kierownicy, (X, Y, Z) — punkt tworzącej. Mamy 3 równania tworzącej: $X = x+t$, $Y = y+t$, $Z = z+t$, $t\in\mathscr{R}$ i 2 równania kierownicy. Rugując z tych równań x, y, z, t, otrzymujemy równanie powierzchni walcowej $(X+Z)^2+(Y+Z)^2 = a^2$. Duże litery X, Y, Z wprowadziliśmy, aby odróżnić punkt tworzącej od punktu kierownicy. Teraz, uzyskane równanie powierzchni możemy zapisać za pomocą małych liter. Odpowiedź: $(x+z)^2+(y+z)^2 = a^2$.
b) $x+y-z+1 = 0$, **c)** $(x-y+1)(x+y-2z) = 0$.

13.18. **a)** Oznaczmy: (x, y, z) — punkt kierownicy; (X, Y, Z) — punkt tworzącej. Mamy 3 równania tworzącej: $X = xt$, $Y = yt$, $Z = zt$, $t\in\mathscr{R}$ i 2 równania kierownicy. Rugując z tych równań x, y, z, t, otrzymujemy równanie powierzchni stożkowej $c^2(X^2+Z^2) = a^2Y^2$. Podając odpowiedź, możemy użyć małych liter: $c^2(x^2+z^2) = a^2y^2$.
b) $x^2+y^2-zy-z = 0$, **c)** $9(x^2+z^2) = 16y^2$,
d) $x^2+z^2 = (a+y)z$, **e)** $c^2(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)(z+c)^2$.

13.19. Jeśli w równaniach powierzchni określonej w zad. 13.8 przyjmiemy $\varphi = \text{const} = \varphi_0$, to otrzymamy równania

$$x = r\cos\varphi_0, \quad y = r\sin\varphi_0, \quad z = a\varphi_0, \quad r\in\mathscr{R}$$

które są parametrycznymi równaniami pewnej prostej (r jest parametrem). Oznacza to, że wszystkie punkty powierzchni odpowiadające wartości $\varphi = \varphi_0$ tworzą prostą. Ponieważ jest tak dla dowolnej wartości φ_0, więc przez każdy punkt powierzchni przechodzi prosta zawarta w tej powierzchni, zatem powierzchnia jest prostokreślna. Analogicznie jest w przypadku powierzchni określonej w zad. 13.9.

13.20. Dowolna prosta l przechodząca przez punkt P ma równania

$$x = 1+At, \quad y = -1+Bt, \quad z = 3+Ct, \quad t\in\mathscr{R}$$

gdzie $V = [A, B, C]$ jest dowolnym niezerowym wektorem. Prosta l zawiera się w S, gdy każdy punkt prostej l spełnia równanie powierzchni S, tzn. gdy dla każdego t zachodzi równość

$4(1+At)^2-(-1+Bt)^2 = 3+Ct$, czyli równość

$$(4A^2-B^2)t+(8A+2B) = C$$

Równość ta jest spełniona dla każdego t, gdy $4A^2-B^2 = 0$ oraz $8A+2B = C$. Rozwiązując układ tych dwóch równań, otrzymujemy

$$B = 2A, \ C = 12A \quad \text{lub} \quad B = -2A, \ C = 4A$$

Przyjmując $A = 1$, otrzymujemy dwa wektory

$$V_1 = [1, 2, 12] \qquad V_2 = [1, -2, 4]$$

Są to wektory kierunkowe dwóch prostych l_1 i l_2 przechodzących przez punkt P i zawartych w S

$$l_1\colon x = 1+t, \quad y = -1+2t, \quad z = 3+12t, \quad t\in\mathscr{R}$$
$$l_2\colon x = 1+t, \quad y = -1-2t, \quad z = 3+4t, \quad t\in\mathscr{R}$$

13.21. M e t o d a   g e o m e t r y c z n a. Dowolna prosta l przechodząca przez punkt $P = (x, y, z)$ powierzchni S ma równania

$$X = x+At, \qquad Y = y+Bt, \qquad Z = z+Ct, \qquad t\in\mathscr{R}$$

gdzie $V = [A, B, C]$ jest dowolnym niezerowym wektorem, a punkt P spełnia równanie powierzchni S. Prosta l zawiera się w S, gdy każdy jej punkt $M = (X, Y, Z)$ spełnia równanie powierzchni S, tzn. gdy dla każdego t zachodzi równość

$$\frac{(x+At)^2}{a^2}-\frac{(y+Bt)^2}{b^2} = 2(z+Ct)$$

Równość ta po uporządkowaniu ma postać

$$t(A^2/a^2-B^2/b^2)+2(Ax/a^2-By/b^2) = 2C$$

i zachodzi dla każdego t, gdy $A^2/a^2-B^2/b^2 = 0$ oraz $Ax/a^2-By/b^2 = C$. Rozwiązując układ tych dwóch równań, otrzymujemy

$$B = b\frac{A}{a}, \quad C = \frac{A}{a}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) \quad \text{lub} \quad B = -b\frac{A}{a}, \quad C = \frac{A}{a}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$$

Przyjmując $A = a$, otrzymujemy dwa wektory

$$V_1 = [a, b, x/a-y/b], \qquad V_2 = [a, -b, x/a+y/b]$$

Są to wektory kierunkowe prostych l_1 i l_2, przechodzących przez punkt P i zawartych w powierzchni S.

M e t o d a   a l g e b r a i c z n a. Równanie powierzchni S piszemy w postaci

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) = 2z$$

Równanie to możemy zapisać w postaci proporcji na dwa sposoby:

$$\frac{x/a+y/b}{2} = \frac{z}{x/a-y/b} \tag{1}$$

$$\frac{x/a-y/b}{2} = \frac{z}{x/a+y/b} \tag{2}$$

Oznaczmy lewe strony tych proporcji literami u i v

$$\frac{x/a+y/b}{2} = u, \qquad \frac{x/a-y/b}{2} = v \tag{*}$$

Wówczas proporcje (1) i (2) możemy zapisać w postaci par równości

$$x/a+y/b = 2u, \qquad z = u(x/a-y/b) \tag{1*}$$

$$x/a-y/b = 2v, \qquad z = v(x/a+y/b) \tag{2*}$$

Jeśli ustalimy wartość u, to para równości (1*) przedstawia pewną prostą zawartą w S. Jeśli ustalimy wartość v, to para równości (2*) przedstawia pewną prostą zawartą w S. Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ będzie dowolnie obranym punktem powierzchni S. Aby wyznaczyć dwie proste przechodzące przez P_0 i zawarte w S, należy ze wzorów (*) obliczyć wartości u_0, v_0 odpowiadające punktowi P_0 i wstawić je do (1*) i do (2*).

13.22. Metoda geometryczna — jak w poprzednim zadaniu.
Metoda algebraiczna. Równanie powierzchni S piszemy w postaci

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)$$

Równanie to możemy zapisać w postaci proporcji na dwa sposoby

$$\frac{y/b+z/c}{1+x/a}=\frac{1-x/a}{y/b-z/c}, \qquad \frac{y/b-z/c}{1+x/a}=\frac{1-x/a}{y/b+z/c}$$

Dalsze postępowanie — jak w poprzednim zadaniu.

13.23. **a)** Sfera o promieniu 3, **b)** punkt (początek układu), **c)** zbiór pusty, **d)** walec obrotowy o osi Ox i promieniu 2, **e)** dwie płaszczyzny równoległe: $z = 2$ i $z = -2$, **f)** prosta (oś Ox), **g)** płaszczyzna Oxy, **i)** elipsoida obrotowa o półosiach 4, 4, 2; **j)** elipsoida trójosiowa o półosiach 2, 6, 3; **k)** stożek obrotowy, którego osią jest oś Ox, a wierzchołkiem początek układu; **l)** hiperboloida jednopowłokowa obrotowa o osi Oz, **m)** hiperboloida dwupowłokowa obrotowa o osi Ox, **n)** paraboloida obrotowa o osi Oz i tworzącej $z = x^2$, $y = 0$; **o)** paraboloida hiperboliczna, **p)** hiperboloida jednopowłokowa o półosiach 5, 5, 6.

13.24. **a)** Elipsoida, **b)** hiperboloida jednopowłokowa, **c)** zbiór pusty, **d)** stożek, **e)** punkt, **f)** paraboloida eliptyczna, **g)** hiperboloida dwupowłokowa, **h)** paraboloida hiperboliczna, **i)** walec eliptyczny, **j)** zbiór pusty, **k)** walec paraboliczny, **l)** walec hiperboliczny, **m)** zbiór pusty, **n)** płaszczyzny nierównoległe, **o)** prosta, **p)** płaszczyzny równoległe, **q)** płaszczyzna.

WNT Warszawa 1992. Wydanie I.
Ark. wyd. 16,7. Ark. druk. 17,0.
Format A5. Symbol MF/30068/MEN.
Zakłady Graficzne w Poznaniu.
Zam. 71344/92.

Książka zawiera zadania oraz krótkie informacje teoretyczne, instrukcje, rozwiązania i rysunki z zakresu:

- **logiki,**
- **równań liniowych,**
- **geometrii analitycznej,**
- **rachunku różniczkowego,**
- **geometrii różniczkowej.**

Układ książki jest identyczny z układem książki R. Leitnera „Zarys matematyki wyższej" cz.I

ISBN 83-204-1338-9 całość
ISBN 83-204-1567-5 cz.I